

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 18/5/16
Θέμα Α

A1. Θεωρία Σχολικού Σελ. 262

A2. Θεωρία Σχολικού Σελ. 141

A3. Θεωρία Σχολικού Σελ. 246

A4.

α	β	γ	δ	ε
Λ	Σ	Λ	Σ	Σ

Θέμα Β.

B1. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξη συνεχών

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων

$$\begin{aligned} \text{με } f'(x) &= \frac{(x^2)' \cdot (x^2+1) - (x^2+1)' \cdot x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2)' \cdot (x^2+1) - 2x \cdot x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \text{ είναι } (x^2+1)^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

Η $f(x)$ στη θέση $x = 0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 0$

$$\text{Άρα } f(x) \geq f(0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Η $f \searrow$ στο $(-\infty, 0]$ και η $f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$

B2. Η $f'(x)$ παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων, άρα :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x)' \cdot (x^2+1)^2 - [(x^2+1)^2]' \cdot (2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{2 \cdot (x^2+1)^2 - 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2(x^2+1)[x^2+1-4x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}, (x^2+1)^3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	○	+	○	-
$f(x)$					

Άρα η f στη θέση $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και στη θέση $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ παρουσιάζει καμπή με αντίστοιχες τιμές :

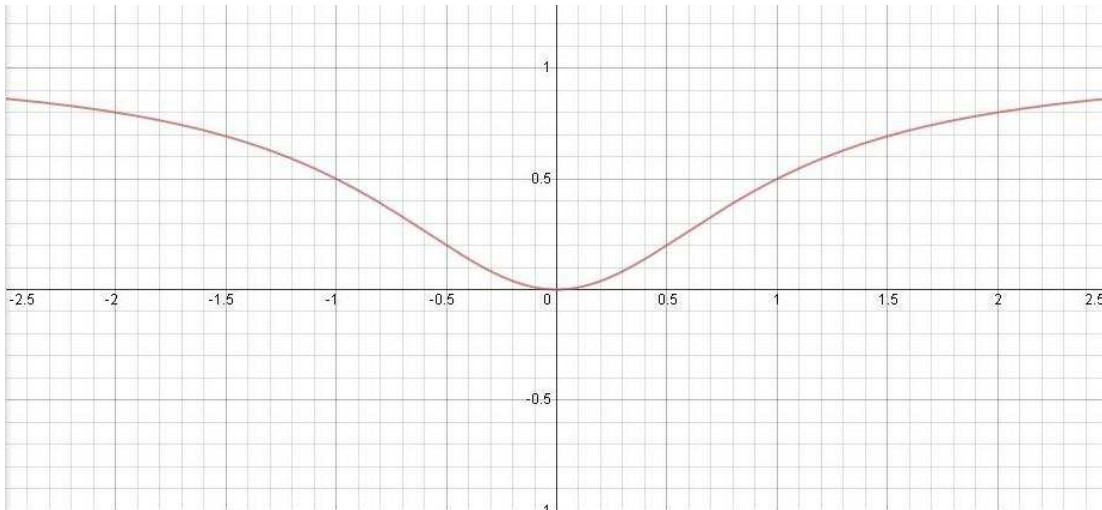
$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

B3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$

B4.



Θέμα Γ

Γ1. $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$ και η εξίσωση γίνεται $e^\omega - \omega - 1 = 0$

Έστω $h(x) = e^x - x - 1$, $x \geq 0$

Προφανής ρίζα το $x = 0$

$h'(x) = e^x - 1 \geq 0 \forall x \in [0, +\infty)$ άρα $h(x) \nearrow$ στο $[0, +\infty)$

Επομένως το $x = 0$ μοναδική ρίζα

Η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ γίνεται $h(x^2) = 0$ άρα $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Γ2. Πρόσημο της $h(x) = e^x - x - 1$, $x \geq 0$

$\forall x \geq 0$ είναι $x \geq 0 \xrightarrow{h} h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq 0$

Είναι $e^{x^2} - x^2 - 1 = h(x^2)$ άρα $h(x^2) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ με το $=$ να ισχύει μόνο όταν $x = 0$

Από την σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$

προκύπτει $f^2(x) \neq 0 \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν μηδενίζεται στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

Η σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ γίνεται

$$[f(x) - (e^{x^2} - x^2 - 1)] \cdot [f(x) + (e^{x^2} - x^2 - 1)] = 0 \quad (*)$$

α) $x \in (0, +\infty)$

- Αν $f(x) > 0$, τότε επειδή $e^{x^2} - x^2 - 1 > 0$ από (*) προκύπτει ότι $f(x) - (e^{x^2} - x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$
- Αν η $f(x) < 0$, τότε επειδή $-(e^{x^2} - x^2 - 1) < 0$ από (*) προκύπτει ότι $f(x) + (e^{x^2} - x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

β) $x \in (-\infty, 0)$

- Αν $f(x) > 0$, τότε από την (*) είναι $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$
- Αν $f(x) < 0$, τότε από την (*) είναι $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

