ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

2ο Θέμα

1565. Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ $(A B = A\Gamma)$ και Α΄Β΄Γ΄ $(A'B' = A'\Gamma')$.

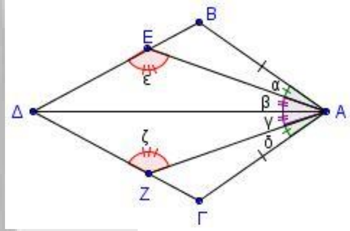
α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $AB = A'B'$ και $A = A'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $B = B'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. (Μονάδες 12)

1582. Στο διπλανό σχήμα είναι $\alpha = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες. (Μονάδες 13)

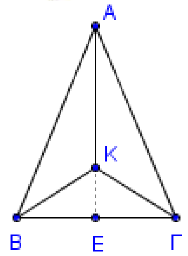


1591. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι: τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ. (Μονάδες 7)

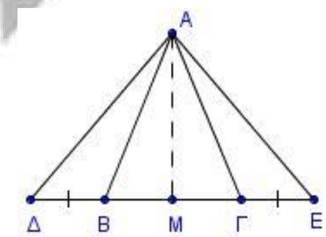


1592. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) $B_{\varepsilon\xi} = \Gamma_{\varepsilon\xi}$ (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 7)



1598. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

ii. $Z\Delta = \dfrac{E\Delta}{2}$. (Μονάδες 6)

1601. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Η ΑΜ είναι διχοτομεί τη γωνία ΒΜΓ. (Μονάδες 13)

1621. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \dfrac{1}{3}AB$ και $AE = \dfrac{1}{3}A\Gamma$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

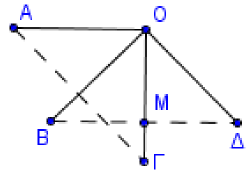
γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

1627. Δίνεται γωνία xΟy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

α) $MA = MB$ (Μονάδες 15)

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ. (Μονάδες 10)

1632. Αν $AOB = BO\Gamma = \Gamma O\Delta$ και $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$, να αποδείξετε ότι:



α) $A\Gamma = B\Delta$ (Μονάδες 10)

β) το Μ είναι μέσο του ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ. (Μονάδες 15)

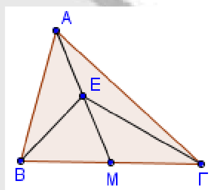
1648. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $A\Delta = AE$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$ (Μονάδες 6)

β) $B\Delta = \Gamma E$ (Μονάδες 10)

γ) $\Delta B\Gamma = E\Gamma B$ (Μονάδες 9)

1660. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν $B\Gamma = 2BE$, να αποδείξετε ότι:



α) $AEB = EM\Gamma$ (Μονάδες 12)

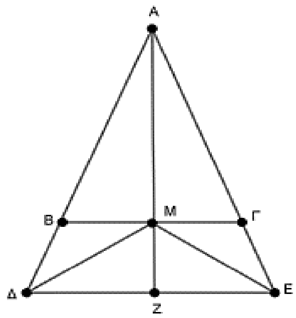
β) $AB = E\Gamma$. (Μονάδες 13)

12635. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ προς τα Β,Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ώστε ΒΔ=ΓΕ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ. (Μονάδες 10)

12636. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα ώστε ΒΔ=ΓΕ.

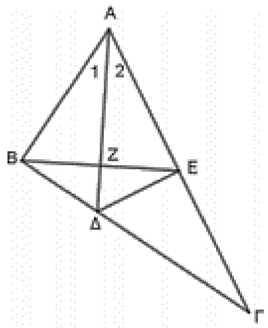


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ. (Μονάδες 6)

γ) Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ. (Μονάδες 7)

12705.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε ΑΓ = 2ΑΒ. Η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει την διάμεσο ΒΕ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

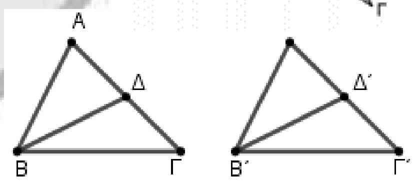


α) $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 7)

β) ΔΒ = ΔΕ. (Μονάδες 8)

γ) $AZ \perp BE$ (Μονάδες 10)

13518.Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος με ΑΓ = Α΄Γ΄ και ΑΒ = Α΄Β΄. Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β΄Δ΄ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:



α) $A = A'$ (Μονάδες 15)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

13826. Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ του σχήματος έχουν

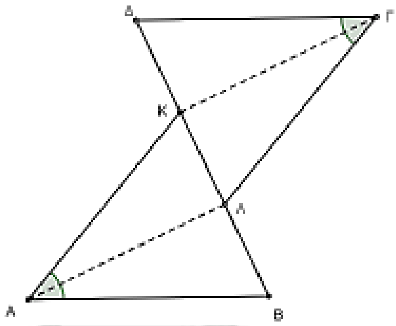
$AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα και ότι έχουν ΒΚ = ΔΛ. (Μονάδες 12)

β) Έστω ότι Λ και Κ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΔΛ αντίστοιχα:

i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα ΒΛ, ΛΚ και ΚΔ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ. (Μονάδες 8)



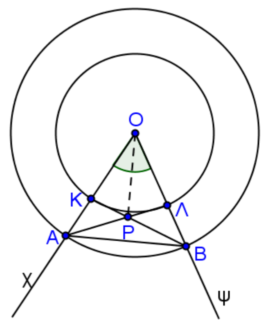
4ο Θέμα

1725. Δίνεται οξεία γωνία xΟψ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O,ρ_1) και (O,ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οx στα σημεία Κ,Α και την Οψ στα Λ,Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Lambda = BK$ (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ,ΒΚ. (Μονάδες 8)

γ) Η ΟΡ διχοτομεί τη γωνία $xO\psi$. (Μονάδες 9)



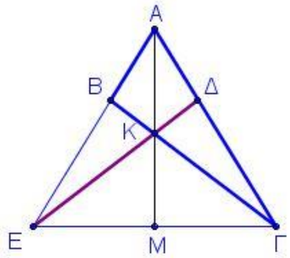
1846. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$.
Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = \Delta E$ (Μονάδες 6)

β) $BK = K\Delta$ (Μονάδες 7)

γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. (Μονάδες 6)

δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ. (Μονάδες 6)

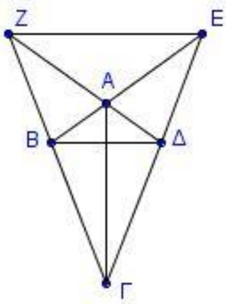


14880. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν Ε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ, να αποδείξετε ότι:

α) Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ. (Μονάδες 7)

β) $\Gamma Z = \Gamma E$. (Μονάδες 9)

γ) $EZ \parallel B\Delta$.



3ο Θέμα

12069. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) παίρνουμε στην πλευρά ΑΒ σημείο Δ, ώστε ΔΒ = 2ΑΔ, και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε, ώστε ΕΓ= 2ΑΕ. Το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Αν Ρ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΕ και ΓΔ να δείξετε ότι:

i. Οι γωνίες ΓBE και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσες. (Μονάδες 6)

ii. Το τμήμα ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $BP\Gamma$. (Μονάδες 7)

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

2ο Θέμα

1532. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $ΕΗ \perp ΒΓ$ και $ΔΖ \perp ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
β) $ΕΗ = ΔΖ$ (Μονάδες 12)

1545. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 15)
β) $ΑΔ = ΑΕ$ (Μονάδες 10)

1546. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΜΚ = ΜΛ$ (Μονάδες 13)
β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ. (Μονάδες 12)

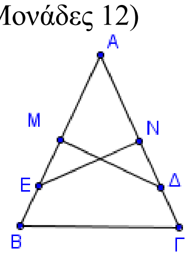
1547. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$.Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ φέρουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΜΔ = ΜΕ$ (Μονάδες 12)
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

1568. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$. (Μονάδες 13)

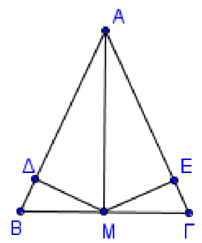
1569. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ. (Μονάδες 13)

1571. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^\circ\right)$ και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α). Να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΒ = ΒΕ$ (Μονάδες 13)
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

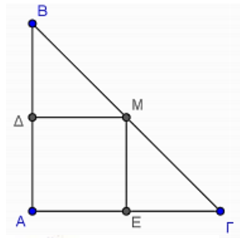
1656. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν $ΜΔ = ΝΕ$ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
β) Αν $ΑΒ = ΑΓ$ τότε $ΜΔ = ΝΕ$. (Μονάδες 13)



1657. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Αν $ΜΔ = ΜΕ$, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
β) Αν $ΑΒ = ΑΓ$ και Μ το μέσο του ΒΓ, τότε $ΜΔ = ΜΕ$. (Μονάδες 12)



1658. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



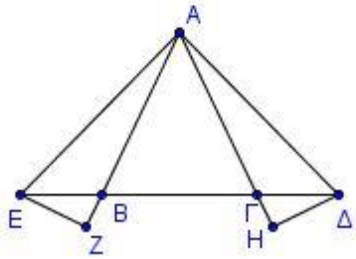
α) Αν ΜΔ = ΜΕ τότε:

i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 8)

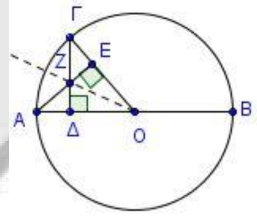
1659. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $ΓΔ = ΒΕ$. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΑΔ = ΑΕ$ (Μονάδες 12)

β) $ΕΖ = ΔΗ$ (Μονάδες 13)

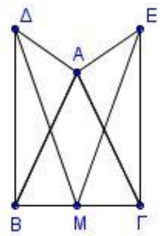
1677. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ. (Μονάδες 12)

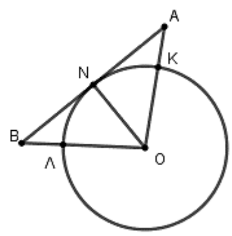
1698. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ τα τμήματα $ΒΔ \perp ΒΓ$ και $ΓΕ \perp ΒΓ$ τέτοια, ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) $ΑΔ = ΑΕ$. (Μονάδες 13)

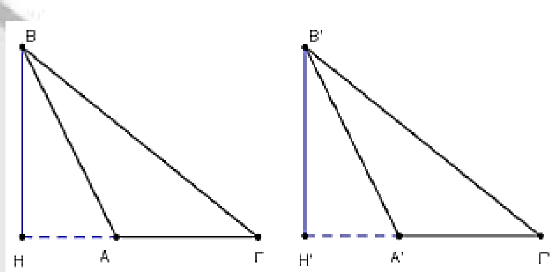
1676. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε ΝΑ=ΝΒ. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ. (Μονάδες 12)

12149. Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ $\left(Α = 90^\circ\right)$ και Α΄Β΄Γ΄ $\left(Α' = 90^\circ\right)$ με $γ = γ'$ και $β = β'$. Αν τα ύψη ΒΗ και Β΄Η΄ των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

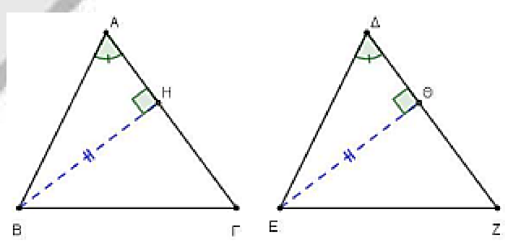


α) $ΒΑΗ = Β'Α'Η'$. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

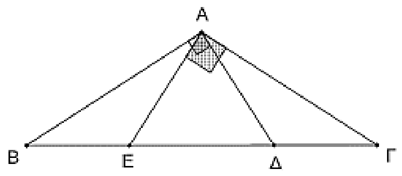
13517. Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $Α = Δ$, $ΑΒΓ = ΔΕΖ$. Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:



α) ΑΒ = ΔΕ. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

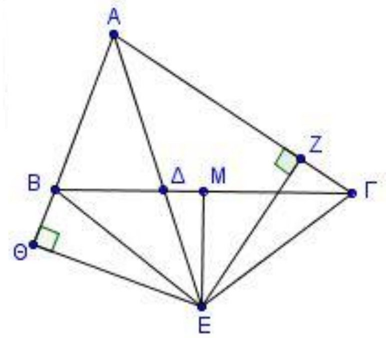
13533. Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και η κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
γ) ΒΕ = ΓΔ. (Μονάδες 8)

4ο Θέμα

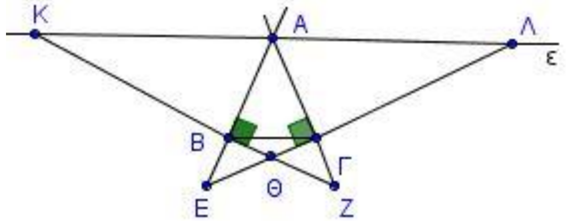
1707. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ,Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ,ΑΓ, να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)
β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
γ) $\text{ΑΓΕ} + \text{ΑΒΕ} = 180^\circ$. (Μονάδες 12)

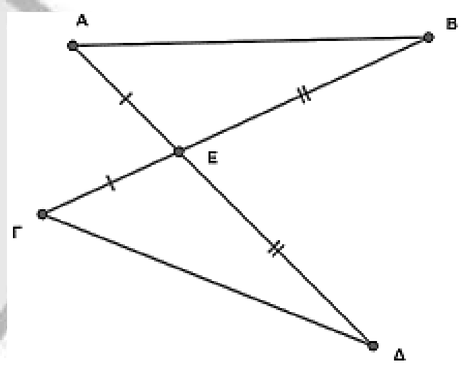
1724. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:
Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$, τότε τα ύψη ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.
α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει. (Μονάδες 10)
γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

1875. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στη πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στη πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. $\text{ΑΖ} = \text{ΑΕ}$ (Μονάδες 8)
ii. $\text{ΑΚ} = \text{ΑΛ}$ (Μονάδες 9)
β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ,ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

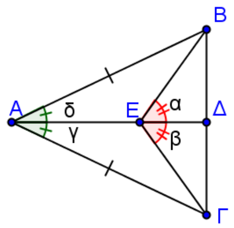
13839. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΓΕ και ΒΕ=ΕΔ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ΕΗ και ΕΘ του σημείου Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, είναι ίσες. (Μονάδες 5)
γ) Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ προς τα Α και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

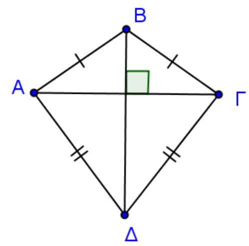
1587. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ του σχήματος ισχύουν $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ και $\widehat{\gamma} = \widehat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 9)



1624. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)
β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 13)



1558.Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.Να αποδείξετε ότι:

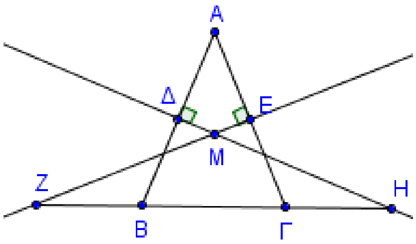
α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
β) Οι γωνίες $A\hat{I}B$ και $A\hat{I}\Gamma$ είναι ίσες. (Μονάδες 10)
γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 7)

1574. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
β) Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ. (Μονάδες 12)

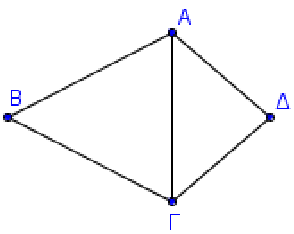
1578. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$.Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ. (Μονάδες 15)
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



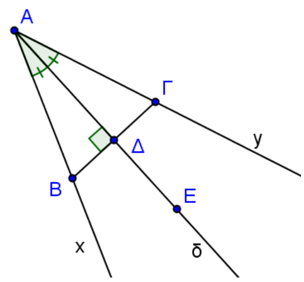
1585. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ = ΒΓ και $A = \Gamma$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΑΓ = ΒΓΑ$ (Μονάδες 8)
β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

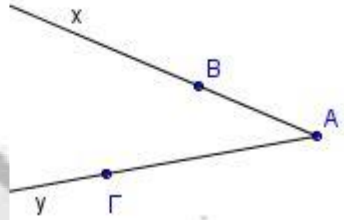


1670. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Aδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Aδ στο Δ και την Ay στο Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΒ = ΑΓ$ (Μονάδες 12)
β) Το τυχαίο σημείο Ε της Aδ ισαπέχει από τα Β και Γ. (Μονάδες 13)



1688. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αχ και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.



Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. (Μονάδες 9)

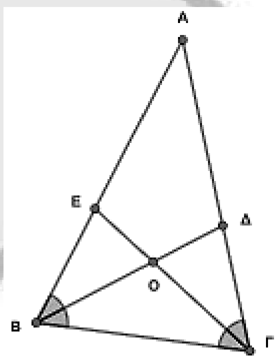
β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 9)

γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση. (Μονάδες 7)

4ο Θέμα

13854. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο.



α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ.

(Μονάδες 9)

β) Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: ΔΚ=ΕΛ.

(Μονάδες 9)

γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

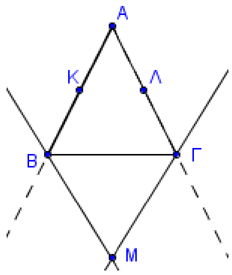
2ο Θέμα

1540. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^{\circ}\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{\Delta E}$ (Μονάδες 13)

β) $\mathrm{A\Delta}<\mathrm{\Delta B}$ (Μονάδες 12)

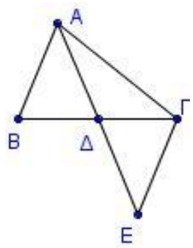
1553. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ,Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) $\mathrm{MK}=\mathrm{M\Lambda}$ (Μονάδες 13)

1573. Στο διπλανό σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε $\mathrm{\Delta E}=\mathrm{A\Delta}$.

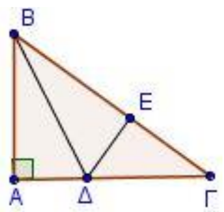


Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{AB}=\mathrm{\Gamma E}$ (Μονάδες 12)

β) $\mathrm{A\Delta}<\dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}}{2}$ (Μονάδες 13)

1646. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:

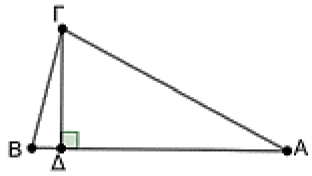


α) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{\Delta E}$ (Μονάδες 8)

β) $\mathrm{A\Delta}<\mathrm{\Delta\Gamma}$ (Μονάδες 9)

γ) $\mathrm{A\Gamma}>\mathrm{AB}$ (Μονάδες 8)

13844.Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι ΒΔ < ΑΔ, ΑΒ = ΑΓ και $\widehat{ΑΔΓ} = 90^\circ$.



α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ > ΒΓ.
(Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

4ο Θέμα

1749. Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ε, τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην ε. Έστω $Α'$ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.

α) Αν η $ΒΑ'$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία $\widehat{ΑΟΑ'}$. (Μονάδες 6)

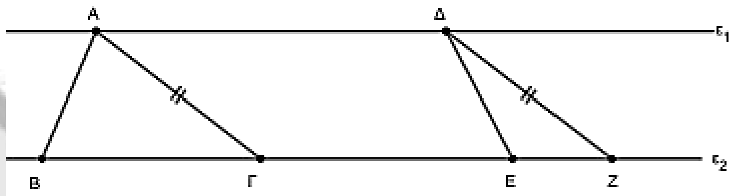
ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε. (Μονάδες 6)

β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι:

i. $ΚΑ = ΚΑ'$ (Μονάδες 6)

ii. $ΚΑ + ΚΒ > ΑΟ + ΟΒ$ (Μονάδες 7)

13751.Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔΕΖ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{Ε} > 90^\circ$.Ισχύει επίσης ότι ΑΓ = ΔΖ.



α) i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές Α και Δ ονομάζοντας τα ΑΗ και ΔΘ αντίστοιχα. (Μονάδες 05)

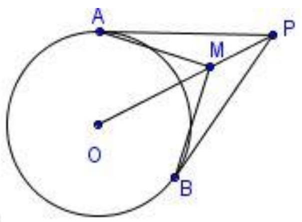
ii. Να αποδείξετε ότι ΗΓ = ΘΖ. (Μονάδες 12)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί ΕΖ < ΒΓ. (Μονάδες 08)

Σχετική θέση ευθείας - κύκλου

2ο Θέμα

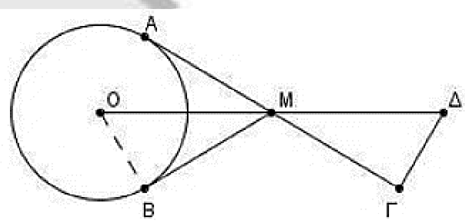
1617. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) $\widehat{ΜΑΟ} = \widehat{ΜΒΟ}$. (Μονάδες 13)

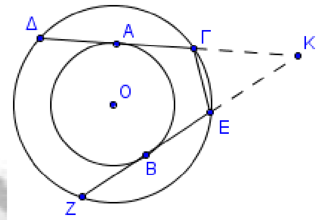
1620. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Ο,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ=ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΟΜ.



α) Να αποδείξετε ότι ΜΒ = ΜΓ. (Μονάδες 10)

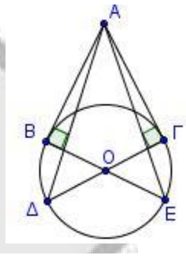
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

1667. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο,R) εφάπτονται στον κύκλο (0,ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.



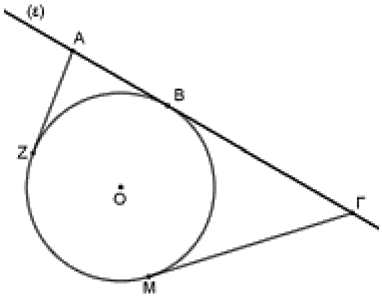
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = \text{ZE}$ (Μονάδες 12)
β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

1684. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

13817. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Β του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία Α και Γ εκατέρωθεν του Β έτσι ώστε ΒΑ < ΒΓ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΖ και ΓΜ στον κύκλο.

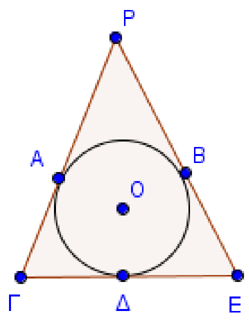


α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 15)
β) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = ΑΖ + ΜΓ. (Μονάδες 10)

13759. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 6. Έστω d η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:
α) d = 3. (Μονάδες 9)
β) d = 6. (Μονάδες 8)
γ) d = 9. (Μονάδες 8)

4ο Θέμα

1751. Έστω ότι ο κύκλος (O,ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α,Δ και Β.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. $\text{Ρ}\Gamma = \Gamma\Delta + \text{ΑΡ}$ (Μονάδες 6)
ii. $\text{Ρ}\Gamma - \Gamma\Delta = \text{ΡΕ} - \Delta\text{Ε}$ (Μονάδες 8)
β) Αν $\text{Α}\Gamma = \text{ΒΕ}$, να αποδείξετε ότι
i. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
ii. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)

1752. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ . Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
β) ΓΑ= ΔΒ. (Μονάδες 8)
γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με ΡΑ+ ΡΒ. (Μονάδες 7)

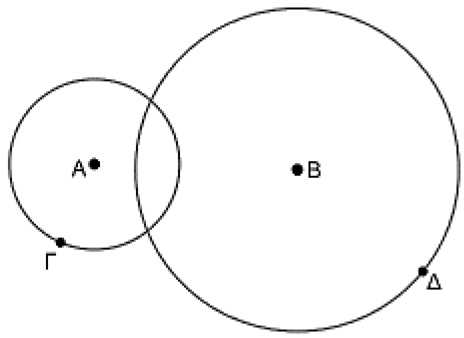
Σχετική θέση δύο κύκλων

2ο Θέμα

12417. Έστω δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R=3, r=2 και ΚΛ=4. Να αποδείξετε ότι:
α) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω Α και Β. (Μονάδες 15)
β) $K\hat{A}\Lambda > A\hat{\Lambda}K$ (Μονάδες 10)

13757. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,2) και (Λ,5).
α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 6)
β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. (Μονάδες 6)
γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος (Κ,2) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
δ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

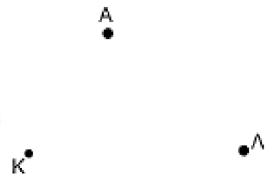
13836.α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει ρ < R.



Να αποδείξετε ότι $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$. (Μονάδες 10)
β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 5 από το Β του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός; (Μονάδες 15)

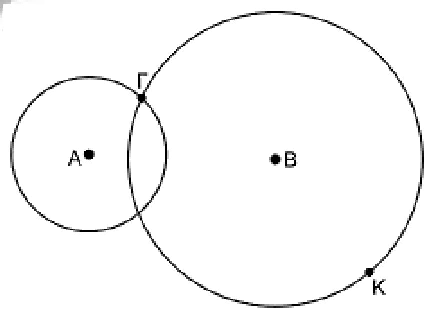
13758. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,3) και (Λ,8). Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:
α) ΚΛ = 13. (Μονάδες 5) **β)** ΚΛ = 2. (Μονάδες 5) **γ)** ΚΛ = 5. (Μονάδες 5)
δ) ΚΛ = 11. (Μονάδες 5) **ε)** ΚΛ = 9. (Μονάδες 5)

13835. Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.
α) Να αποδείξετε ότι 1< ΚΛ < 9. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ. (Μονάδες 13)



4ο Θέμα

13823.α) Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει ρ < R και ΑΒ = 6.
i. Να αποδείξετε ότι $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.
ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα Κ και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;
Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το Β.»
Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το Α.»
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 16)

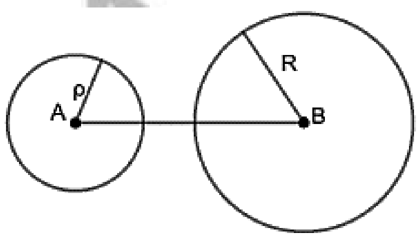


β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό; (Μονάδες 9)

13846. Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) με R > ρ. Επίσης AB = 9.

α) Να αποδείξετε ότι R + ρ < 9. (Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9. (Μονάδες 10)



γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 που περιγράφονται παρακάτω;

Ι1: «Η απόσταση των σημείων από το Κ είναι ίση με ρ».

Ι2: «Η απόσταση των σημείων από το Μ είναι ίση με R».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

3ο Θέμα

13702. Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 12)

β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ εφάπτεται στη διάκεντρο ΚΛ των κύκλων (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2). (Μονάδες 13)

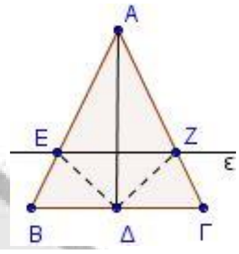
Παραλληλία

2ο Θέμα

1544. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



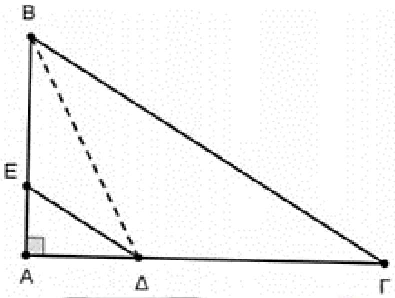
1594. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($A = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο, ώστε η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας ΑΔΒ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $E\Delta B = \Delta B\Gamma$ και $E\Delta A = \hat{\Gamma}$. (Μονάδες 4 + 4)

ii) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Αν $A\Delta B = 60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία Γ. (Μονάδες 9)



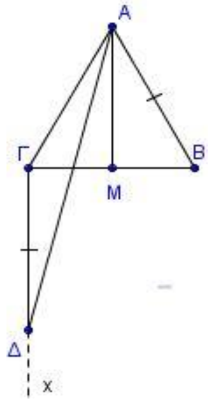
1595. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΑΓ είναι ίση με τη $\Gamma\Delta A$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) ΓΔ//ΑΜ (Μονάδες 6)

ii) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ. (Μονάδες 7)



1597. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

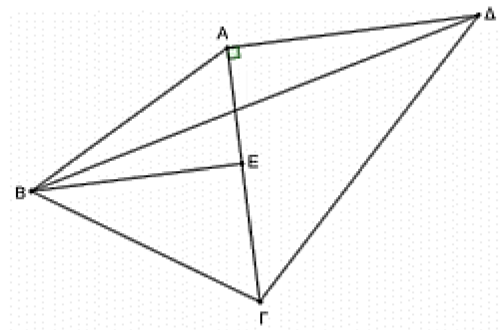
β) $\Delta E \parallel B\Gamma$ (Μονάδες 13)

12710.Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΒΕ. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με υποτείνουσα τη ΓΔ έτσι, ώστε τα σημεία Β και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ // ΑΔ. (Μονάδες 10)

β) οι γωνίες ΕΒΔ και ΑΔΒ είναι ίσες. (Μονάδες 7)

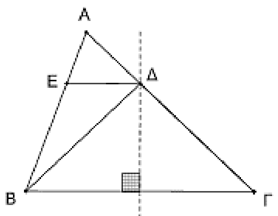
γ) το τρίγωνο ΒΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)



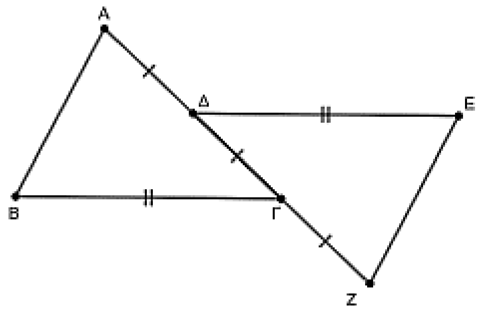
13534.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$. (Μονάδες 13)



13748. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΓΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

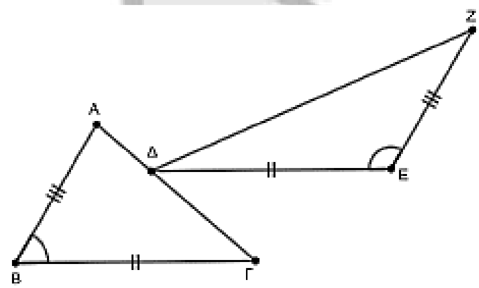


α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) ΑΒ // ΕΖ. (Μονάδες 15)

13752. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $B<90^{\circ}$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΒΓ και από το σημείο Ε φέρουμε τμήμα ΕΗ ίσο και παράλληλο με την πλευρά ΑΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.



1. Οι γωνίες ΔEZ και $AB\Gamma$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
2. Οπότε $\Delta EZ = AB\Gamma$.
3. Τα τρίγωνα ΔΕΗ και ΑΒΓ είναι ίσα.
4. Το τμήμα ΔΗ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ. (Μονάδες 08)

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3. (Μονάδες 10)

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $B<90^{\circ}$, να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΓ και ΔΗ για τα διάφορα είδη της γωνίας B και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 07)

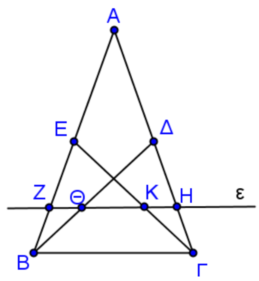
4ο Θέμα

1744. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ = \Gamma H$ (Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) $ZK = H\Theta$. (Μονάδες 8)

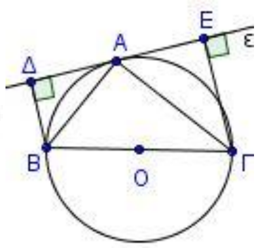


1809. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, με διάμετρο ΒΓ. Από σημείο Α του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ε) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στην ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι οι ΒΑ και ΓΑ είναι διχοτόμοι των γωνιών ΔΒΓ και ΕΓΒ. (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΖ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι: $A\Delta = AE = AZ$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta + \Gamma E = B\Gamma$. (Μονάδες 9)



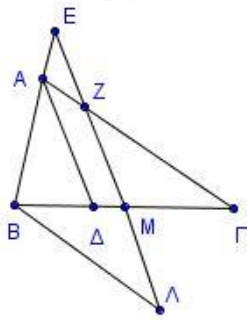
1818. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία ε παράλληλη από το Β προς την ΑΓ.

Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

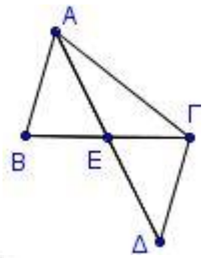
α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) $B\Lambda = \Gamma Z$. (Μονάδες 9)

γ) $AE = A\Gamma - B\Lambda$. (Μονάδες 8)



1890. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α,Β,Γ,Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωρίο Ε ισαπέχει από τα χωριά Β,Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.



α) Να αποδείξετε ότι:

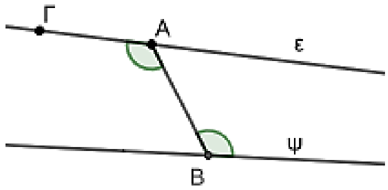
i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. (Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από το δρόμο ΑΔ. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)

13822. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).



α) Αν η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από την $A\hat{B}\psi$:

i. Να αποδείξετε ότι $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^\circ$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί; (Μονάδες 6)

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών. (Μονάδες 7)

γ) Αν ισχύει $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί; (Μονάδες 6)

13843. Έστω ότι οι ευθείες x΄x και y΄y εφάπτονται στον κύκλο (Ο,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες x΄x και y΄y είναι παράλληλες. (Μονάδες 4)

β) οι διχοτόμοι των γωνιών ΒΑx και ΑΒy τέμνονται σε σημείο Μ. (Μονάδες 6)

γ) το σημείο Μ είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ. (Μονάδες 10)

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας ΒΑx τέμνει την y΄y στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ΑΒy τέμνει την x΄x στο σημείο Δ, τότε ΜΓ = ΜΔ. (Μονάδες 5)

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

2ο Θέμα

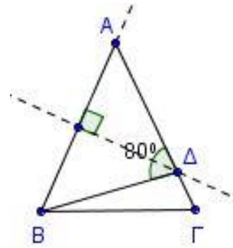
1541. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = AB$ (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 13)

1552. Ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία xΟψ. Στη συνέχεια με κέντρο τη κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx και Οψ της γωνίας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ,Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε; (Μονάδες 25)

1554. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 2A\hat{B}\Gamma$ Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ και σχηματίζεται γωνία ΑΔΒ ίση με 80° .



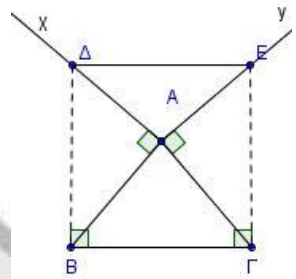
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

1556. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αx και Αy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με 80°, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ. (Μονάδες 13)



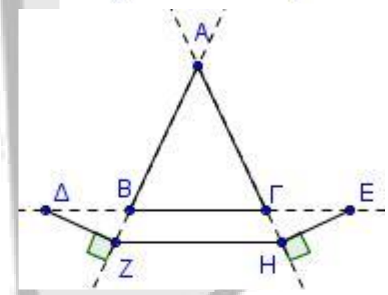
1572. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Έστω $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ = \Gamma H$. (Μονάδες 10)

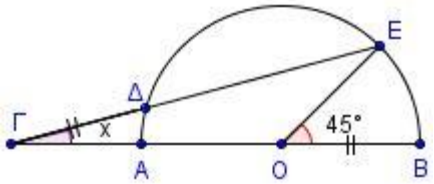
ii. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Αν $A = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ. (Μονάδες 8)



1576. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ ισούται με το ΟΒ και $BOE = 45^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\Gamma O = x$.

(Μονάδες 25)

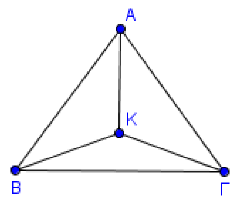


1593. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ με $A = 80^\circ$. Έστω Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, τέτοιο, ώστε $KB = KA = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΒΚ και ΑΓΚ. (Μονάδες 8)

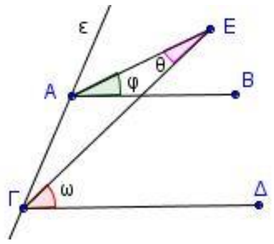
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΚΓ. (Μονάδες 7)



1590. Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε. Να αποδείξετε ότι:

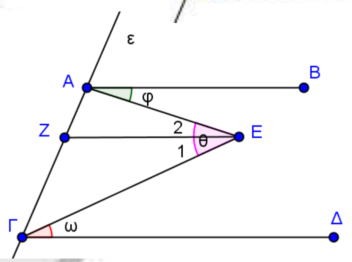
α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ, τότε:

$\omega = \varphi + \hat{\theta}$. (Μονάδες 10)



β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \varphi + \omega$.

(Μονάδες 15)



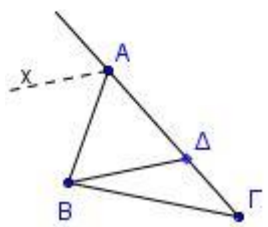
1596. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Έστω Αχ η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $A_{\varepsilon\xi} = 120^\circ$. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αx, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AB\Delta = 60^\circ$ (Μονάδες 5)

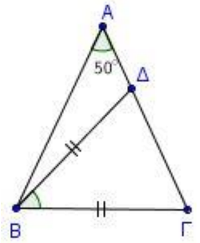
ii. το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 5)

iii. $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$ (Μονάδες 5)



β) Αν η γωνία ΒΔΑ είναι διπλάσια της Γ του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ. (Μονάδες 10)

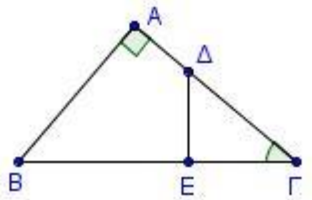
1602. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $Α = 50^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΒΓ$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $ΔΒΓ = Α$. (Μονάδες 13)

1603. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(Α = 90^\circ\right)$ με $Γ = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και $ΔΕ \perp ΒΓ$.



Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ. (Μονάδες 10)

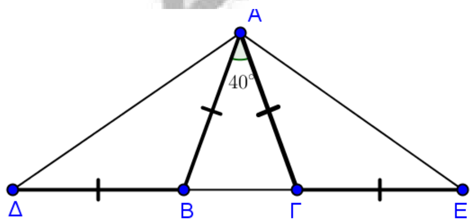
β) τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΔΕΒ. (Μονάδες 15)

1604. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $Α = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΑΒ$. Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

β) τη γωνία $ΔΑΓ$. (Μονάδες 15)

1607. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $ΔΒ = ΒΑ = ΑΓ = ΓΕ$ και $ΒΑΓ = 40^\circ$. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΑΒΔ = ΑΓΕ = 110^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

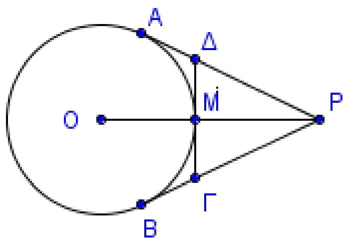
γ) Το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

1623. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $Α = 80^\circ$, $Β = 20^\circ + Γ$ και έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ. (Μονάδες 12)

β) Φέρνουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΔΕ και ΕΔΓ. (Μονάδες 13)

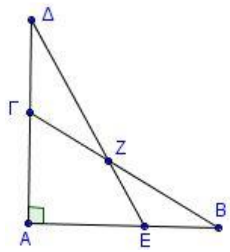
1636. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Αν $ΑΡΒ = 40^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ. (Μονάδες 12)

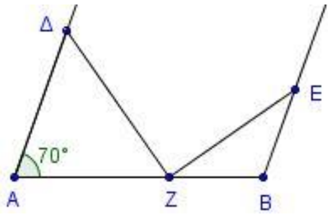
1639. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $Β = Δ = 30^\circ$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΕΖΓ. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)

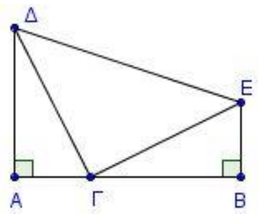
1640. Στο διπλανό σχήμα, οι ΑΔ, ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $ΑΔ = ΑΖ$, $ΒΕ = ΒΖ$ και $Α = 70^\circ$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $ΔΖΕ = 90^\circ$. (Μονάδες 9)

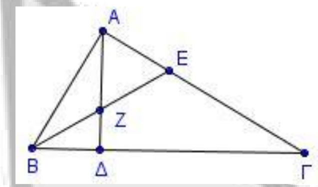
1641. Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες Α,Β είναι ορθές και επιπλέον $ΑΔ = ΒΓ$ και $ΑΓ = ΒΕ$. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν $ΕΓΒ = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 12)

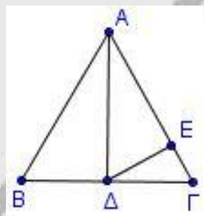
1645. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $Α + Γ = 2Β$ και $Α = 3Γ$.



α) Να αποδείξετε ότι $Β = 60^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος ΑΔ και η διχοτόμος ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 15)

1661. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια, ώστε $ΒΑΔ = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο, ώστε $ΑΔ = ΑΕ$.

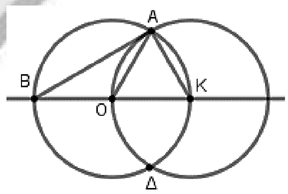


α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ. (Μονάδες 8)

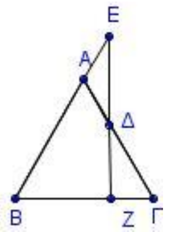
1673. Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,ρ) με ΟΚ=ρ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Δ.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΚ. (Μονάδες 15)

1689. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε $ΑΕ = ΑΔ$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ. (Μονάδες 15)

1693. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(Α = 90^\circ\right)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

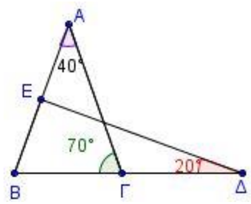
γ) Αν η γωνία Β είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία Γ, να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ. (Μονάδες 7)

1699. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Αν $Α = 75^\circ + Β$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

1700. Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι:

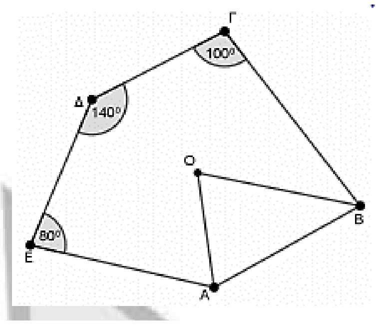


α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή. (Μονάδες 13)

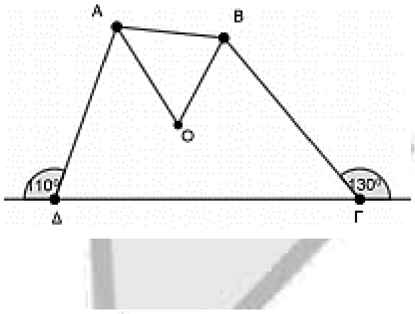
12640. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100^o , η γωνία του Δ ισούται με 140^o και η γωνία του Ε ισούται με 80^o τότε, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του αθροίσματος $A+B$. (Μονάδες 12)
β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 13)



12644. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130^o και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110^o . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

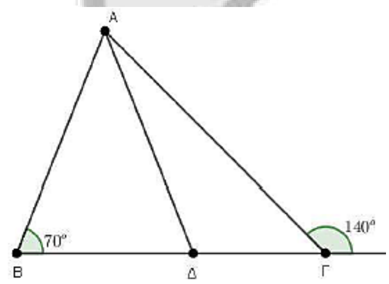
α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου. (Μονάδες 9)
β) το μέτρο του αθροίσματος $A+B$. (Μονάδες 9)
γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 7)



12704.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B=70^\circ$ και $\Gamma_{\varepsilon\xi\omega\tau}=140^\circ$.
Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε ΑΔ = ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:

α) $B A \Delta=40^\circ$.
(Μονάδες 9)

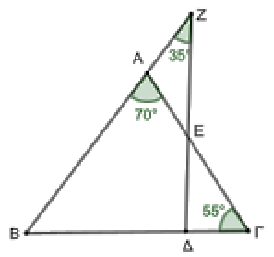
β) $A\Delta\Gamma=110^\circ$.
(Μονάδες 7)



γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

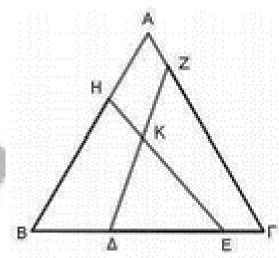
12707.Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $A=70°$ και Γ =55°. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το σημείο Α και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Ζ ώστε $BZ\Delta=35°$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ.
Η ΖΔ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
β) $Z\Delta B=90°$. (Μονάδες 8)
γ) το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



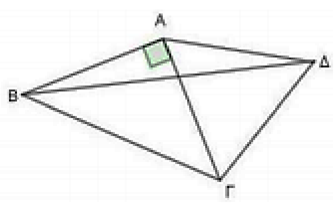
12708.Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΑ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε ΒΕ = ΓΖ. Στις πλευρές ΑΒ και ΓΒ θεωρούμε σημεία Η και Δ αντίστοιχα ώστε ΒΗ = ΓΔ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ τέμνονται στο σημείο Κ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΗ = ΔΖ και $BHE=\Gamma\Delta Z$. (Μονάδες 12)
β) τα τρίγωνα ΒΕΗ και ΚΕΔ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία. (Μονάδες 13)

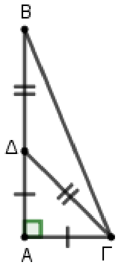


12709.Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $A=90^\circ$.Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ.
(Μονάδες 5)
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΒΔ. (Μονάδες 12)



13442.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$. Στην πλευρά του ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ ώστε
ΒΔ = ΔΓ και ΑΔ = ΑΓ.