γ) Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$

Από α, β, γ έχουμε :

i) Αν $f(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ και στο $(-\infty, 0)$ τότε $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) Αν $f(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$ και στο $(-\infty, 0)$ τότε $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

iii) Αν $\begin{cases} f(x) > 0 \text{ στο } (0, +\infty) \\ \text{και} \\ f(x) < 0 \text{ στο } (-\infty, 0) \end{cases}$ τότε $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ \text{και} \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x < 0 \end{cases}$

iv) Αν $\begin{cases} f(x) < 0 \text{ στο } (0, +\infty) \\ \text{και} \\ f(x) > 0 \text{ στο } (-\infty, 0) \end{cases}$ τότε $f(x) = \begin{cases} -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x \geq 0 \\ \text{και} \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

Γ3. $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x \cdot (e^{x^2} - 1)$$

Επειδή $e^{x^2} - 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

Για $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ άρα $f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$

Για $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ άρα $f \searrow$ στο $(-\infty, 0]$

$$f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2} = 2 \cdot (e^{x^2} - 1) + 4x^2 \cdot e^{x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα f κυρτή

Γ4. Θεωρούμε $g(x) = f(x+3) - f(x), \quad x \in [0, +\infty)$

$$g'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0 \text{ διότι } \forall x \geq 0 \text{ είναι } x+3 > x \xrightarrow{f' \nearrow [0, +\infty)} f'(x+3) > f'(x)$$

άρα $g(x) \nearrow$ επομένως και $1 - 1$ στο $[0, +\infty)$

$$\text{Η δοθείσα εξίσωση γίνεται } g(|\eta\mu x|) = g(x) \iff_{g \uparrow 1-1} |\eta\mu x| = x \quad (E)$$

Προφανής ρίζα της (E) είναι το $x = 0$

Ως γνωστόν $\forall x \neq 0$ δηλ $\forall x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < |x|$ δηλαδή $|\eta\mu x| < |x|$

άρα κανένας αριθμός $x > 0$ δεν είναι λύση της (E)

Επομένως μοναδική ρίζα το $x = 0$

Θέμα Δ

$$\Delta 1. \text{ Είναι } \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + \int_0^\pi f''(x) \eta\mu x dx = \pi \iff$$

$$\int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + [f'(x) \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \sigma\upsilon\nu x dx = \pi \iff$$

$$\int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + [f'(\pi) \eta\mu\pi - f'(0) \eta\mu 0] - \{ [f(x) \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi - \int_0^\pi f(x) (\sigma\upsilon\nu x)' dx \} = \pi$$

$$\iff \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx + [0 - 0] - [f(\pi) \sigma\upsilon\nu\pi - f(0) \cdot \sigma\upsilon\nu 0] - \int_0^\pi f(x) \eta\mu x dx = \pi \iff$$

$$f(\pi) + f(0) = \pi \quad (1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$$

$$\text{Έστω } h(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \text{ τότε } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1 \\ f(x) = h(x) \cdot \eta\mu x \end{cases}$$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = [h(x) \cdot \eta\mu x] = 1 \cdot \eta\mu 0 = 0$$

$$\text{Επειδή } f \text{ συνεχής είναι } f(0) = 0 \quad (2)$$

$$\stackrel{(1)(2)}{\implies} f(\pi) = \pi$$

$$\bullet \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \left[\frac{f(x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right] = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{Άρα } f'(0) = 1$$

Δ2. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε από Θ. Fermat είναι $f'(x_0) = 0$
 Παραγωγίζοντας την δοσμένη σχέση έχουμε $[e^{f(x)} + x]' = [f(f(x)) + e^x]' \Leftrightarrow$
 $e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x \quad (3)$

Για $x = x_0 \xRightarrow{(3)} e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow$
 $0 + 1 = 0 + e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ άτοπο, διότι $f'(0) = 1$ και όχι $f'(0) = 0$

β) Επειδή f' είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα είναι
 $f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $f'(x)$ παραγωγίσιμη άρα συνεχής και $f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ η $f'(x)$ διατηρεί
 σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$

Επειδή $f'(0) = 1 > 0$ είναι $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ άρα $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$

Δ3. Επειδή η $f \nearrow$ και συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι $f(A) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$

Από υπόθεση είναι $f(A) = (-\infty, +\infty)$

άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Είναι $\left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| = \frac{|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|} \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$

άρα είναι $\left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| \leq \frac{2}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0$

Άρα από κριτ. παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$

Δ4. Έστω $I = \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx$

Θέτουμε $\ln x = u$ τότε $\begin{cases} \bullet x = e^u \\ dx = e^u du \\ \bullet \text{ Για } x = 1 \Rightarrow u = 0 \\ \text{ Για } x = e^\pi \Rightarrow u = \ln e^\pi = \pi \end{cases}$

Άρα $I = \int_0^\pi \frac{f(u)}{e^u} \cdot e^u du = \int_0^\pi f(u) du$,

επειδή $f \nearrow$ στο $[0, \pi)$ είναι $0 \leq u \leq \pi \xrightarrow{f \nearrow} f(0) \leq f(u) \leq f(\pi) \Leftrightarrow 0 \leq f(u) \leq \pi$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \pi$ και $x = 0$

άρα $\int_0^\pi 0 du < \int_0^\pi f(u) du < \int_0^\pi \pi du \Leftrightarrow$

$0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi \cdot [u]_0^\pi \Leftrightarrow$

$0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2$