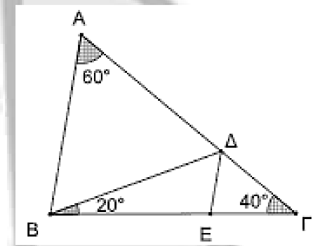
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔΓ = 45^\circ$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $Β$.

(Μονάδες 13)

13443.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 60^\circ$ και $Γ = 40^\circ$.Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ, ώστε $ΓΒΔ = 20^\circ$.



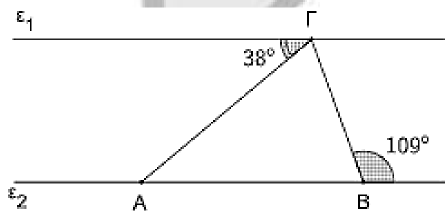
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΔΕ = 60^\circ$. (Μονάδες 8)

ii. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΒΔΓ$. (Μονάδες 7)

13535.Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία $ε_1$ διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλη στην ευθεία $ε_2$ που ορίζεται από τις κορυφές του Α και Β. Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:



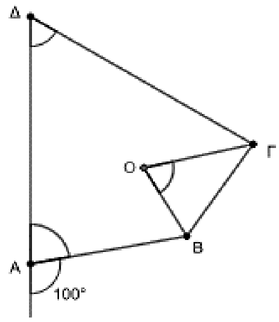
α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 15)

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

(Μονάδες 10)

13619.Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με $A_{εξ} = 100^\circ$ και $Β + Γ = 220^\circ$.



Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $Β$ και $Γ$ τέμνονται στο Ο, τότε:

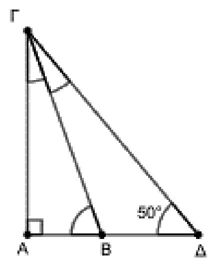
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $Α$ και $Δ$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $ΒΟΓ = 70^\circ$.

(Μονάδες 15)

13654.Στο ακόλουθο σχήμα είναι $A = 90^\circ$, $ΑΒΓ - ΑΓΒ = 50^\circ$ και $ΑΔΓ = 50^\circ$.



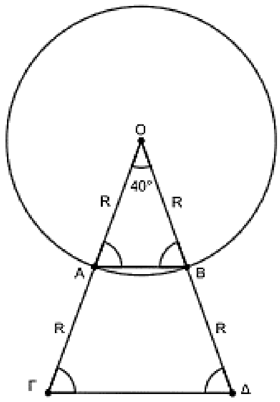
α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $ΑΒΓ$ και $ΑΓΒ$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΑΓΔ$.

(Μονάδες 15)

13687.Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $ΑΟΒ = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΓ = ΟΑ και ΒΔ = ΟΒ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι $ΟΑΒ = ΟΒΑ = 70^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $ΟΓΔ$ και $ΟΔΓ$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΓΔ.

(Μονάδες 5)

13741.Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^{\circ}$ και $\hat{\gamma} = 120^{\circ}$, να υπολογίσετε :

α) Τη γωνία $\hat{\beta}$.

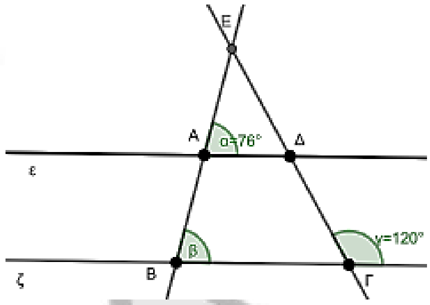
(Μονάδες 5)

β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ .

(Μονάδες 12)

γ) Τη γωνία Ε του τριγώνου ΕΑΔ.

(Μονάδες 8)

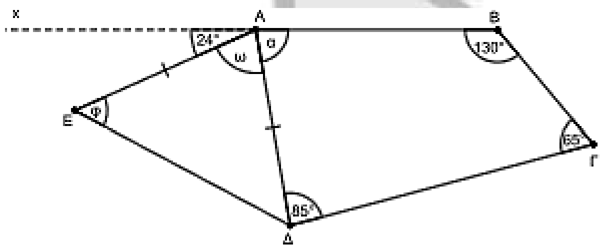


13749.Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αx είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α. Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$. (Μονάδες 08)

β) Τη γωνία $\hat{\omega}$. (Μονάδες 08)

γ) Τη γωνία $\hat{\varphi}$. (Μονάδες 09)



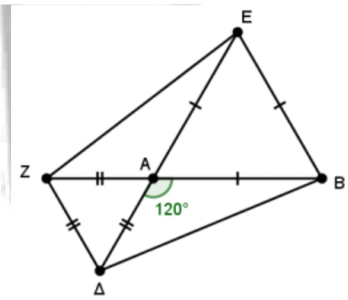
14884. Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\mathbf{A = 120^{\circ}}$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β)Το τμήμα ΔΖ είναι παράλληλο στο ΒΕ.

(Μονάδες 12)



4ο Θέμα

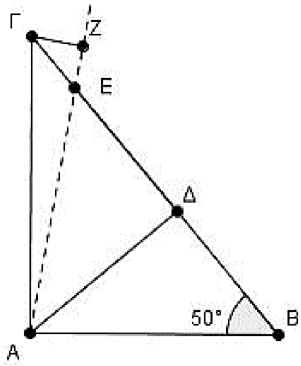
1708. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ$\left(A = 90^{\circ}\right)$ με $B = 50^{\circ}$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε $ΔΕ = ΒΔ$. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

ii. $ΓΑΕ = 10^{\circ}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ. (Μονάδες 9)

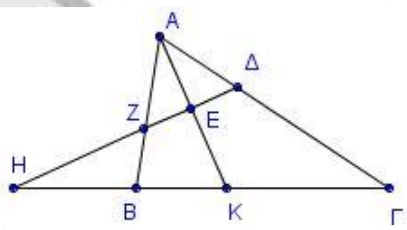


1792. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΖΔΓ = 90^{\circ} + \frac{A}{2}$ (Μονάδες 7)

β) $ΖΚ = ΚΔ$ (Μονάδες 8)

γ) $ΖΗΓ = \frac{B - Γ}{2}$ (Μονάδες 10)

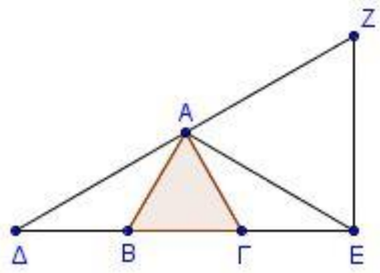


1819. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΒΓ$, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΓΕ = ΒΓ$. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. (Μονάδες 12)

γ) Να αποδείξετε ότι $ΑΒ \parallel ΓΖ$. (Μονάδες 5)



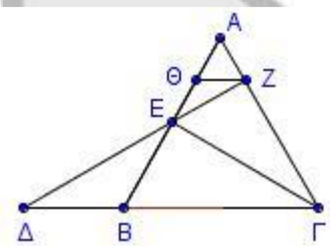
1828. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΒΔ = \frac{ΒΓ}{2}$. Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και $ΖΘ \parallel ΒΓ$:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = 2ΘΖ$. (Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι $3ΑΒ = 4ΘΒ$. (Μονάδες 5)

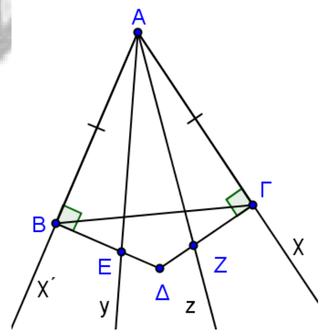


1849. Στις πλευρές Αx΄ και Αx γωνίας x΄Αx θεωρούμε σημεία Β και Γ ώστε $ΑΒ = ΑΓ$. Οι κάθετες στις Αx΄ και Αx στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ. Αν οι ημιευθείες Αy και Αz χωρίζουν τη γωνία x΄Αx σε τρείς ίσες γωνίες και τέμνουν τις ΒΔ και ΔΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας x΄Αx. (Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες ΓΒΔ και ΓΑΔ είναι ίσες. (Μονάδες 9)

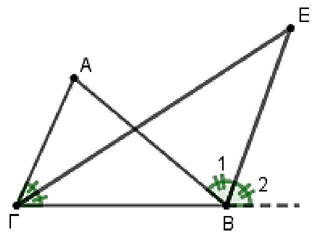


1851. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η προέκταση της διχοτόμου της γωνίας Γ και της εξωτερικής γωνίας του Β τέμνονται στο Ε.

Δίνεται ότι $ΑΒΕ = 70^\circ = 2ΓΕΒ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 13)



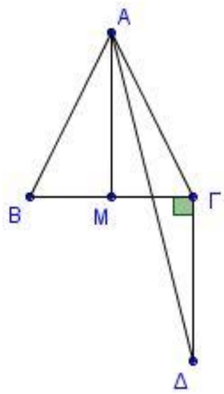
1888. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρνουμε $ΓΔ \perp ΒΓ$ με $ΓΔ = ΑΒ$ (Α,Δ εκατέρωθεν της ΒΓ). Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΜ \parallel ΓΔ$ (Μονάδες 6)

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ. (Μονάδες 7)

γ) $ΔΑΓ = 45^\circ - \frac{Β}{2}$ (Μονάδες 7)

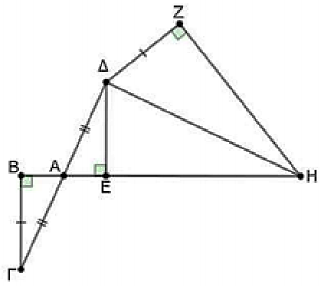
δ) $ΑΔ < 2ΑΒ$ (Μονάδες 5)



13499. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(Α = 90^\circ\right)$ με ΑΒ < ΑΓ και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε ΔΒ = ΑΒ και ΓΕ = ΓΑ. Αν ΔΖ και ΕΘ είναι οι αποστάσεις των Δ και Ε από τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

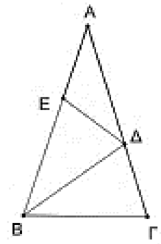
α) $\Gamma A\Delta = \Delta AH$ και $EAB = HAE$. (Μονάδες 14)
β) ΔΕ = ΔΖ + ΕΘ. (Μονάδες 11)

11882. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ και ΔΖΗ είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $AB\Gamma$, $AE\Delta$ και ΔZH, αντίστοιχα. Επίσης ΑΓ = ΑΔ και ΒΓ = ΔΖ. Να αποδείξετε ότι:



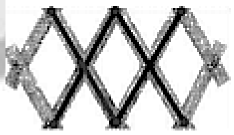
α) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
β) Η ΔΗ είναι διχοτόμος της γωνίας EHZ. (Μονάδες 6)
γ) Αν, επιπλέον, οι ΑΔ και ΔΗ είναι κάθετες, τότε $A\Delta E = \dfrac{EHZ}{2}$. (Μονάδες 9)

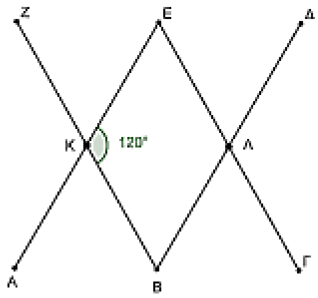
13537. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ , σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, ώστε ΑΔ = ΒΔ = ΒΓ και σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, ώστε ΑΕ = ΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι:
  i. $\Gamma = 2A$ (Μονάδες 6)
  ii. $A = 36^\circ$ (Μονάδες 6)
  iii. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
β) Στην προέκταση της ΔΕ προς το Ε θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε ΔΖ = ΑΓ.
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

13697. Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΒΔ και ΓΕ αναπαριστάνουν τέσσερεις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.

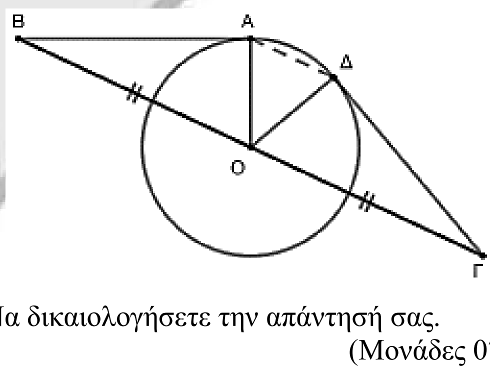




Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΕ // ΒΔ και ΒΖ // ΓΕ, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή Κ κοινό μέσο των ΑΕ, ΒΖ και Λ κοινό μέσο των ΒΔ, ΓΕ. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι ΑΕ και ΒΖ με κορυφή το κοινό τους μέσο Κ, η γωνία BKE, είναι ίση με 120^o.

α) Να αποδείξετε ότι $AKB = KB\Lambda = B\Lambda\Gamma = 60^\circ$. (Μονάδες 9)
β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 6)

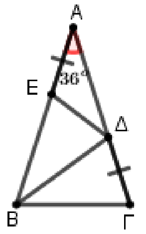
13750. Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (Ο,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ = ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι:
  i. ΑΒ = ΔΓ (Μονάδες 08)
  ii. ΑΔ // ΒΓ (Μονάδες 10)
β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

3ο Θέμα

12200. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 36^\circ$. Έστω ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Ε σημείο της πλευράς ΑΒ ώστε ΑΕ = ΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΒΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

γ) Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

$2^{\text{ο}}$ Θέμα

1531. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΒΓ$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $ΔΕ = ΑΔ$ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
β) το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
γ) η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΑΕ. (Μονάδες 9)

1533. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε την ΒΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ΜΔ = ΒΜ$ και την ΓΝ (προς το Ν) κατά τμήμα $ΝΕ = ΓΝ$.

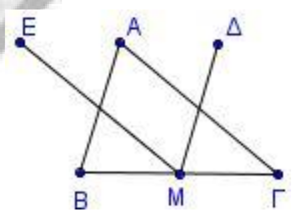
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ \parallel ΒΓ$ και $ΑΕ \parallel ΒΓ$. (Μονάδες 13)
β) Είναι τα σημεία Ε, Α και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

1534. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

1535. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΑ = ΑΕ$ (Μονάδες 8)
β) Τα σημεία Δ, Α και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)
γ) $ΔΕ = ΒΓ$. (Μονάδες 8)



1538. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΑΔ$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

1539. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε $ΟΕ = ΟΖ$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΕ = ΒΖ$ (Μονάδες 12)
β) Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

1557. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΒΓ$ και Ε το μέσο της πλευράς ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

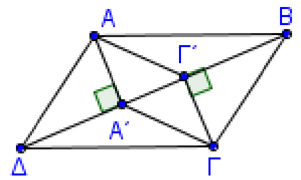
α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 15)

1559. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $ΜΔ = ΔΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)
β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 13)

1600. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Α΄, Γ΄ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ. Αν τα σημεία Α΄ και Γ΄ δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΑ' \parallel ΓΓ'$ (Μονάδες 8)
β) $ΑΑ' = ΓΓ'$ (Μονάδες 10)
γ) Το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

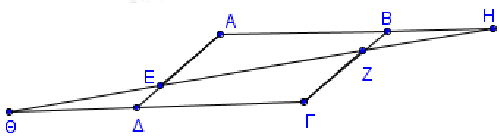


1609. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών του Δ και Β τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

1610. Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια, ώστε $ΑΕ = ΓΖ$. Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:

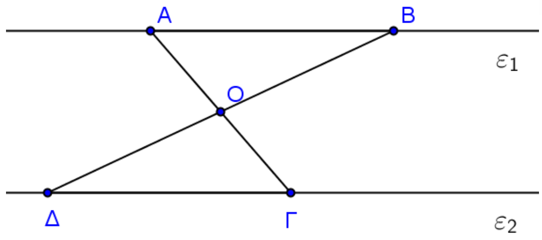


α) $\hat{Η}ΒΖ = \hat{Ε}ΔΘ$ (Μονάδες 8)

β) $Β\hat{Ζ}Η = Δ\hat{Ε}Θ$ (Μονάδες 8)

γ) $ΒΗ = ΘΔ$ (Μονάδες 9)

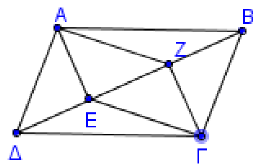
1618. Στο διπλανό σχήμα είναι $ε_1 \parallel ε_2$ και το σημείο Ο είναι το μέσο της ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

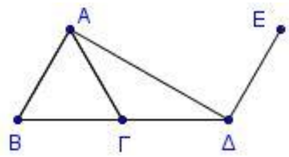
1628. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ > ΒΓ$. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη διαγώνιο ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:



α) $ΑΕ = ΓΖ$ (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

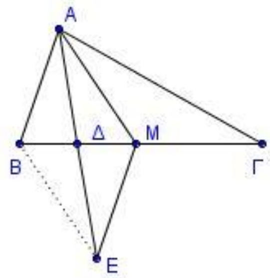
1637. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ, τέτοιο, ώστε $ΔΕ = ΒΓ$.(Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη ΒΔ).



α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

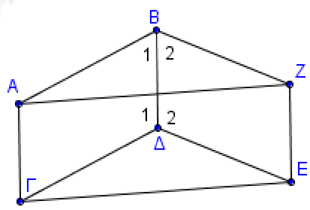
1642. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $ΒΓ = 2ΑΒ$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκταση της ώστε $ΑΔ = ΔΕ$.Να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) $ΜΕ = ΜΓ$. (Μονάδες 13)

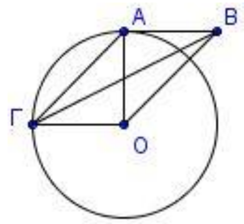
1654. Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) $Α\hat{Β}Ζ = Γ\hat{Δ}Ε$ (Μονάδες 12)

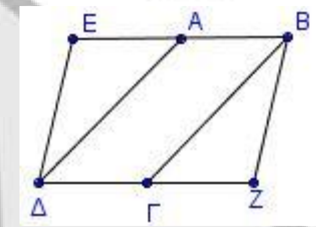
1678. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ, ΟΓ και εφαπτόμενο στο κύκλο τμήμα ΑΒ με $ΑΒ = ΟΓ$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 15)

1687. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα $ΑΕ = ΑΒ$ και $ΓΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

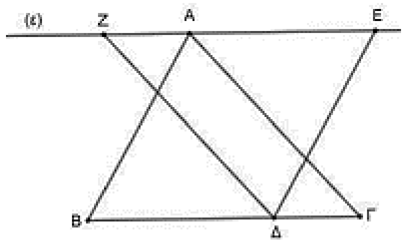
β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

1701. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $ΜΔ = ΜΑ$. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) $ΒΜ = \frac{ΑΕ}{2}$. (Μονάδες 13)

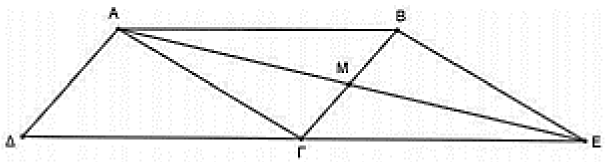
13755. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :



α) τα τετράπλευρα ΖΑΓΔ και ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

13816. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε ΑΔ < ΑΒ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε την ΑΜ προς το Μ κατά τμήμα ΜΕ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι :



α) το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) τα σημεία Δ, Γ και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 15)

13825. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την ΒΑ και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα ΑΔΜΒ και ΑΓΜΕ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)

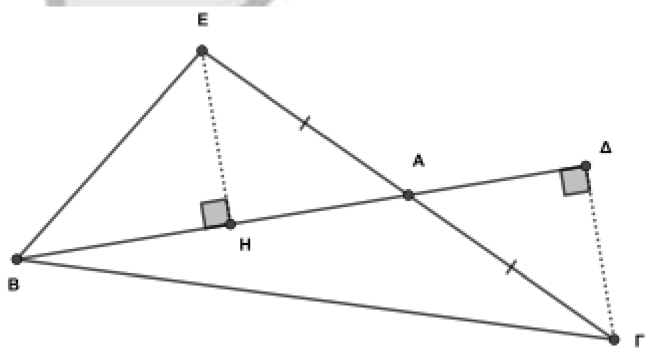
β) ΔΑ=ΑΕ. (Μονάδες 13)

13833. Στο διπλανό σχήμα το ΓΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, το ΕΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΗ=ΑΔ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



13829.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ των τμημάτων ΑΟ και ΓΟ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΕ=ΓΖ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

13834.Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Β κατά τμήμα ΒΖ=ΒΓ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΗ=ΒΓ, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΕ=ΑΜ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΖ και ΕΜΗ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΗΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

1709. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία Γ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας Α. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αx//ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της $Γ_{εξ}$. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

1730. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει $ΑΒ > ΑΔ$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $ΑΕΔ = ΒΖΓ$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών Δ και Β.

α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

1731. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύουν ΑΒ > ΓΔ και η γωνία Α είναι αμβλεία,, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

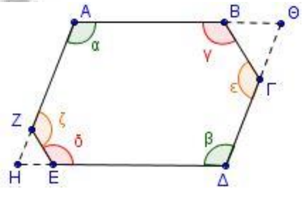
Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

α) Στη περίπτωση που θεωρείται ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στη περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

1746. Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύον τα εξής: $α = \hat{β}$, $\hat{γ} = \hat{δ}$ και $\hat{ε} = \hat{ζ}$.



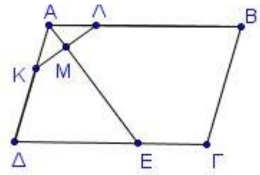
α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $α + \hat{γ} + \hat{ε}$. (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 10)

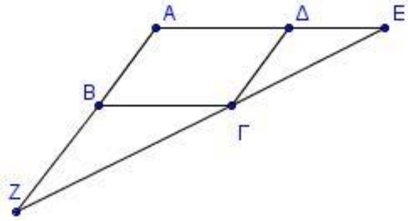
ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

1785. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > A\Delta$. Θεωρούμε σημεία Κ,Λ των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $AK = A\Lambda$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:



α) $A\Delta = \Delta E$. (Μονάδες 8)
β) $B\Gamma + \Gamma E = AB$. (Μονάδες 10)
γ) $\hat{B} = 2 \cdot A\hat{\Lambda}K$ (Μονάδες 7)

1805. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στη προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $BZ = B\Gamma$.



α) Να αποδείξετε ότι:
 i. $B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$ (Μονάδες 10)
 ii. Τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. « Έχουμε:

$B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και

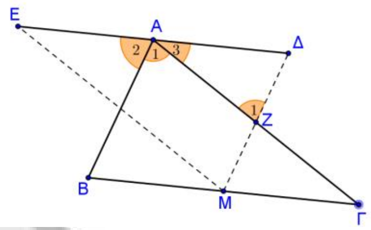
$B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{E}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΔΓ). Όμως

$\Delta\hat{\Gamma}E + \Gamma\hat{\Delta}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα

προηγούμενα : $\Delta\hat{\Gamma}E + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}Z = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)

1810.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από το ΒΓ και το σημείο Α .Να αποδείξετε ότι:
α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)
β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)
γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής :



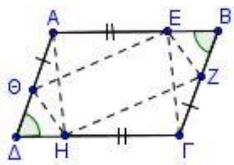
$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΑΖ)

$A\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ//ΜΔ που τέμνονται από ΔΕ)

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + A\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ).

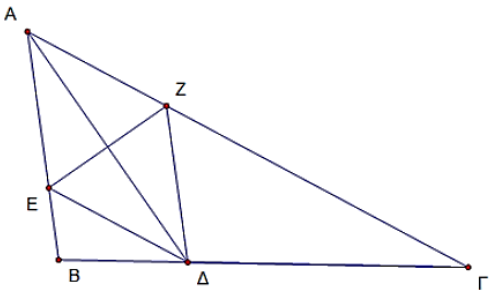
Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$.
Οπότε Δ,Α,Ε συνευθειακά.
Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή; (Μονάδες 6)

1839. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)
β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 9)

1844. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει ότι $ΑΔ = ΔΓ$. Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

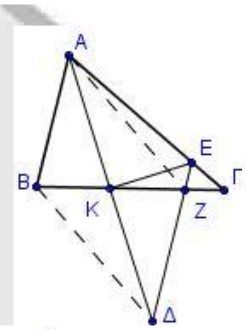


α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

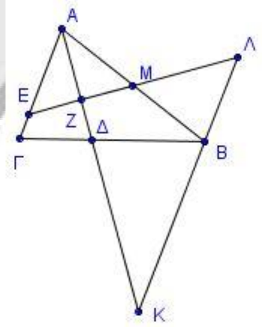
γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

1857. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $ΑΚ = ΚΔ$. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ. (Μονάδες 6)
γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

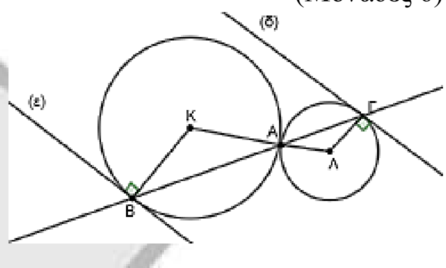
1882. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)
β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

13742. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε
$ΒΚ \perp ΒΓ$ έτσι ώστε ΒΚ = ΑΓ (το σημείο Κ είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α).
α) Να αποδείξετε ότι ΑΜ//ΒΚ και ΑΒ = ΒΚ. (Μονάδες 8)
β) Να δείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΜ. (Μονάδες 5)
γ) Να αποδείξετε ότι $ΒΚΑ = 45^\circ - \frac{Γ}{2}$. (Μονάδες 6)
δ) Μπορεί το τετράπλευρο ΑΒΚΜ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

13845. Οι κύκλοι (Κ,R), (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ε) και (δ) στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΚΒΑ = ΛΓΑ$. (Μονάδες 8)
β) (ε) // (δ). (Μονάδες 10)
γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο ΚΓΛΒ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 7)

3^{ο} Θέμα

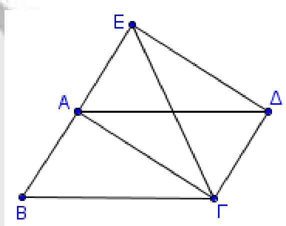
11897. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Στην προέκταση της ΑΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα ΓΔ = ΑΓ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΜ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) ΜΓ = ΓΕ. (Μονάδες 9)
β) Το τετράπλευρο ΑΜΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
γ) $Β + ΒΑΜ = ΓΕΔ$ (Μονάδες 9)

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

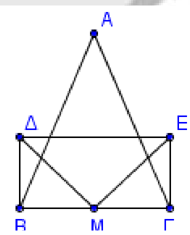
2ο Θέμα

1599. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) $ΜΔ = ΜΓ$ (Μονάδες 12)
β) Η ευθεία ΜΝ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ. (Μονάδες 13)

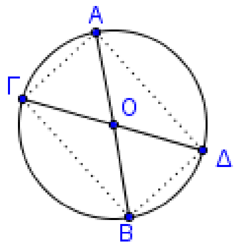
1653. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ. (Μονάδες 8)
β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
γ) $ΒΓΑ = ΑΔΕ$ (Μονάδες 8)



1668. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Στα σημεία Β και Γ φέρουμε κάθετες στη ΒΓ προς το ίδιο μέρος και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΜΔ = ΜΕ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
β) Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)



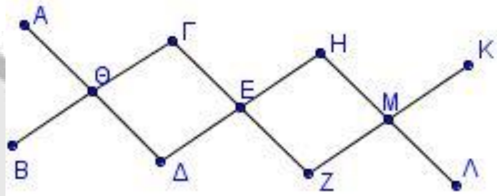
1683. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δύο διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες. (Μονάδες 13)
β) Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)



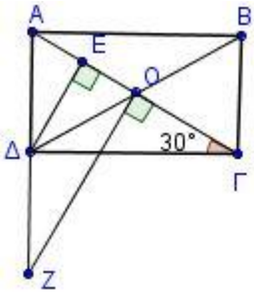
1692. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

1714. Στην διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)
β) Τα σημεία Β,Δ,Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)
γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



1729. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $ΔΓΑ = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $ΔΕ \perp ΑΓ$.
α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΔΓ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρείς ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)
β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



1733. Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2, να αποδείξετε ότι:

i. $OM = OM_1$. (Μονάδες 6)

ii. Τα σημεία Μ, Ο και M_2 είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

iii. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό του M_2 ως προς την ε_1, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

1735. Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω Α΄ και Β΄ τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι ΑΑ΄//ΒΒ΄. (Μονάδες 6)

β) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του Α΄Β΄. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη σχέση των ευθειών ΑΒ και (ε) ώστε το τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

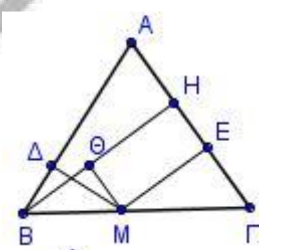
1800. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ. Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ, ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ, ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) $B\Theta = \Delta M$. (Μονάδες 9)

γ) $M\Delta + ME = BH$. (Μονάδες 7)



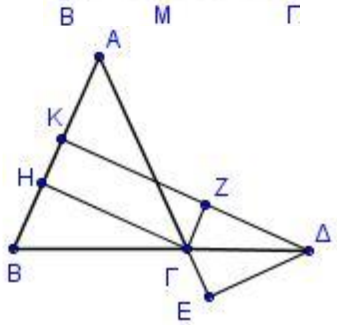
1816. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΖΓΔ είναι ίση με τη Β. (Μονάδες 4)

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΓΕ. (Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$ (Μονάδες 8)



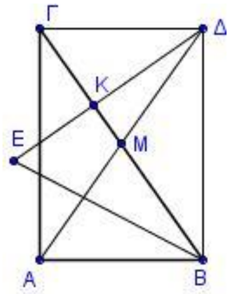
1833. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ την οποία προεκτείνουμε, προς το μέρος του Μ, κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔΚ κάθετη στη ΒΓ, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας Β στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) $KEB = 90^\circ - \frac{B}{2}$ (Μονάδες 8)

γ) $\Delta E = B\Delta$. (Μονάδες 9)

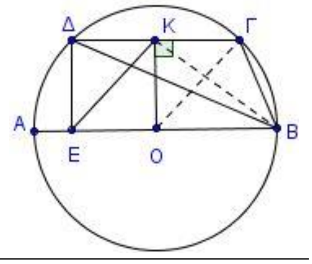


1879. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ και Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

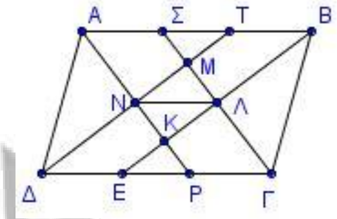
α) Το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $\Delta EK = \frac{\Delta O\Gamma}{2}$ (Μονάδες 12)

γ) $KE < KB$ (Μονάδες 5)



1891. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > A\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ,Ε στην ΔΓ και Σ, Τα στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ,Λ,Μ και Ν όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:



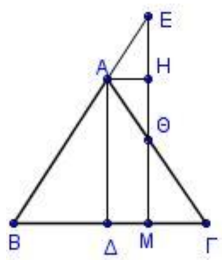
α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες7)
β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)
γ) $\Lambda N \parallel AB$ (Μονάδες 5)
δ) $\Lambda N = AB - A\Delta$ (Μονάδες 5)

13523. Ο χαρταετός του σχήματος είναι ένα εξάγωνο με ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΒΔ.
(Μονάδες 07)
β) Να αποδείξετε ότι ΑΕ ⊥ ΕΔ.
(Μονάδες 08)
γ) i. Αν οι ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Ο, τότε να αποδείξετε ότι 2ΒΟ = ΑΔ. (Μονάδες 05)
ii. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι υπάρχει κύκλος με διάμετρο την ΑΔ που διέρχεται από το Β. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του;
Δικαιολογήστε την απάντηση σας. (Μονάδες 05)

13746. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΔ προς το Δ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε ΑΔ = ΔΕ.
α) Να αποδείξετε ότι :
i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 07)
ii. Η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ που την περιέχουν. (Μονάδες 08)
β) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ το διπλάσιο της διαμέσου ΑΔ ισούται με την πλευρά ΒΓ, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΒΕΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

14887. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = A\Gamma\right)$ και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



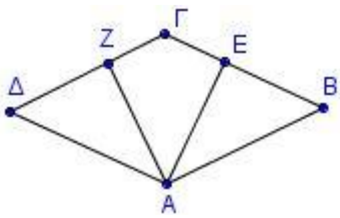
α) $\Delta \hat{A} H = 90^\circ$ (Μονάδες 8)
β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
γ) $M\Theta + ME = 2A\Delta$. (Μονάδες 9)

ΡΟΜΒΟΣ

2ο Θέμα

1570. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω Κ το συμμετρικό του Β ως προς το Δ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

1575. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $AE \perp B\Gamma$ και $AZ \perp \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

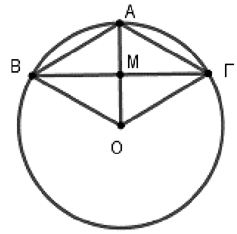


α) Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.
(Μονάδες 12)
β) Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

1584. Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μια ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)



1679(Ίδια με την 1584).Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

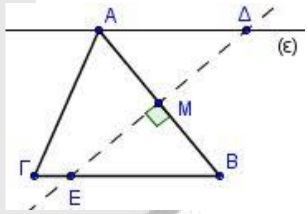
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ. (Μονάδες 15)

1630. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε από την κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΕΑ = ΕΒ$. (Μονάδες 6)

β) Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ. (Μονάδες 10)

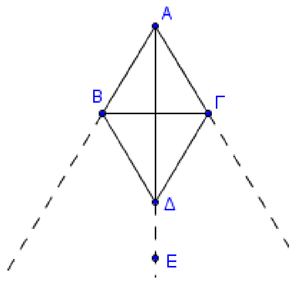
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)



1681. Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Το Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ. (Μονάδες 15)

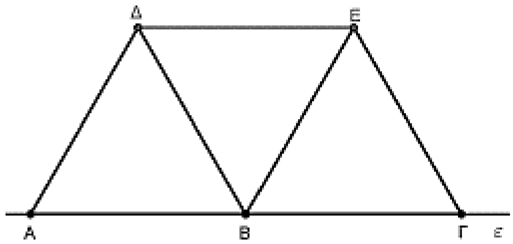


13767.Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε ΑΒ = ΒΓ. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ΔΒΕ}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



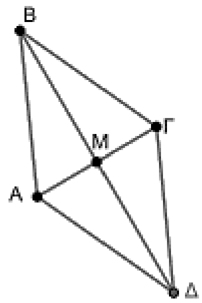
13832.Στο σχήμα το Μ είναι μέσο των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Επίσης $\widehat{ΑΜΒ} = \widehat{ΓΜΒ}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες. (Μονάδες 10)

ii. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

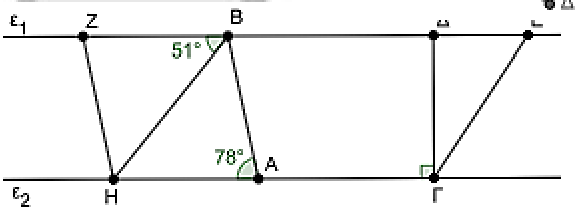
β) Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές; (Μονάδες 7)



13842.Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι ρόμβος. Επίσης δίνονται οι γωνίες $\widehat{ΒΑΗ} = 70^\circ$, $\widehat{ΖΒΗ} = 51^\circ$ και η $\widehat{ΑΓΔ}$ είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ΑΒΗ}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 8)

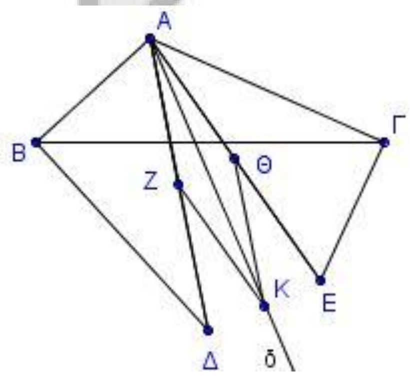


γ) Αν η γωνία Ε του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με 56°, να υπολογίσετε τη γωνία Γ του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 10)

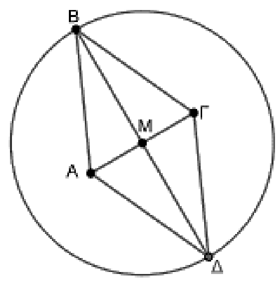
1740. Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:
Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.
Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.
α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 20)
β) Στην περίπτωση που οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

1840. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ,Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια, ώστε να ισχύει $ΒΚ = ΚΛ = ΛΔ$.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)
γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

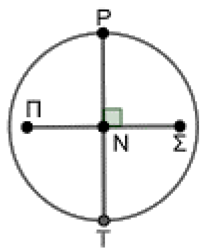
1869. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και $Α > 90^\circ$. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ και με $ΒΔ = ΑΓ$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $ΓΕ = ΑΒ$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνίας $\hat{ΔΑΕ}$.
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = ΑΕ$. (Μονάδες 9)
β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι το Κ ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ. (Μονάδες 9)
γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο, ώστε $ΚΖ = ΑΖ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)



13857.α) Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



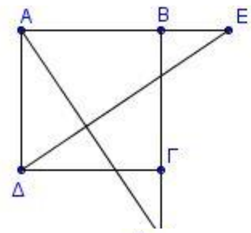
β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.
Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».
Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση. (Μονάδες 10)



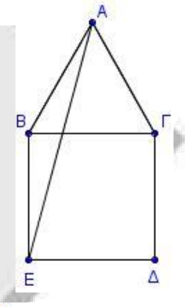
γ) Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και ΠΝ = ΝΣ. Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν. Να αποδείξετε ότι ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ. (Μονάδες 7)

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

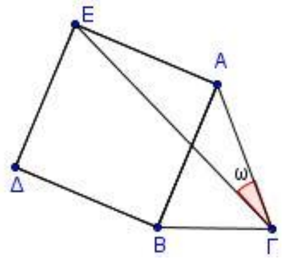
2ο Θέμα



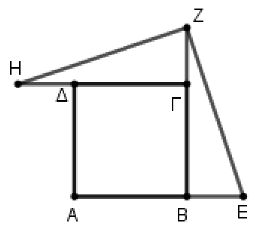
1643. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



1651. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες
i. ABE (Μονάδες 8)
ii. BEA (Μονάδες 9)
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 8)



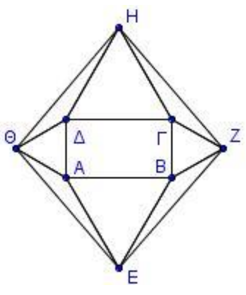
1652. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
β) $2E\Gamma A = 90^\circ - BA\Gamma$. (Μονάδες 15)



13536. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε ΒΕ = ΓΖ = ΔΗ.
α) Να αποδείξετε ότι ΖΕ = ΖΗ.
(Μονάδες 15)
β) Να αποδείξετε ότι $EZH = 90^\circ$
(Μονάδες 10)

14883. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)
β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

4ο Θέμα

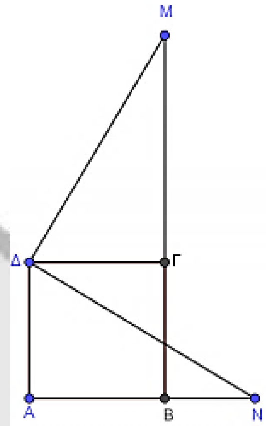


1734. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.
(Μονάδες 15)
β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
(Μονάδες 10)

1750. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΝ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta N = \Delta M$ (Μονάδες 12)

β) $\Delta N \perp \Delta M$ (Μονάδες 13)

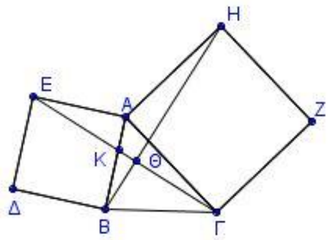


1788. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να αποδείξετε ότι:

α) $EAH = AB\Gamma + A\Gamma B$ (Μονάδες 8)

β) $E\Gamma = BH$ (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ. (Μονάδες 8)

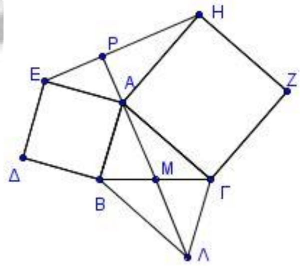


1795. Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Λ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο, ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Lambda = AE$. (Μονάδες 10)

β) $A\Gamma\Lambda = EAH$. (Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ. (Μονάδες 5)

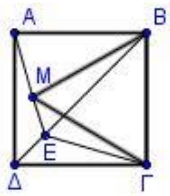


1814. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta AE = 15^\circ$. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ. (Μονάδες 9)

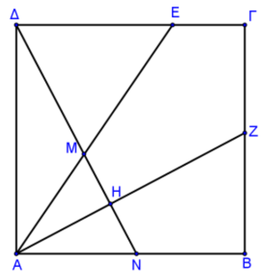


1825.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) ΑΜ=ΑΝ και ΔΕ=ΕΜ. (Μονάδες 10)

γ) ΑΕ=ΔΕ+ΒΖ (Μονάδες 7)



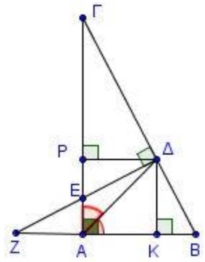
1894. Σε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Έστω Κ και Ρ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΑΒ (προς το Α) στο σημείο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B = \Delta E\Gamma$ (Μονάδες 8)

ii. $\Delta E = \Delta B$ (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ. (Μονάδες 9)



13744.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ προς το Β και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε ΒΕ = ΓΖ. Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:

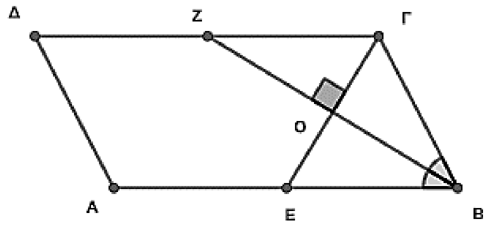
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες ΑΕΔ και ΒΖΑ είναι ίσες.

ii. Τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα. (Μονάδες 18)

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής Ρ των ΑΖ και ΔΕ είναι τέτοιο ώστε ΡΒ = ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Ε στην προέκταση του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 07)

13850.Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας Β. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.



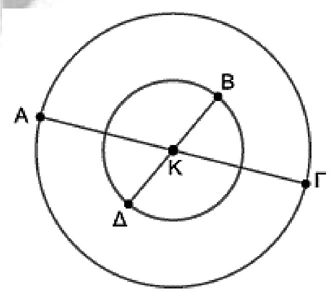
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος (Μονάδες 6)

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Β ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 4)

13848.Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.



α) Αν ισχύει ΑΓ>ΒΔ:

i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής: «Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

13841.Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Μ το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΕΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι ΒΕ//ΖΔ. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 5)

δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΤΜΗΜΑ ΠΟΥ ΕΝΩΝΕΙ ΜΕΣΑ ΠΛΕΥΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

2ο Θέμα

1542. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A=90^\circ\right)$ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

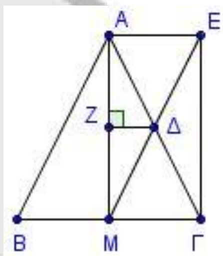
α) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) $\Delta E=\dfrac{A\Gamma}{2}$ (Μονάδες 12)

1560. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε $M\Delta=\Delta E$. Αν το σημείο Ζ είναι η προβολή του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) $\Delta Z=\dfrac{B\Gamma}{4}$. (Μονάδες 13)



1566. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

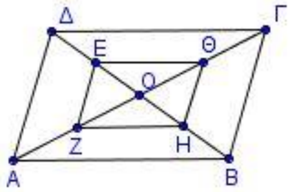
α) Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ. (Μονάδες 12)

1583. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο είναι το κέντρο του. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΟΔ, ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, να βρείτε τη περίμετρο του ΕΖΗΘ. (Μονάδες 15)

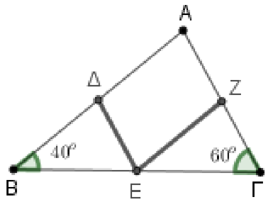


1589. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B=40^\circ$ και $\Gamma=60^\circ$. Επιπλέον τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΓ και ΖΕ//ΑΒ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ. (Μονάδες 8)

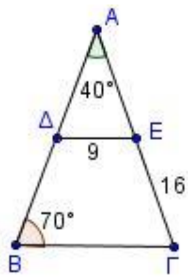


1608. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A=40^\circ$ και $B=70^\circ$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $\Delta E=9$ και $E\Gamma=16$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma=18$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



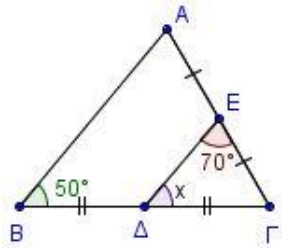
1611. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B=50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $\Delta E\Gamma=70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε

i. τη γωνία x. (Μονάδες 8)

ii. τις γωνίες Α και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

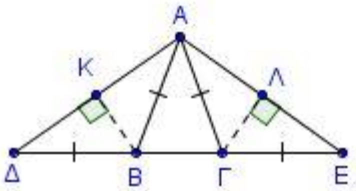


1616. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $AB = B\Delta = A\Gamma = \Gamma E = 5$, $BK \perp A\Delta$ και $\Gamma\Lambda \perp AE$.

α) Να προσδιορίσετε ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)

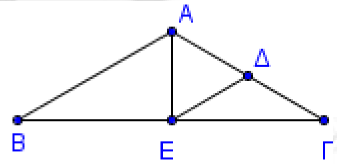
γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ. (Μονάδες 9)



1686. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $B = 30^\circ$. Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)



12639. Από το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Δ στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

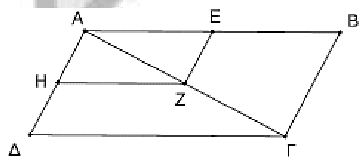
α) το Ζ είναι μέσο της ΑΓ. (Μονάδες 10)

β) το ΑΕ ισούται με το 1/4 του ΑΓ. (Μονάδες 15)

13532. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = \dfrac{AB}{2}$. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

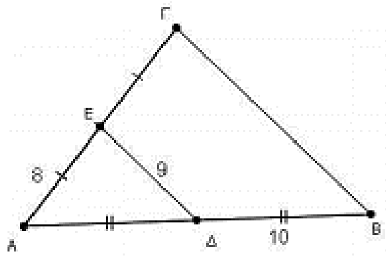


14877. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ και τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΕ = 8, ΕΔ = 9 και ΔΒ = 10.

α) Να αποδείξετε ότι οι ΒΓ και ΔΕ είναι παράλληλες. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ. (Μονάδες 9)



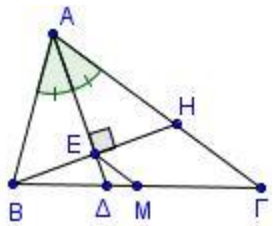
4ο Θέμα

1723. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(AB < A\Gamma)$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) $EM \parallel H\Gamma$ (Μονάδες 8)

γ) $EM = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$ (Μονάδες 8)



1726. α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

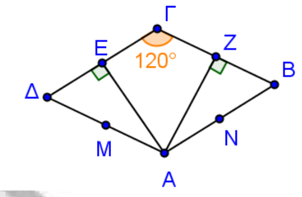
ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9)

1741. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ στο εσωτερικό του τριγώνου και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$. (Μονάδες 15)

β) Στη περίπτωση που το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, και Δ,Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Α και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

1743. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\Gamma = 120^\circ$. Έστω ΑΕ και ΑΖ οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.



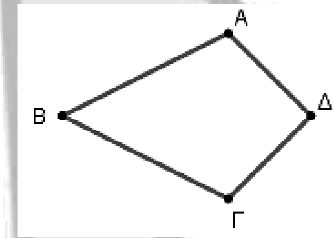
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

ii. $A\Gamma \perp EZ$ (Μονάδες 8)

β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

1745.Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ=ΒΓ και $A = \Gamma$.



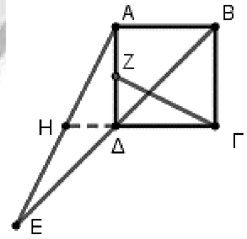
Να αποδείξτε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

1766. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

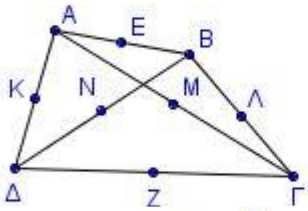


α) $\Delta H = \dfrac{AB}{2}$ (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ. (Μονάδες 8)

1773. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $A\Delta = B\Gamma$. Αν Ε,Λ,Ζ,Κ,Ν,Μ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ,ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



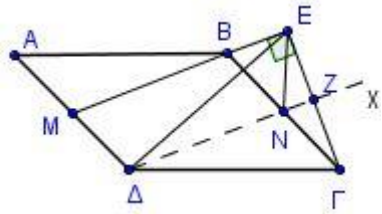
α) Το τετράπλευρο ΕΜΖΝ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΜΝ. (Μονάδες 7)

γ) $KE = Z\Lambda$ (Μονάδες 5)

δ) Τα τμήματα ΚΛ,ΜΝ,ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 5)

1775. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ $(\Gamma E \perp MB)$. Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ $(\Delta x \parallel MB)$ τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν,Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Το σημείο Ζ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 9)

γ) $\Delta E = \Delta\Gamma$. (Μονάδες 9)

1794. α) Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)

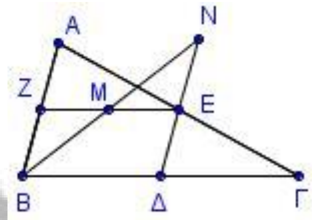
β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ πρέπει απαραίτητα να είναι ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση. (Μονάδες 10)

1798. α) Σε ρόμβο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου. (Μονάδες 12)

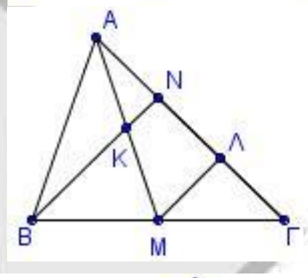
1801. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει τη ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
β) Τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 10)
γ) $ΒΖ + ΝΕ = ΔΓ$ (Μονάδες 8)



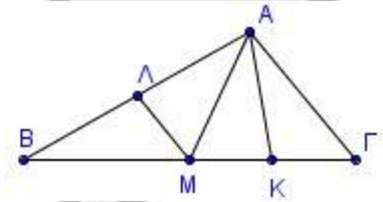
1802. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσός του και Κ το μέσο του ΑΜ. Αν η προέκταση της ΒΚ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν, και Λ είναι το μέσο του ΓΝ, να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ν είναι μέσο του ΑΛ. (Μονάδες 9)
β) $ΚΜΓ = ΜΒΚ + ΑΚΝ$ (Μονάδες 9)
γ) $ΒΚ = 3ΚΝ$ (Μονάδες 7)



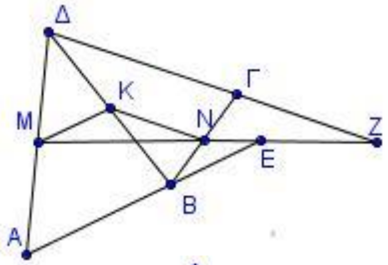
1803. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΓ$. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ,Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΑΓ = ΑΜΓ$. (Μονάδες 7)
β) $ΜΛ = ΜΚ$. (Μονάδες 9)
γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΛΜΚ. (Μονάδες 9)



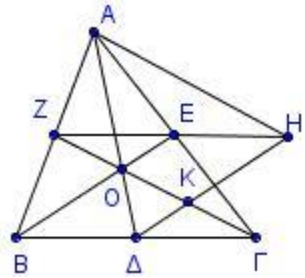
1804. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = ΓΔ$ και Μ,Ν,Κ τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ,ΔΓ τέμνουν την προέκταση της ΜΝ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΚ = ΚΝ$ (Μονάδες 13)
β) $ΜΕΑ = ΜΖΔ$ (Μονάδες 12)



1820. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΖΕ (προς το Ε) κατά τμήμα $ΕΗ = ΖΕ$. Να αποδείξετε ότι:

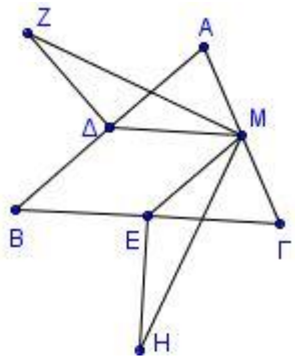
α) Το τετράπλευρο ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
β) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΗ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)
γ) Οι ευθείες ΒΕ και ΔΗ τριχοτομούν το τμήμα ΖΓ. (Μονάδες 8)



1832. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με τις γωνίες Β και Γ οξείες και Δ,Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΔΖ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΕΗ = \frac{ΒΓ}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)
ii. Τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

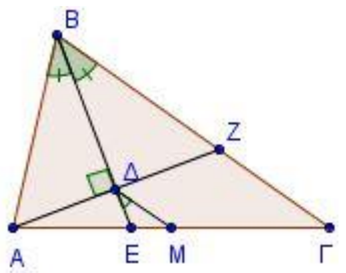
β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι $Α = 90^\circ$. (Μονάδες 10)



1898. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω Ε,Ζ και Η τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)
γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο (η γωνία Β ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ. (Μονάδες 5)

1837. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < B\Gamma$ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας Β. Αν $AZ \perp BE$, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

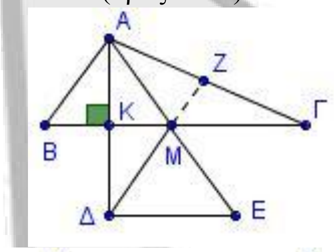


α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) $\Delta M \parallel B\Gamma$ και $\Delta M = \dfrac{B\Gamma - AB}{2}$. (Μονάδες 10)

γ) $E\hat{\Delta}M = \dfrac{\hat{B}}{2}$, όπου Β η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

1873. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ τέτοια, ώστε $AM = AB$. Φέρνουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $K\Delta = AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ME = M\Delta$.



Να αποδείξετε ότι:

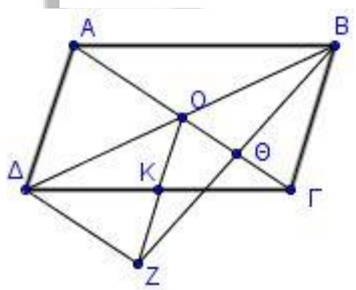
α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει το ΑΓ στο μέσον του Ζ. (Μονάδες 6)

1877. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΟΚ κατά τμήμα $KZ = KO$. Η ΒΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Θ. Να αποδείξετε ότι:

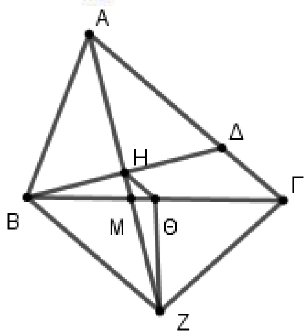


α) Τα τμήματα ΟΓ και ΒΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

β) $AO = \Delta Z$ (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΖΓ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

1889. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΗ = ΗΖ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι



α) το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) ΗΘ//ΒΖ. (Μονάδες 9)

γ) $H\Theta = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$ (Μονάδες 7)

13743. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στην πλευρά ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta \hat{M} \Gamma = B\hat{\Gamma} M$. (Μονάδες 05)

β) Αν το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ στην ΑΒ ώστε το τρίγωνο ΔΜΓ να είναι ισοσκελές με ΔΜ = ΔΓ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας. (Μονάδες 10)

γ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΓ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΜΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

13745. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της βάσης ΒΓ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

α) Αν από το μέσο Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

i. ΜΕ = ΜΖ. (Μονάδες 6)

ii. Το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με 2ΑΒ. (Μονάδες 7)

β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, διαφορετικό από το μέσο Μ, και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τότε:

i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου ΑΚΔΛ;

ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει. (Μονάδες 12)

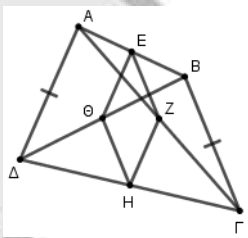
13856.Σε τρίγωνο ΔΕΖ, φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ και στην προέκτασή της προς το μέρος του Μ παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε ΑΜ=ΜΘ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ προς το Ε κατά τμήμα ΕΑ=ΕΖ και προς το Ζ κατά τμήμα ΖΓ=ΕΖ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι ΑΔ=12. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ στο σχήμα του Γιάννη; (Μονάδες 9)

3ο Θέμα



11896. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος ισχύει ότι ΑΔ = ΒΓ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΒΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α. ΕΖ / / = ΗΘ (Μονάδες 15)

β. Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

12068. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A=90^\circ\right)$ και Μ το μέσο της υποτείνουσας του ΒΓ. Από το Μ φέρουμε $MΔ \perp AB$ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔΖ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο ΑΜΒΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) Αν το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΜΒΖ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

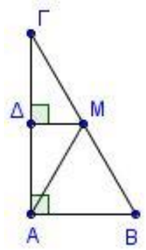
ΔΙΑΜΕΣΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ – ΘΕΩΡΗΜΑ 30°

2ο Θέμα

1537. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα $AH = ΔA$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

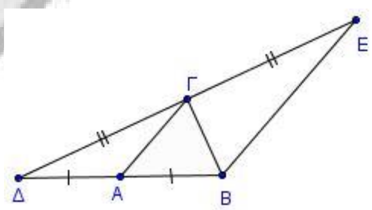
β) Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Ζ. (Μονάδες 13)



1548. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A=90^\circ\right)$ με $BΓ = 8cm$. Έστω ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου και $MΔ \perp AΓ$. Αν $AMΓ = 120^\circ$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $AB = 4cm$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ. (Μονάδες 13)

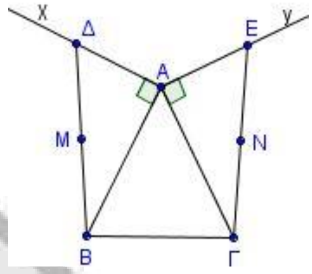


1551. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB = AΓ\right)$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = AΔ$ και στη προέκταση της ΔΓ (προς το Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $ΔΓ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

β) $BE \parallel AΓ$ και $AΓ = \frac{BE}{2}$ (Μονάδες 13)

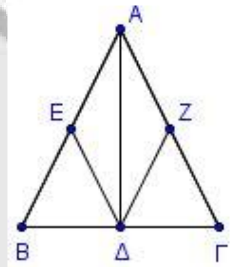
1555. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = AE$.



α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 12)

β) Αν Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

1564. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$, το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

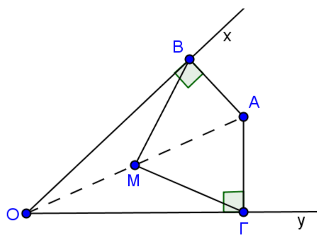
β) Το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

1567. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και $\Gamma = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος του ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

1586. Δίνεται γωνία xOy και σημείο Α στο εσωτερικό της. Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΒ, ΑΓ προς τις πλευρές Οx, Οy της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε Μ το μέσο του ΟΑ. Να αποδείξετε ότι:

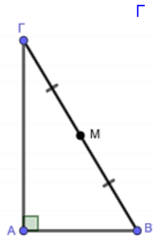


α) Το τρίγωνο ΒΜΑ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) $BMA = 2xOA$. (Μονάδες 9)

1606. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ με $B = 2\Gamma$ και Μ το μέσο της ΒΓ.

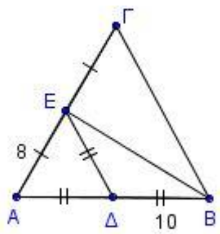


α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη γωνία ΑΜΓ. (Μονάδες 9)

1614. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = \Delta E = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

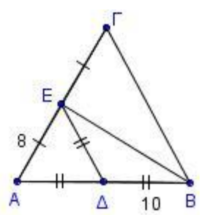


α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 20$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

1615. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = \Delta E = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

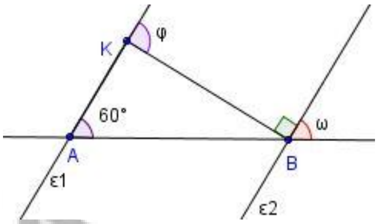


α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

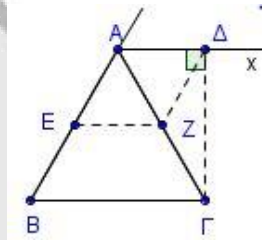
γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

1619. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = 6$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ. (Μονάδες 10)
β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 7)
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

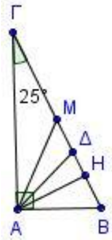
1625. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Αx της γωνίας Α και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Αx. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)
β) το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)

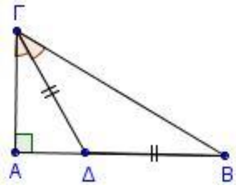
1631. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $A + \Gamma = 120^\circ$ και $A = 3\Gamma$.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)
β) Αν η πλευρά $B\Gamma = 2\text{cm}$, να βρείτε το μήκος της ΑΒ. (Μονάδες 10)

1633. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $\Gamma = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος ΑΜ, το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας Α.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες AMB, HAB, $A\Delta B$. (Μονάδες 15)
β) Να αποδείξετε ότι $MA\Delta = \Delta AH = 20^\circ$. (Μονάδες 10)

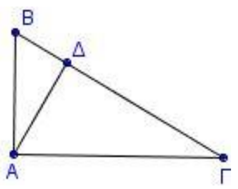
1638. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{cm}$.
Να αποδείξετε ότι:



α) $B = 30^\circ$. (Μονάδες 12)
β) $AB = 3\text{cm}$ (Μονάδες 13)

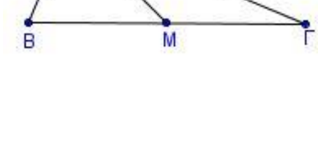
1647. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$, $B = 35^\circ$ και Μ το μέσο της ΒΓ.
α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ. (Μονάδες 10)
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΒ. (Μονάδες 15)

1649. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$, $2\Gamma = B$ και ΑΔ το ύψος του.



α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)
β) Να υπολογιστεί η γωνία ΒΑΔ. (Μονάδες 7)
γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \dfrac{AB}{2}$. (Μονάδες 9)

1655. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:

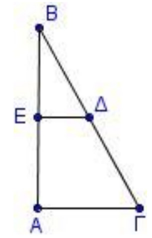


α) $MA\Gamma = M\Gamma A$ (Μονάδες 12)
β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx. (Μονάδες 13)

1671. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $B = 30^\circ$. Αν τα σημεία Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα με $ΕΔ = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

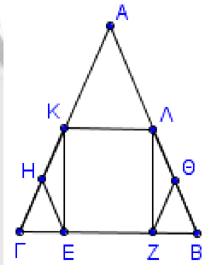
α) ΑΓ..... (Μονάδες 8)
β) ΒΓ....... (Μονάδες 9)
γ) ΑΔ....... (Μονάδες 8)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



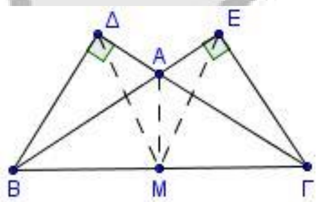
1675. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα. (Μονάδες 15)
β) $ΕΗ = ΖΘ$, όπου Η, Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα. (Μονάδες 10)



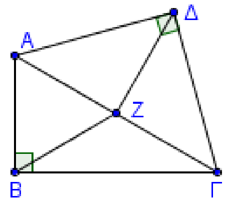
1680. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{A} > 90^\circ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = ΓΕ$. (Μονάδες 10)
β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, τότε:
 i. Να αποδείξετε ότι $ΜΔ = ΜΕ$ (Μονάδες 8)
 ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ. (Μονάδες 7)



1685. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $B = 90^\circ$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με $Δ = 90^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΒΖ = ΔΖ$. (Μονάδες 13)
β) Αν $ΑΓΒ = 30^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ. (Μονάδες 12)



1690. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $B > Γ$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσό του ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $B = ΓΑΔ$ (Μονάδες 12)
β) $ΑΜΔ = 2Γ$. (Μονάδες 13)

1691. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $B = 60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$ (Μονάδες 8)
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ, (Μονάδες 9)
γ) το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

1702. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε $ΑΓ < ΑΒ$. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΑΔ = ΑΓ$ και στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

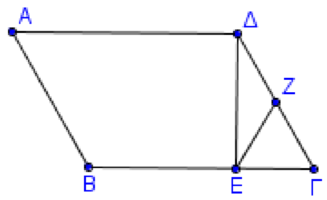
α) $ΔΓ \perp ΕΓ$ (Μονάδες 12)
β) η γωνία ΕΑΓ είναι διπλάσια της γωνίας ΑΔΓ. (Μονάδες 13)

1704. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $B = 120^\circ$ και $ΔΕ \perp ΒΓ$. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ του παραλληλογράμμου. (Μονάδες8)

β) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι $ΕΖ = ΑΚ$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΖΓ. (Μονάδες 8)



13653. Σχεδιάζουμε γωνία $xOy = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο Α επί της πλευράς Οx, τέτοιο ώστε ΑΟ = 2. Φέρουμε τη διχοτόμο Οδ της γωνίας xOy και θεωρούμε σημείο Μ στην Οδ, τέτοιο ώστε ΑΜ = ΑΟ. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $δOy$.

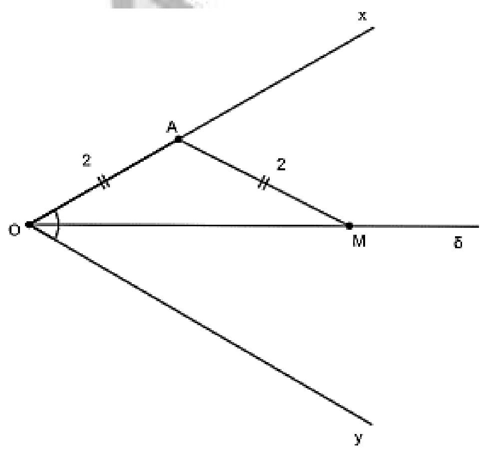
(Μονάδες 6)

β) Τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΜ.

(Μονάδες 9)

γ) Το μήκος του ύψους ΑΒ που αντιστοιχεί στη βάση ΟΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΟΜ.

(Μονάδες 10)



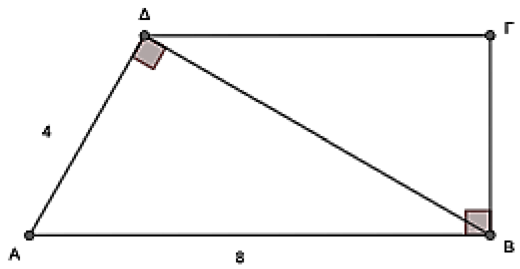
13828. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $ΔΑΒ$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.

(Μονάδες 13)



13831. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $A = 90^\circ$.

α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΒ > ΑΓ. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί; (Μονάδες 10)

β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30º , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία B και πόσες η γωνία $Γ$; (Μονάδες 8)

ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας;

(Μονάδες 7)

13837. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $B = 60^\circ$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

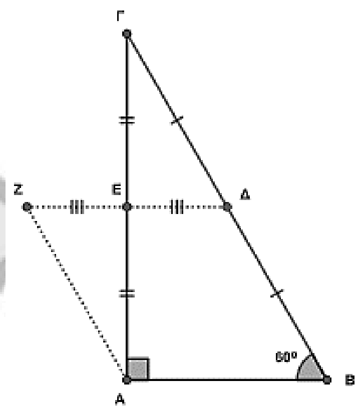
Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ=ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ=ΑΖ.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές.

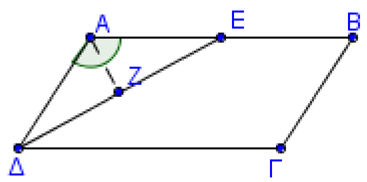
(Μονάδες 13)



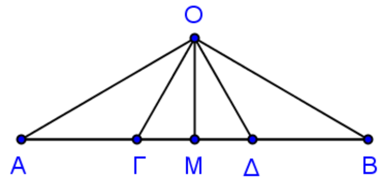
14876. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A = 120^\circ$ και $AB = 2AΔ$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) $AΔE = 30^\circ$ (Μονάδες 10)

β) $AZ = \dfrac{AB}{4}$ (Μονάδες 15)



1710. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ,Δ ώστε να ισχύει $ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ$. Επίσης θεωρούμε σημείο Ο εκτός του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έτσι ώστε να ισχύουν $ΟΓ = ΑΓ$ και $ΔΒ = ΟΔ$.



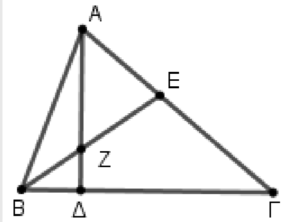
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{ΓΟΔ} = 60^\circ$ (Μονάδες 9)

ii. $\hat{ΟΑΓ} = \hat{ΟΒΔ} = 30^\circ$ (Μονάδες 9)

β) Αν Μ το μέσον του τμήματος ΑΒ, να αποδείξετε ότι $2ΟΜ = ΟΑ$. (Μονάδες 7)

1713. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{Α} + \hat{Γ} = 2\hat{Β}$ και έστω ΑΔ ύψος και ΒΕ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Ζ.



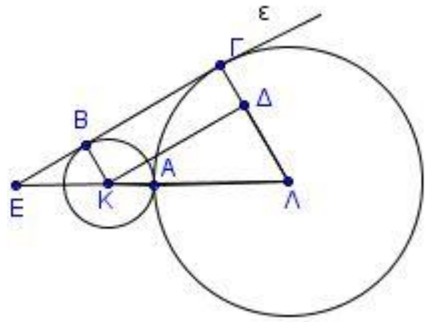
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{Β} = 60^\circ$ και $ΑΖ = ΒΖ$ (Μονάδες 10)

ii. $ΑΔ = \frac{3}{2}ΒΖ$ (Μονάδες 8)

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου. (Μονάδες 7)

1721. Οι κύκλοι $(Κ,ρ)$ και $(Λ,3ρ)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Μια ευθεία εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Ε. Φέρουμε από το σημείο Κ παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα ΛΓ στο Δ.



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{ΔΚΛ} = 30^\circ$ (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $ΕΛ = 6ρ$. (Μονάδες 8)

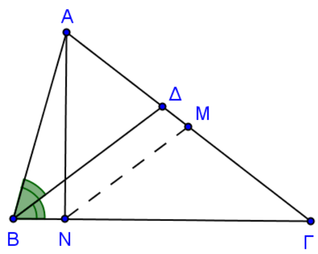
1737. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^\circ\right)$ και το ύψος του ΑΗ. Ονομάζουμε Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το σημείο τομής του τμήματος ΗΔ με την πλευρά ΑΒ και Ν είναι το σημείο τομής του ΗΕ με την πλευρά ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΗ = ΑΔ = ΑΕ$ (Μονάδες 10)

β) Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή. (Μονάδες 8)

γ) Τα σημεία Ε,Α και Δ είναι συνευθειακά και ΜΝ=ΔΕ/2. (Μονάδες 7)

1738. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Β} = 2\hat{Γ}$ και η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας Β. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο ΒΔ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

β) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) $ΑΝ \perp ΒΓ$ (Μονάδες 10)

1759. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία Α αμβλεία, ισχύει ότι $ΑΒ = 2ΑΔ$. Τα σημεία Ε και Ζ, είναι μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το τμήμα ΗΕ, είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΗΓ. (Μονάδες 8)

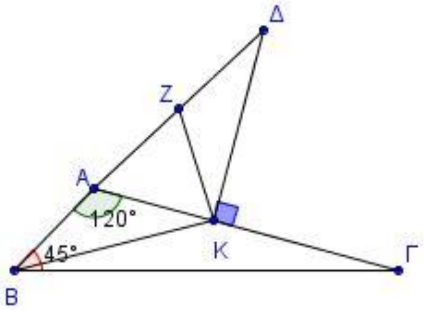
1761. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Α ίση με 120° και γωνία Β ίση με 45°. Στην προέκταση της ΒΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα $A\Delta = 2AB$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta K = 30^\circ$ (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

γ) Αν Ζ το μέσο της ΔΑ, τότε $ZKB = 90^\circ$ (Μονάδες 6)

δ) Το σημείο Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΔ. (Μονάδες 7)

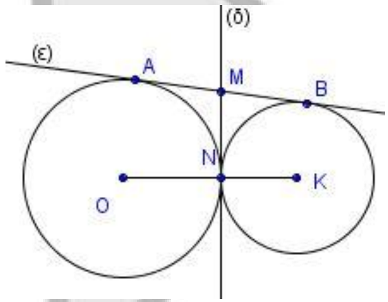


1771. Δύο κύκλοι (O,ρ_1), (K,ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α,Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την ε στο Μ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το Μ είναι μέσο του ΑΒ. (Μονάδες 7)

β) $OMK = 90^\circ$ (Μονάδες 9)

γ) $ANB = 90^\circ$ (Μονάδες 9)

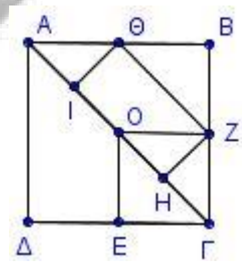


1781. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$. Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 7)

β) $ZH = \frac{A\Gamma}{4}$ (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο με $\Theta Z = 2\Theta I$.(Μονάδες 10)



1806. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή. Φέρουμε τη διάμεσο του ΑΜ και σε τυχαίο σημείο Κ αυτής φέρουμε κάθετη στην ΑΜ η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν Η είναι το μέσο του ΔΕ να αποδείξετε ότι:

α) $B = BAM$ (Μονάδες 8)

β) $A\Delta H = \Delta A H$. (Μονάδες 9)

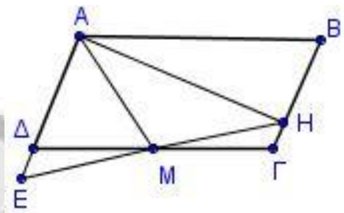
γ) Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα τη ΒΓ. (Μονάδες 8)

1787. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$, τη γωνία Α αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΑΒ. (Μονάδες 9)

β) Τα τμήματα ΕΗ, ΔΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

γ) $E = \Delta M A$ (Μονάδες 8)

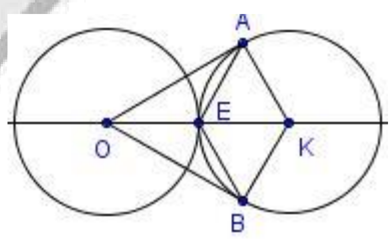


1796. Δύο ίσοι κύκλοι (O,ρ) και (K,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο (K,ρ), να αποδείξετε ότι:

α) $AE = BE$ (Μονάδες 9)

β) $AOK = 30^\circ$ (Μονάδες 8)

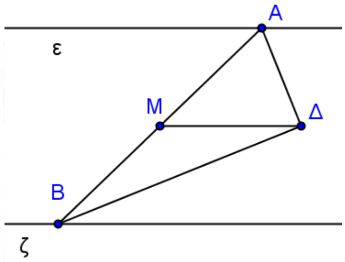
γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



1808. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Δ,Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = AE$ και στη προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο, ώστε $\Delta K = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

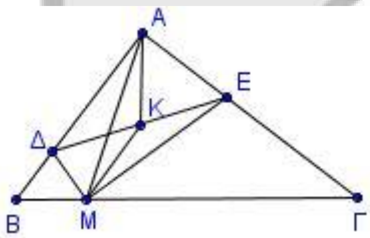
α) $ΚΔ = ΛΕ$ (Μονάδες 6)
β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια. (Μονάδες 9)
γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

1811. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες (ε) και (ζ) και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, να αποδείξετε ότι:



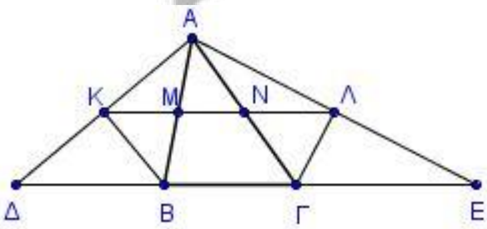
α) $ΒΔΑ = 90^\circ$ (Μονάδες 9)
β) $ΒΜΔ = 2ΜΔΑ$ (Μονάδες 8)
γ) $ΜΔ \parallel ε$ (Μονάδες 8)

1812. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών ΒΜΑ και ΑΜΓ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.



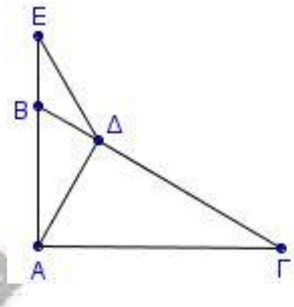
α) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΔΜΕ είναι ορθή. (Μονάδες 12)
β) Αν Κ το μέσο του ΔΕ, να αποδείξετε ότι $ΜΚ = ΚΑ$. (Μονάδες 13)

1824. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $ΒΔ = ΑΒ$ ενώ στη προέκταση της ΒΓ προς το Γ, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΓΕ = ΑΓ$. Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνουν τις ΑΔ και ΑΕ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα και η ΚΛ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)
β) Τα τρίγωνα ΚΜΑ και ΑΝΛ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)
γ) $ΚΛ = \dfrac{ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ}{2}$ (Μονάδες 8)

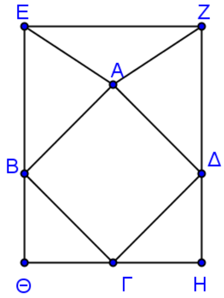
1831. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και $Β = 2Γ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο, ώστε $ΒΕ = ΒΔ$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ. (Μονάδες 9)
β) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΒΕ = \dfrac{ΑΒ}{2}$ (Μονάδες 8)
ii. $ΑΕ = ΓΔ$ (Μονάδες 8)

1850. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Μια μπάλα του μπιλιάρδου ξεκινάει από σημείο Α της μεσοκαθέτου του τμήματος ΕΖ και χτυπώντας διαδοχικά στους τοίχους ΕΘ, ΘΗ, ΗΖ στα σημεία Β, Γ και Δ αντίστοιχα, καταλήγει στο σημείο εκκίνησης Α. Για τη διαδρομή $Α \to Β \to Γ \to Δ \to Α$ που ακολουθεί η μπάλα ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ. η γωνία ΑΒΕ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία ΘΒΓ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45°.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 9)
ii. Η διαδρομή ΑΒΓΔΑ της μπάλας σχηματίζει τετράγωνο. (Μονάδες 8)
β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ,

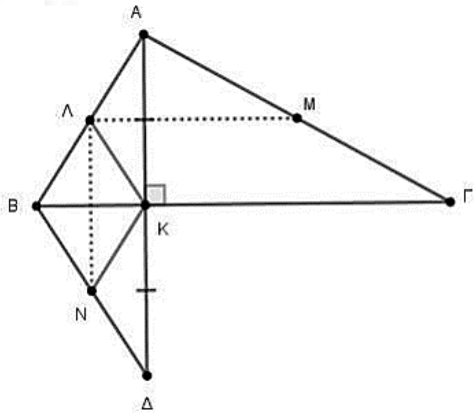
να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ. (Μονάδες 8)

1858. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση του ύψους του ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε ΑΚ = ΚΔ . Έστω Λ, Μ και Ν τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΒΛΚΝ είναι ρόμβος . (Μονάδες 9)

γ) $ΛΜ \perp ΛΝ$ (Μονάδες 9)



1859. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ,Λ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Φέρουμε τις μεσοκαθέτους μ1, μ2 των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.

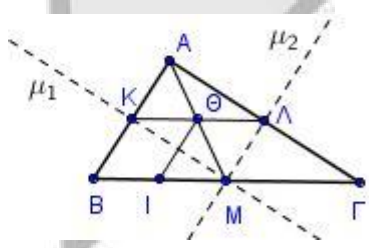
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

iii. $ΛΘ = \frac{ΒΓ}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ. (Μονάδες 6)

β) Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο, ώστε $ΒΙ = \frac{ΒΓ}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

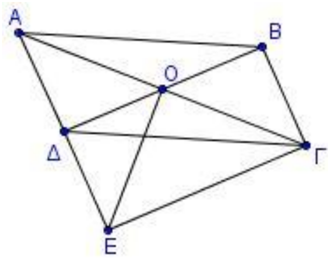


1862. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην ΑΓ στο κέντρο του Ο, αυτή να τέμνει την προέκταση της ΑΔ σε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΔΕ = ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

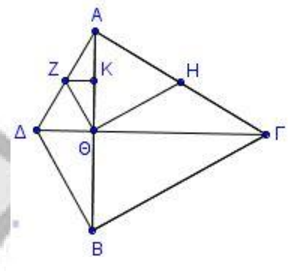


1866. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Με βάση την ΑΒ κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΒ, εκτός του τριγώνου ΑΒΓ, με $Δ = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Η των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η ΔΓ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Αν η ΔΓ τέμνει την ΑΒ στο Θ, να αποδείξετε ότι η γωνία ΖΘΗ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

γ) Αν η ΖΚ είναι κάθετη στην ΑΒ από το σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ΖΚ = \frac{ΑΔ}{4}$. (Μονάδες 8)



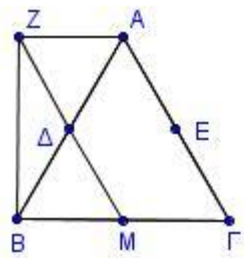
1868. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ,Ε και Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στη προέκταση του ΜΔ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $ΔΖ = ΔΜ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΒΜΔ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

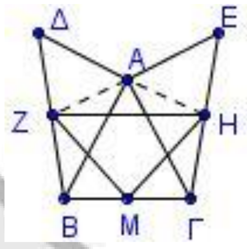
β) Το τετράπλευρο ΖΑΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Τα τμήματα ΖΕ και ΑΔ τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. (Μονάδες 7)

δ) Η ΒΖ είναι κάθετη στη ΖΑ. (Μονάδες 6)

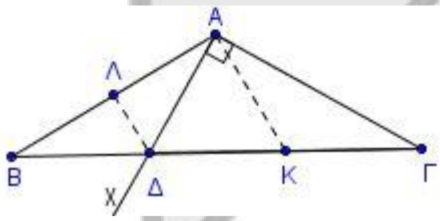


1870. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα ΑΔ κάθετο στην ΑΒ και τμήμα ΑΕ κάθετο στην ΑΓ με $A\Delta = AE$.
Θεωρούμε τα μέσα Ζ,Η και Μ των ΔΒ, ΕΓ και ΒΓ αντίστοιχα.



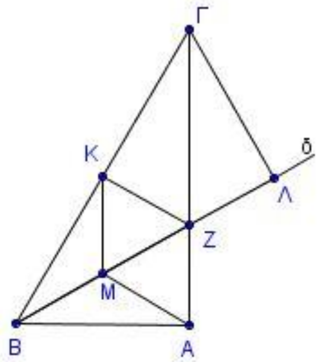
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
ii. Το τρίγωνο ΖΑΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
iii. Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ. (Μονάδες 7)
β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έγραψε τα εξής:
« 1. $A\Delta = AE$ από την υπόθεση
2. $AB = A\Gamma$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου
3. $\widehat{\Delta AB} = \widehat{EA\Gamma}$ ως κατακορυφήν
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία ίσα».
Ο καθηγητής είπε ότι η λύση περιέχει λάθος, μπορείς να το εντοπίσεις; (Μονάδες 5)

1871. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία Αχ κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:



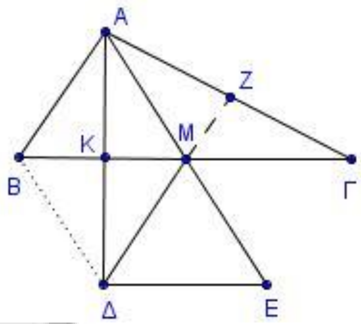
α) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
β) $\Delta\Gamma = 2B\Delta$ (Μονάδες 8)
γ) $\Lambda\Delta \parallel AK$ (Μονάδες 5)
δ) $AK = 2\Lambda\Delta$ (Μονάδες 4)

1872. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Τα σημεία Μ και Κ είναι τα μέσα των ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στη διχοτόμο Βδ, να αποδείξετε ότι:



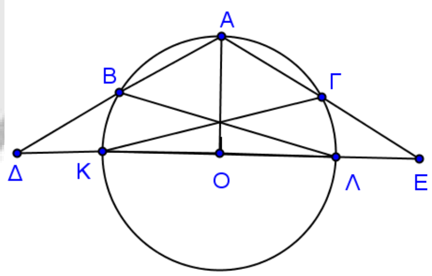
α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΖ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)
γ) $\Gamma Z = 2ZA$ (Μονάδες 7)
δ) $B\Lambda = A\Gamma$ (Μονάδες 6)

1873. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ τέτοια, ώστε $AM = AB$. Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $K\Delta = AK$.
Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ME = AM$.
Να αποδείξετε ότι:



α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E = 2KM$. (Μονάδες 7)
β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)
γ) Το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)
δ) Η προέκταση της ΔΜ τέμνει την ΑΓ στο μέσον του Ζ. (Μονάδες 6)

1874. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο $K\Lambda = 2\rho$. Έστω Α σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα ΟΑ να είναι κάθετη στην ΚΛ. Φέρουμε τις χορδές $AB = A\Gamma = \rho$. Έστω Δ και Ε τα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου ΚΛ. Να αποδείξετε ότι:



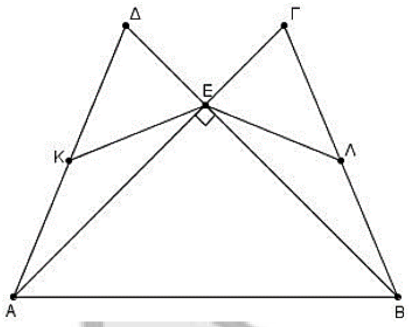
α) $\widehat{BA\Gamma} = 120^\circ$ (Μονάδες 7)
β) Τα σημεία Β και Γ είναι μέσα των ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)
γ) $K\Gamma = \Lambda B$ (Μονάδες 9)

1876.Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΑΒΔ (ΒΑ=ΒΔ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΔ=ΕΓ . (Μονάδες 7)

β) ΔΓ//ΑΒ . (Μονάδες 8)

γ) Το τρίγωνο ΕΚΛ είναι ισοσκελές και ΚΛ//ΑΒ. (Μονάδες 10)

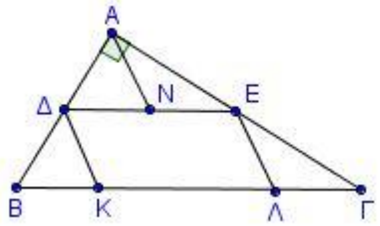


1880 . Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και Δ,Ε και Ν τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $ΔΚ = ΚΒ$ και $ΕΛ = ΛΓ$.Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΚΛ = 2Β$ και $ΕΛΚ = 2Γ$. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο με $ΔΕ = 2ΔΚ$. (Μονάδες 8)

γ) $ΑΝ = ΔΚ = \frac{ΒΓ}{4}$ (Μονάδες 7)

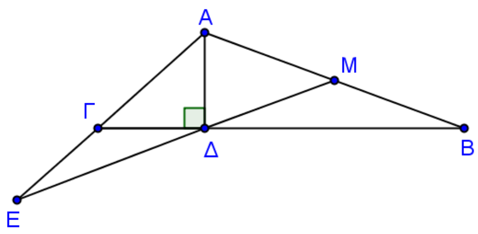


1881. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ\left(ΑΒ > ΑΓ\right)$, ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $ΓΔ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $Β = Ε$ (Μονάδες 8)

β) $Γ = 2Β = ΑΜΔ$ (Μονάδες 10)

γ) $ΓΕ < ΑΓ$ (Μονάδες 7)



1895. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΓ=ΓΒ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΚ και ΓΛ. Αν Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΚΕΛ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

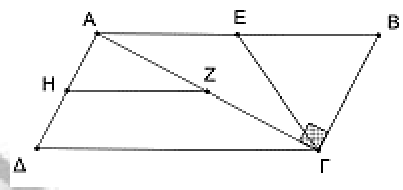
β) Η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΚΕ. (Μονάδες 15)

13540.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε η διαγώνιός του ΑΓ να είναι κάθετη στη ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΓΕ = ΖΗ. (Μονάδες 9)

ii. Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΕ . (Μονάδες 9)



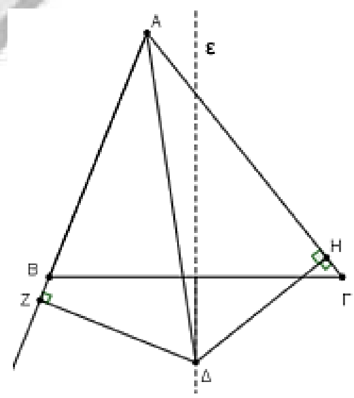
β) Αν $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

13522.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την μεσοκάθετο (ε) της ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔΖ και ΔΗ προς τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

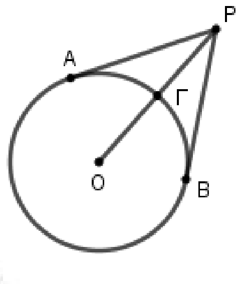
α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΔ. (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι ΒΖ = ΗΓ. (Μονάδες 09)

γ) Αν η γωνία $Α = 60^{O}$ και Μ το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΗΜ = ΖΔ. (Μονάδες 08)



13520. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Ρ εκτός του κύκλου. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Η ΡΟ τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο ΑΒ στο Γ και $APB = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

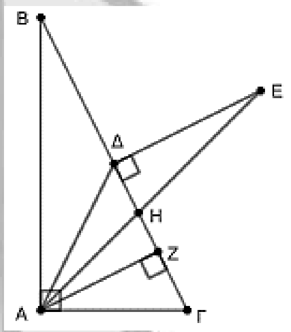


α) ΟΡ = 2ρ. (Μονάδες 10)

β) $A\Gamma B = 120^\circ$ (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι ρόμβος. Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 05)

13672. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και ΑΒ > ΑΓ. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε κάθετη στη ΒΓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο ΑΗ της γωνίας Α στο σημείο Ε. Έστω ΑΖ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:



α) $\Gamma AZ = \Delta AB$.

(Μονάδες 8)

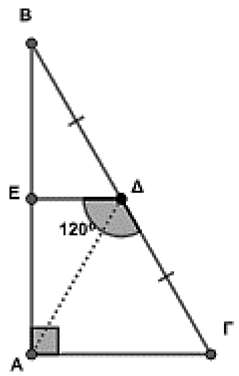
β) ΑΔ = ΔΕ.

(Μονάδες 9)

γ) $ZA\Delta = \Gamma - B$ (Μονάδες 8)

13855. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι

$E\Delta\Gamma = 120^\circ$, τότε:



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνία $\Delta\Gamma A$. (Μονάδες 5)

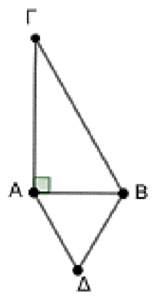
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 8)

γ) Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΖ=ΑΓ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H = \frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $AHZ = 90^\circ$.

(Μονάδες 12)

13853. Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$. Επίσης οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο.



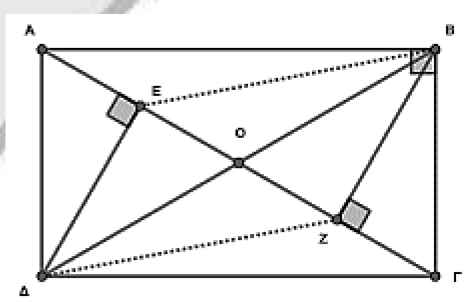
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Αν η περίμετρος του ΑΒΔ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

γ) Αν το σημείο Κ είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το ΑΔΒΚ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου Κ. Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το ΑΔΒΚ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)

13852. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ και με κέντρο Ο. Αν ΒΖ και ΔΕ είναι οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διαγώνιο ΑΓ, τότε:



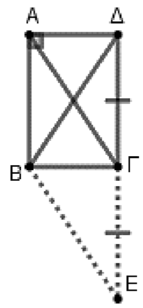
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΕΟ και ΒΖΟ είναι ίσα.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Αν $\Delta AE = 60^\circ$ και ΟΕ=5, να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ. (Μονάδες 12)

13851. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ=ΔΓ.

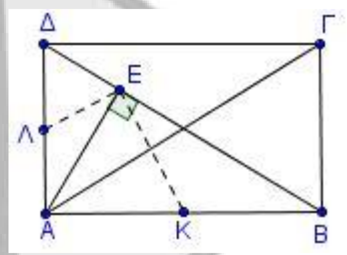


α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Αν $\Delta B E = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι ΒΔ=2ΑΔ. (Μονάδες 9)

14879. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε $AE \perp B\Delta$. Έστω Κ,Λ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως, τότε:

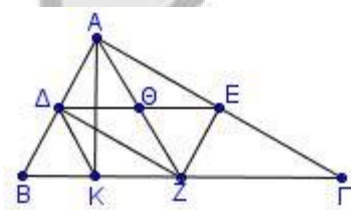


α) i. Να αποδείξετε ότι: $K E \Lambda = 90^\circ$ (Μονάδες 8)

ii. $K\Lambda = \dfrac{A\Gamma}{2}$ (Μονάδες 8)

β) Αν $B A \Gamma = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $K\Lambda = B\Gamma$. (Μονάδες 9)

14886. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$, τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ, ΔΕ, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

ii. $A\Theta = \Theta E = \dfrac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον είναι $\Gamma = 30^\circ$,

i. να βρείτε τη γωνία ΑΖΒ. (Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι $BK = \dfrac{B\Gamma}{4}$. (Μονάδες 5)

14881. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και ΑΜ η διάμεσός του. Από το Μ φέρουμε ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και ΜΛ κάθετη στην ΑΓ. Αν Ν, Ρ είναι τα μέσα των ΒΜ και ΓΜ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

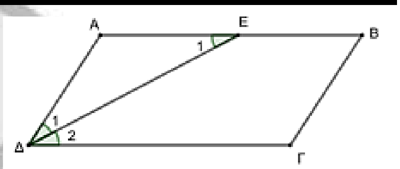
α) $NKM = NMK$ (Μονάδες 7)

β) Η ΜΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΝΜΑ. (Μονάδες 9)

γ) $AM = KN + \Lambda P$. (Μονάδες 9)

3ο Θέμα

12165. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την ΑΒ στο μέσο της Ε.



α) Να αποδείξετε ότι ΑΒ = 2·ΑΔ. (Μονάδες 6)

β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο Ε στην ΓΔ την τέμνει στο Η, τότε να αποδείξετε ότι $\dfrac{\Delta E}{HE} = 2$. (Μονάδες 7)

γ) Αν Μ είναι το μέσο της ΓΔ, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)

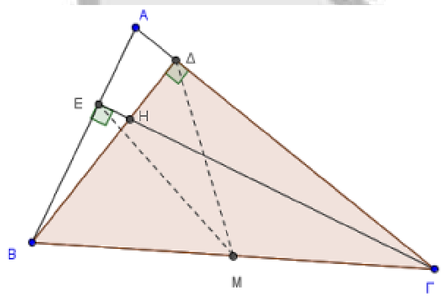
δ) Να αποδείξετε ότι $\Delta A \Gamma = 90^\circ$. (Μονάδες 6)

ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ - ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ

4ο Θέμα

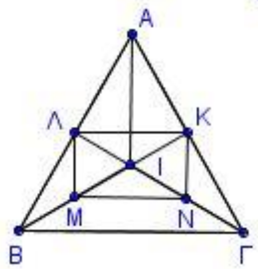
1706. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:
Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β=γ, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.
α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση *Π*, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της *Π* και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η *Π* και η *αντίστροφή της* ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

1716. Στο διπλανό σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. ΜΔ = ΜΕ (Μονάδες 10)
ii. Η ευθεία ΑΗ τέμνει κάθετα την ΒΓ και ότι ΑΗΔ = Γ, όπου Γ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)
β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΗ. (Μονάδες 10)

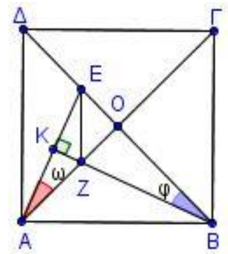
1719. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι. Αν τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των ΒΙ και ΓΙ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)
β) Τα τρίγωνα ΒΙΛ και ΓΙΚ είναι ίσα. (Μονάδες 5)
γ) Το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 5)
δ) Το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

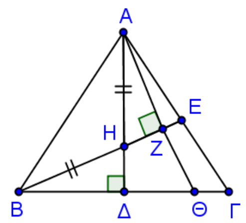
1728. Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
β) ΑΕΔ = ΒΖΓ. (Μονάδες 8)
γ) Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)

1748. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ. Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ, που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) Οι γωνίες ω και φ του σχήματος είναι ίσες. (Μονάδες 6)
β) ΒΖ = ΑΕ και ΓΖ = ΒΕ. (Μονάδες 12)
γ) Το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ. (Μονάδες 7)

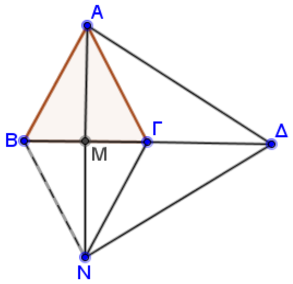
1754. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και το ύψος του ΑΔ. Στο ΑΔ θεωρούμε σημείο Η τέτοιο, ώστε ΗΑ = ΗΒ. Έστω ότι Ε είναι το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ. Φέρνουμε την ΑΖ κάθετη στη ΒΕ, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Θ.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ είναι ίσα. (Μονάδες 6)
ii. ΔΘ = ΘΖ (Μονάδες 6)
iii. Η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 6)
β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του

τριγώνου ΑΗΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

1760. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και ΑΜ το ύψος του στη πλευρά ΒΓ. Στην προέκταση του ΑΜ θεωρούμε τμήμα $ΜΝ = ΑΜ$. Στη προέκταση του ΒΓ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι:

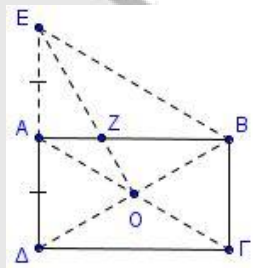


α) Το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΝ. (Μονάδες 9)

1764. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $ΑΒ > ΒΓ$, $ΑΓ = 2ΒΓ$. Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Ε ώστε $ΔΑ = ΑΕ$. Να αποδείξετε ότι:

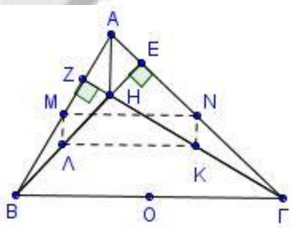


α) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)

γ) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ΔΖ \perp ΕΒ$. (Μονάδες 8)

1777. Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ, ΓΖ τα ύψη από τις κορυφές Β,Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα Μ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

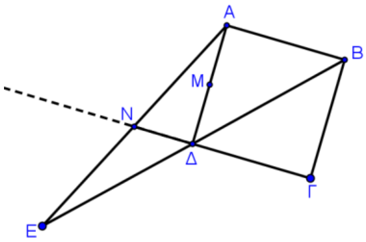
i. $ΜΝ = ΛΚ$ (Μονάδες 6)

ii. $ΝΚ = ΜΛ = \frac{ΑΗ}{2}$ (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $\hat{ΜΟΚ} = 90^\circ$. (Μονάδες 7)

1780. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $ΔΕ = ΔΒ$. Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΕ και ΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι $ΔΝ = ΔΜ$ (Μονάδες 6)

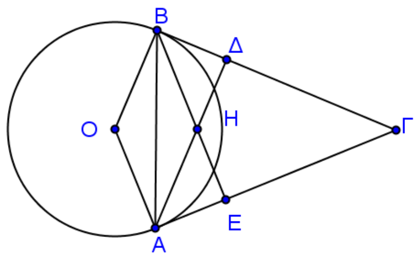
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΜΝ \perp ΑΓ$ (Μονάδες 7)

ii. $ΓΜ \perp ΑΝ$ (Μονάδες 7)

1823. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται σε σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

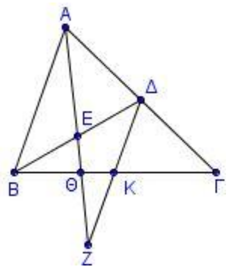


α) Το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) Τα σημεία Ο,Η,Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

1827. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου ΒΔ. Στην προέκταση της ΑΕ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $ΕΖ = ΑΕ$ και έστω Θ το σημείο τομής της ΑΖ με την πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

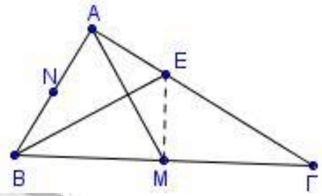


α) Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΒΔΖ. (Μονάδες 9)

1835. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$ και $\Gamma = 30^\circ$ με Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.



α) Να αποδείξετε ότι:

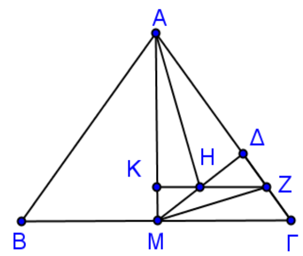
i. η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Β. (Μονάδες 6)

ii. $ΑΕ = \dfrac{ΓΕ}{2}$ (Μονάδες 6)

iii. η ΒΕ είναι μεσοκάθετος της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 7)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει την ΒΕ στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Η και Ν είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

1843. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε τη ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε σημείο Η το μέσο του ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

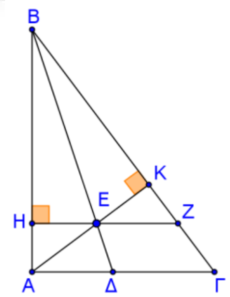


α) $ΗΖ = \dfrac{ΒΓ}{4}$ (Μονάδες 9)

β) $ΜΖ \parallel ΒΔ$ (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ. (Μονάδες 8)

1865. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος ,που τέμνονται στο Ε.Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι :

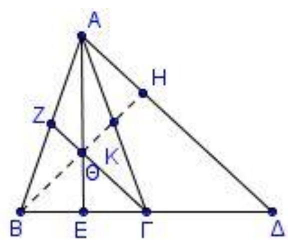
i) Τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii) Το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

iii) Η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ. (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ. (Μονάδες 6)

1878. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Προεκτείνουμε το ΒΓ (προς το Γ) κατά τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$. Φέρουμε τις διαμέσους ΑΕ και ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Θ. Το ΒΘ προεκτεινόμενο, τέμνει το ΑΓ στο Κ και το ΑΔ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

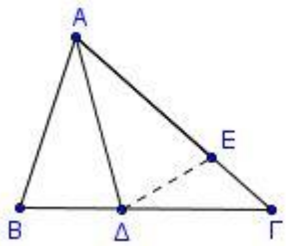


α) Το ΖΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β) $ΑΗ = ΘΓ$ (Μονάδες 9)

γ) $ΑΗ = 2ΖΘ$ (Μονάδες 7)

1887. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΑΕ = ΑΒ$.Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

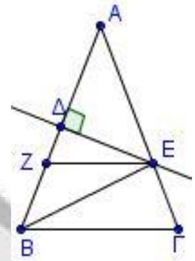
β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΕ. (Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ. (Μονάδες 9)

ΤΡΑΠΕΖΙΟ

2ο Θέμα

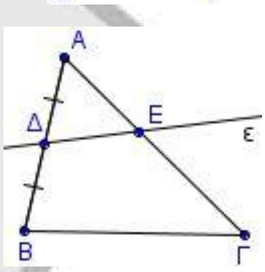
1529. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.



α) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΒΕ$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

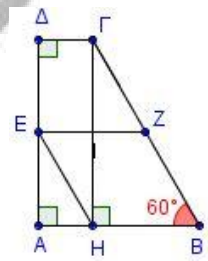
1536. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ κι σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ.



α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

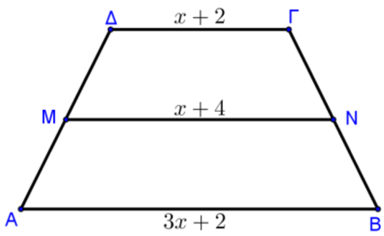
1549 . Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $Α = Δ = 90^\circ$, $ΑΒ > ΓΔ$, $ΒΓ = 4ΓΔ$ και $Β = 60^\circ$. Φέρουμε την $ΓΗ \perp ΑΒ$ και θεωρούμε τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΑΒ = 3ΓΔ$ (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΕΗΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

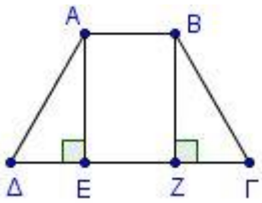
1550. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ // ΓΔ$, $ΑΒ > ΓΔ$ και $ΑΔ = ΒΓ$.



α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι ΑΒ = 3x + 2, ΓΔ = x + 2 και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι ΜΝ = x + 4, τότε να δείξετε ότι x = 2. (Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\hat{Γ}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{Β}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου. (Μονάδες 13)

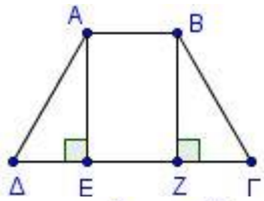
1562. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$. Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΔΕ = ΓΖ$ (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 13)

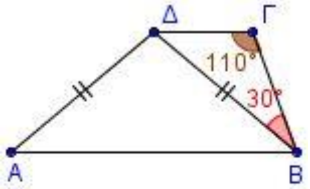
1563. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$. Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΔΕ = ΓΖ$ (Μονάδες 12)

β) $ΑΖ = ΒΕ$ (Μονάδες 13)

1577. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν η γωνία $Γ = 110^\circ$ και η γωνία $ΔΒΓ = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $ΑΔΒ$. (Μονάδες 25)



1579. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ και $ΑΒ < ΓΔ$. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε $ΑΕ = ΕΖ = ΖΒ$ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΖ = ΓΕ$ (Μονάδες 13)

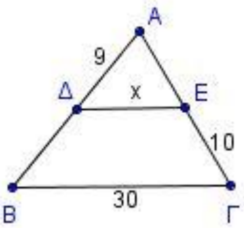
β) Τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)

1612. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $ΑΔ = 9$, $ΕΓ = 10$ και $ΒΓ = 30$.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

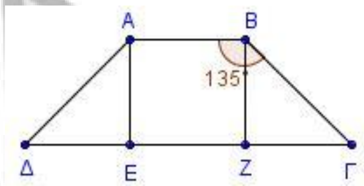
γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔΕ. (Μονάδες 8)



1629. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΓΔ > ΑΒ$ και $Β = 135^\circ$. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΕΔ = ΒΖ = ΓΖ$. (Μονάδες 15)

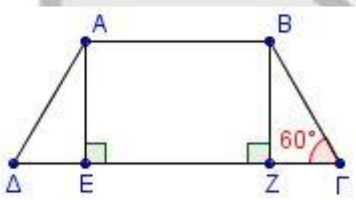


1634. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $Γ = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη περίμετρο του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)

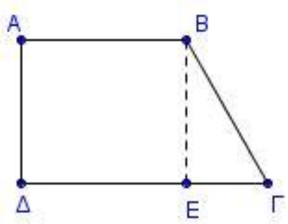


1635. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΑΒ = ΒΓ = 4$, $Α = 90^\circ$ και $Γ = 60^\circ$. Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από την κορυφή Β.

α) Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $2ΕΓ = ΒΓ$. (Μονάδες 9)

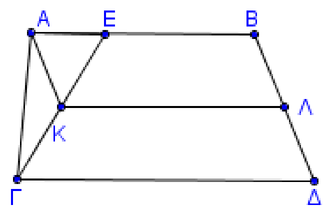
γ) Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ,ΒΓ αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΜΝ. (Μονάδες 8)



1644. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ με $ΑΒ = 3$, $ΓΔ = 4$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε $ΑΕ = 1$. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ. (Μονάδες 13)

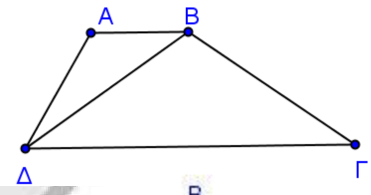
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



1650. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ και $ΒΔ = ΒΓ$. Αν $ΔΒΓ = 110^\circ$ και $ΑΔΒ = 25^\circ$, να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία Γ. (Μονάδες 11)

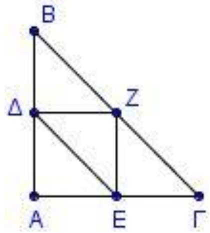
β) Τη γωνία Α. (Μονάδες 14)



1666. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(Α = 90^\circ)$ θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

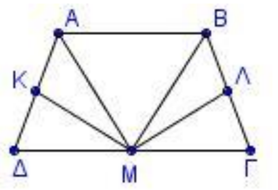
β) Το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 13)



1669. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΚΜ = ΛΜ$ (Μονάδες 12)

β) $ΑΜ = ΒΜ$ (Μονάδες 13)

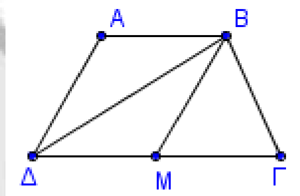


1694. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπεζίου,

α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$. (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου. (Μονάδες 13)

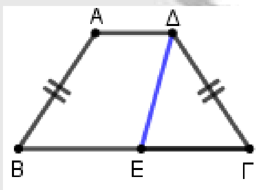
1697. Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\Delta = 60^\circ$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:



α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 9)

β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 16)

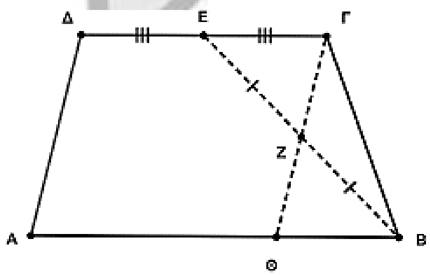
13497. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ > ΔΓ. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $\widehat{A\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\hat{A} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

13824. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΓΔ και ΒΕ αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της ΑΒ και της προέκτασης της ΓΖ, να αποδείξετε ότι:

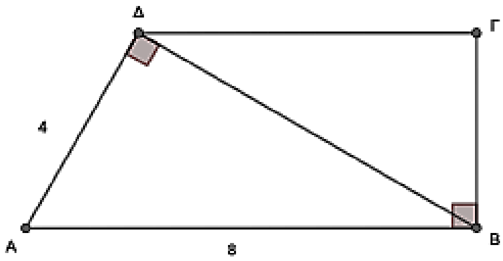


α) Τα τρίγωνα ΓΕΖ, ΘΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) ΕΓ=ΘΒ. (Μονάδες 5)

γ) Το τετράπλευρο ΕΒΘΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

13828. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:

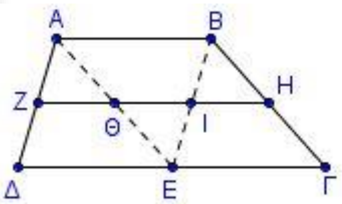


α) Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{\Delta AB}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ. (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

1711. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης Ζ,Η,Ε είναι τα μέσα των ΑΔ,ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ,ΒΕ στα σημεία Θ,Ι αντίστοιχα.



α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι τα σημεία Θ,Ι είναι μέσα των ΑΕ,ΒΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι $ZH = \frac{3}{2}AB$. (Μονάδες 10)

1715. Δίνεται ευθεία (ε) και δύο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ,ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ,Ν μέσα των ΑΒ,ΓΔ αντίστοιχα.

α) Αν τα Α,Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε)

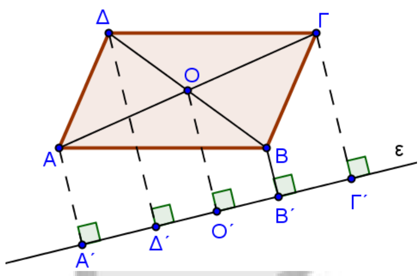
i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1) $A\Delta < B\Gamma$ (Μονάδες 4)
2) $A\Delta = B\Gamma$. (Μονάδες 4)

ii. να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. (Μονάδες 6)

β) Αν η (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο) και να δείξετε ότι τα Μ,Ν ταυτίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9+2)

1718. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ των κορυφών του Α,Β,Γ,Δ αντίστοιχα σε μια ευθεία ε.



α) Αν η ευθεία ε αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο και είναι $AA' = 3$, $BB' = 2$, $\Gamma\Gamma' = 5$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του παραλληλογράμμου από την ε είναι ίση με 4. (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την απόσταση ΔΔ΄. (Μονάδες 9)

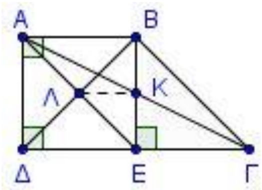
β) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

1722. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ.

Να αποδείξετε ότι:

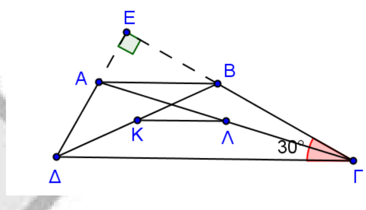
α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 6)
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ. (Μονάδες 6)
δ) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

1727. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:



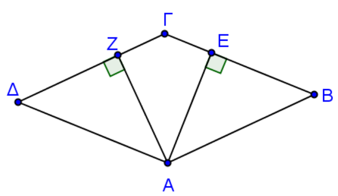
α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ (Μονάδες 8)
β) $B\Delta = AE$ (Μονάδες 9)
γ) $K\Lambda = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ (Μονάδες 8)

1736. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω Κ,Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:



α) $AB = 2AE$ (Μονάδες 10)
β) $K\Lambda = A\Delta$ (Μονάδες 10)
γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο;
Να αιτιολογήσετε τη απάντησή σας. (Μονάδες 5)

1742. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με $\hat{B} \neq 60^\circ$. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
β) Η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του ΖΕ. (Μονάδες 9)
γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΝΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

1747. Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο ΑΒ και δύο ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ΄ ένα σημείο του Ε και τέμνει τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$ (Μονάδες 8)

β) Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσον του τόξου ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου. (Μονάδες 9)

1755. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ είναι $AB = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι $BA\Delta = 120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ. (Μονάδες 8)

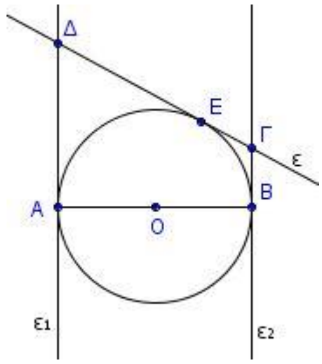
1757. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε $A = \Delta = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3}A\Delta$. Επιπλέον φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Αν Κ,Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ. (Μονάδες 9)

1758. Δίνεται κύκλος (Ο,R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

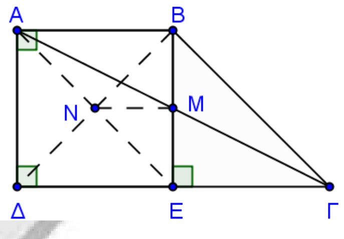


α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$ (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ανάλογα με τη θέση του σημείου Ε στο ημικύκλιο ΑΒ. (Μονάδες 7)

1767. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $A = \Delta = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $B = 3\Gamma$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο σημείο Ν.
Να αποδείξετε ότι:

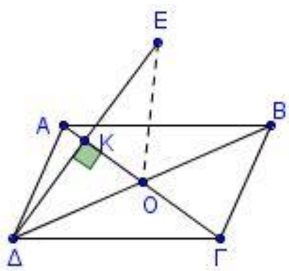


α) $\Gamma = 45^\circ$ (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) $AE \perp B\Delta$ (Μονάδες 9)

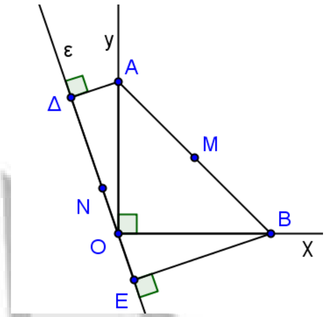
1770. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκταση του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:



α) $EO = \frac{B\Delta}{2}$ (Μονάδες 8)

β) $\Delta EB = 90^\circ$ (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



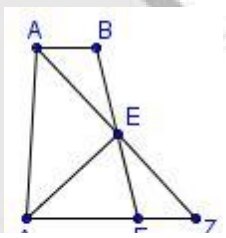
1778. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y = 90^\circ$ και Α,Β σημεία των ημιευθειών Oy, Ox με $OA = OB$. Η ευθεία (ε) διέρχεται από το Ο και αφήνει τις ημιευθείες Ox, Oy στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετος από το σημείο Α στην (ε) την τέμνει στο Δ και η κάθετος από το σημείο Β στην (ε) την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) $A\Delta + BE = \Delta E$ (Μονάδες 7)

γ) $MN = \dfrac{\Delta E}{2}$, όπου ΜΝ το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των ΔΕ και ΑΒ. (Μονάδες 7)

δ) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 4)

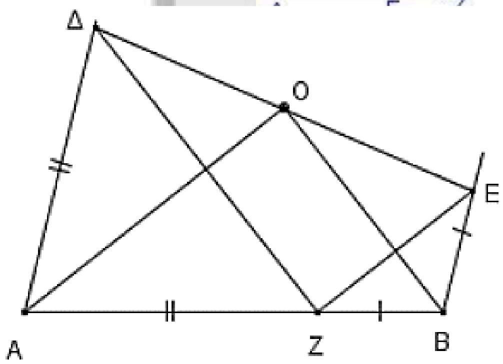


1783. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ ισχύει ότι $AB + \Gamma\Delta = A\Delta$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ. (Μονάδες 10)

γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)



1784. Δίνεται τραπέζιο ΑΔΕΒ, με ΑΔ//ΒΕ, στο οποίο ισχύει ότι ΑΒ=ΑΔ+ΒΕ, και Ο το μέσον της ΔΕ. Θεωρούμε σημείο Ζ στην ΑΒ τέτοιο ώστε ΑΖ=ΑΔ και ΒΖ=ΒΕ. Αν γωνία $\Delta\hat{A}Z = \varphi$,

α) να εκφράσετε τη γωνία ΑΖΔ σε συνάρτηση με τη φ. (Μονάδες 8)

β) να εκφράσετε τη γωνία ΕΖΒ σε συνάρτηση με τη φ. (Μονάδες 8)

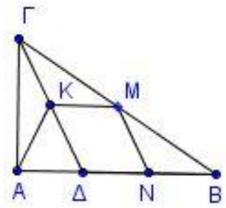
γ) να αποδείξετε ότι οι ΟΑ και ΟΒ είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΔΖ και ΖΕ αντίστοιχα. (Μονάδες 9)

1786. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2B\Gamma$ και τη γωνία Β αμβλεία. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ευθεία ΒΓ και έστω Μ,Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η ΕΝ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΕΓ. (Μονάδες 8)

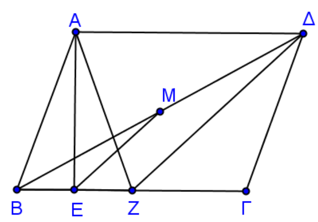


1789. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ,Μ,Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με ΑΒ/2. (Μονάδες 8)



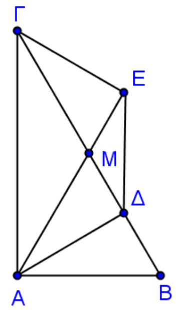
1790. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70° και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε $BE = EZ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι $EM = \dfrac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 8)

1791. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{Α} = 90^\circ$ και $\text{Γ} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ. Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ, η οποία την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

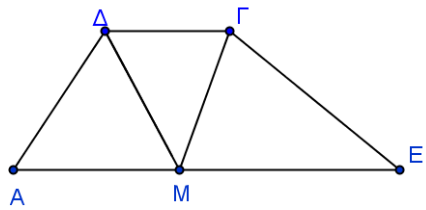
β) $\text{ΜΕ} = \text{ΜΔ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{4}$ (Μονάδες 9)

γ) Το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

1797. α) Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ,Λ,Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ,Λ,Μ,Ν των πλευρών του ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας. (Μονάδες 12)

1815. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\text{ΑΒ} \parallel \text{ΓΔ}$ και $\text{ΑΒ} = \text{ΑΔ} + \text{ΒΓ}$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

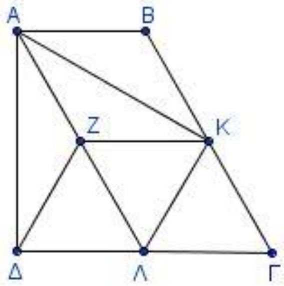


α) Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)

1821. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(\text{Α} = \text{Δ} = 90^\circ\right)$ με $\text{ΒΓ} = \text{ΓΔ} = 2\text{ΑΒ}$ και Κ,Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΛ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

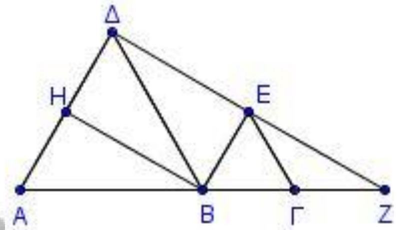


α) $\text{ΒΓ} = 2\text{ΔΖ}$. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) $\text{ΑΚΛ} = 90^\circ$. (Μονάδες 8)

1829. Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε $\text{ΑΒ} = 2\text{ΒΓ}$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και η ευθεία ΔΕ τέμνει την (ε) στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:

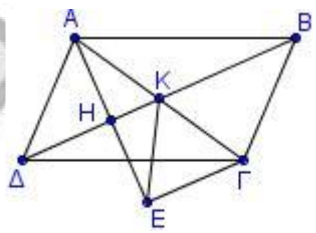


α) Το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

1830. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\text{ΑΗ} = \text{ΗΕ}$. Να αποδείξετε ότι:

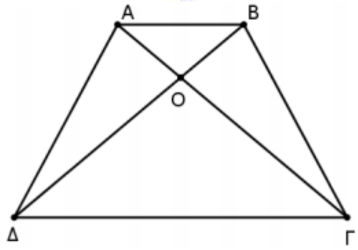


α) Το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

1834. Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$, $\text{ΑΓ} = \text{ΒΔ}$ και $\text{ΑΒ} < \text{ΓΔ}$.

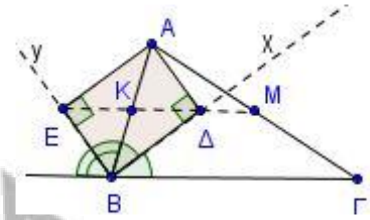


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\text{ΔΑΒ} = \text{ΑΒΓ}$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

1838. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του Βx της γωνίας Β του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας Β. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ. (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου $\alpha = ΒΓ$. (Μονάδες 8)

1841. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στη διαγώνιο ΒΔ. Αν Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τη διαγώνιο ΒΔ, τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) $ΖΓ = 2ΟΕ$ (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο με κορυφές Β, Δ, Ζ και Γ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

1842. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα $ΒΕ = ΑΒ$ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα $ΔΖ = ΑΔ$.

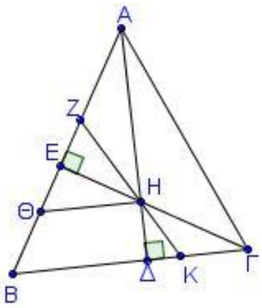
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)

ii. Τα σημεία Ε,Γ και Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε $ΚΛ \parallel ΔΒ$ και $ΚΛ = \frac{3}{2}ΔΒ$. (Μονάδες 9)

1845. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $Β = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας ΕΗΑ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΖΗ = 2ΖΕ$ (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

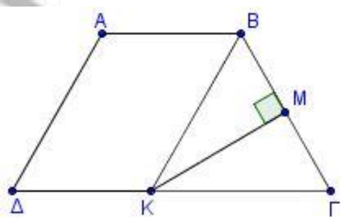
1856. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΒΓ και Β<90° θεωρούμε σημείο Ζ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) τέτοιο ώστε ΓΖ=ΒΓ. Αν Ε είναι σημείο της ΑΒ, τέτοιο ώστε ΕΓ=ΓΒ, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία ΒΕΖ είναι ορθή. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

1853. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$, $Β = 2Γ$ και $ΑΒ = ΒΓ = ΑΔ = \frac{ΓΔ}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Β, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς τη ΒΓ το τέμνει στο Μ.



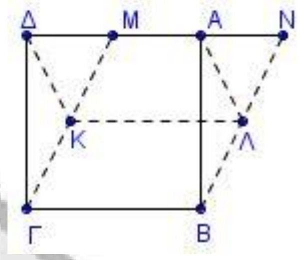
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ. (Μονάδες 7)

1854. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α) κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα.



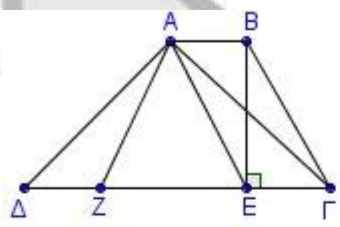
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

1860. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Ζ της ΓΔ, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και ΒΕ το ύψος του τραπεζίου, να αποδείξετε ότι:

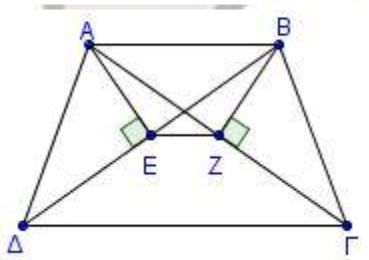


α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Τα τρίγωνα ΔΑΖ και ΓΑΕ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

1861. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

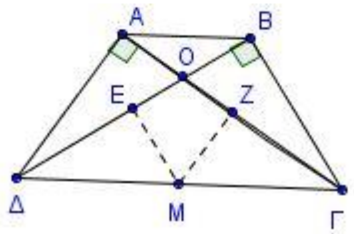
β) $AE = BZ$. (Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

δ) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ. (Μονάδες 5)

1867. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB \parallel \Gamma\Delta)$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στη ΒΓ.

Θεωρούμε τα μέσα Μ,Ε και Ζ των ΓΔ,ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $ME = MZ$. (Μονάδες 6)

β) Η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ. (Μονάδες 6)

1884. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΖΕ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής στο α) i. ερώτημα έδωσε την εξής απάντηση:

≪ Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση του ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ABK}$ και $\overset{\Delta}{A\Gamma K}$ έχουν

1. $BK = K\Gamma$
2. $BAK = \Gamma AK$ επειδή ΑΚ διχοτόμος της γωνίας Α
3. $ABK = A\Gamma K$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.≫

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία - Πλευρά - Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ. (Μονάδες 7)

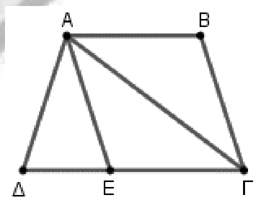
1885. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ,Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)
β) οι γωνίες ΗΔΖ και ΗΕΖ είναι ίσες. (Μονάδες 8)
γ) οι γωνίες ΕΔΖ και ΕΗΖ είναι ίσες. (Μονάδες 9)

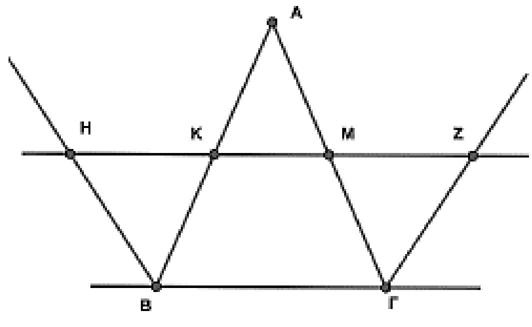
1893. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB > B\Gamma$ τέτοιο, ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60°. Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου. (Μονάδες 8)
ii. $AM = \frac{1}{4}A\Gamma$ (Μονάδες 7)
β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

13519. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ>ΑΔ. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε ΑΕ = ΑΔ. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.
α) Να αποδείξετε ΑΜ ⊥ ΔΕ. (Μονάδες 7)
β) Να αποδείξετε ότι 2ΜΚ = 2ΑΒ - ΑΔ. (Μονάδες 9)
γ) Φέρνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΓΖ = ΑΒ – ΑΔ. (Μονάδες 9)

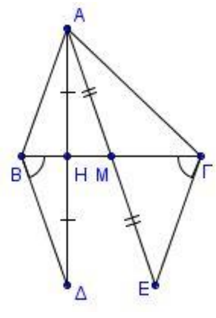
13539. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και $A = 108^\circ$. Στη βάση ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία Α .
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)
ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



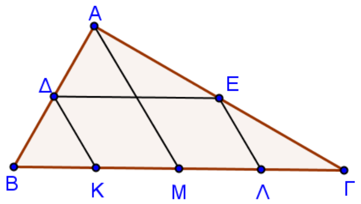
13838. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), με Κ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών Β και Γ στα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 11)
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 14)



14885. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα $\mathbf{H\Delta = AH}$ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα $ME = AM$.
Να αποδείξετε ότι:
α) i. $AB = \Gamma E$
ii. $AB = B\Delta$ (Μονάδες 8)
β) $\Gamma B\Delta = B\Gamma E$ (Μονάδες 8)
γ) i. Εξετάστε αν το τμήμα ΒΔ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓΕ. (Μονάδες 5)
ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)



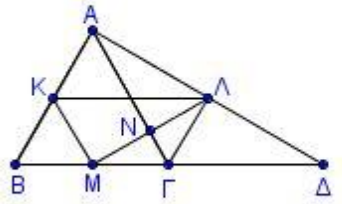
14888. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathbf{A = 90^\circ}$. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Κ, Μ, Λ ώστε $\mathbf{BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma}$. Αν τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΚΔΑΜ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\mathbf{\frac{3}{8}B\Gamma}$. (Μονάδες 12)

14882. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\mathbf{\Gamma\Delta = B\Gamma}$. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, τότε:



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

3ο Θέμα

12418. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ>ΓΔ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπεζίου ΑΒΓΔ ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ με βάση ΑΒ. Αν Μ είναι το μέσο της βάσης ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

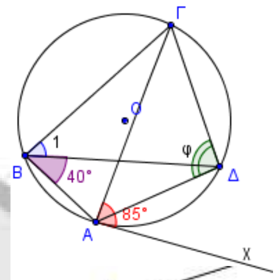
α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 11)

β) Η διάμεσος ΕΜ του τριγώνου ΕΔΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΕΒ. (Μονάδες 14)

Εγγεγραμμένη-επίκεντρη-υπό χορδής και εφαπτομένης

2ο Θέμα

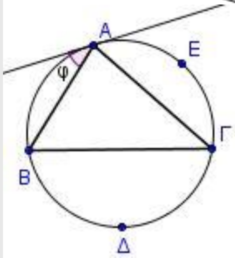
1530. Στο διπλανό σχήμα η Αx είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο,ρ) σε σημείο του Α και επιπλέον $\Gamma \hat{A} x = 85^\circ$ και $\Delta \hat{B} A = 40^\circ$.



α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 = 45^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία φ. (Μονάδες 15)

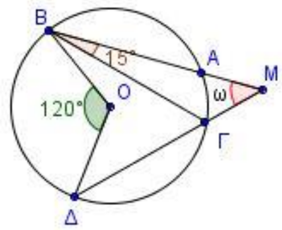
1561. Στο διπλανό σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου ΒΔΓ είναι 160°,



α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου ΑΕΓ. (Μονάδες 7)

1580. Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία ΒΟΔ είναι 120° και η γωνία ΓΒΑ είναι 15°.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΓΔ. (Μονάδες 12)

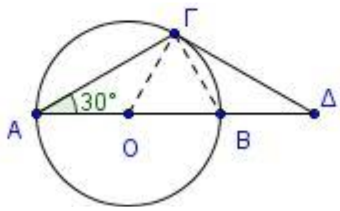
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45°. (Μονάδες 13)

1581. Σε κύκλο κέντρου Ο δίνονται οι χορδές ΑΒ και ΑΔ τέτοιες ώστε η γωνία ΒΑΔ να είναι 44°. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΒΓΔΟ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία x. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136°. (Μονάδες 13)

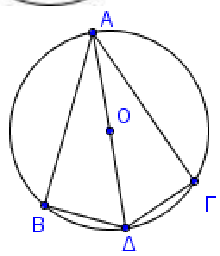
1626. Δίνεται κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΑΓ τέτοια, ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Δ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

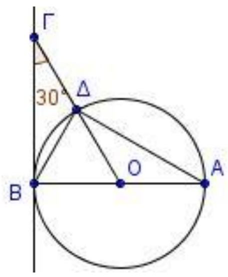
1663. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:



α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

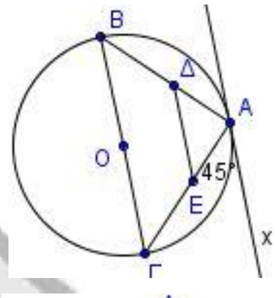
1665. Θεωρούμε κύκλο(Ο, ρ) και διάμετρό του ΑΒ. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο, ώστε η γωνία ΒΓΟ να είναι ίση με 30°. Αν η ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ, να αποδείξετε ότι:



α) $O\Gamma = 2OA$ (Μονάδες 12)

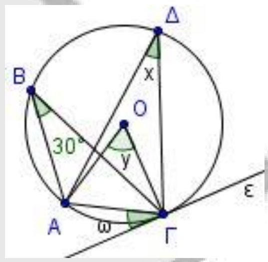
β) $B\Gamma = A\Delta$ (Μονάδες 13)

1672. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α ώστε να σχηματίζει με τη χορδή ΑΓ γωνία 45°. Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.



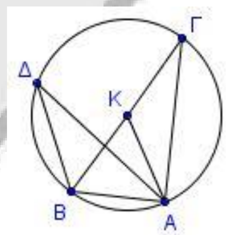
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)

1695. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο, ρ) στο σημείο Γ.



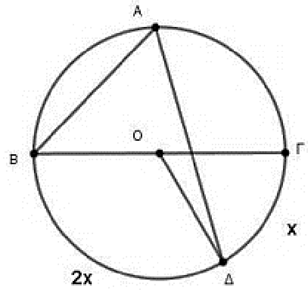
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x,y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας. (Μονάδες 15)
β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές. (Μονάδες 10)

1696. Έστω κύκλος κέντρου Κ, μια διάμετρός του ΒΓ και σημείο Α του κύκλου τέτοιο, ώστε $ΒΑ = ΚΓ$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ,



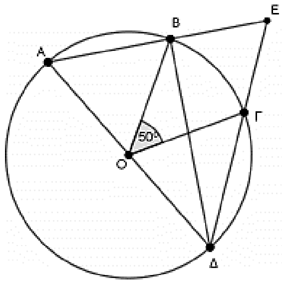
α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)
β) να υπολογίσετε τη γωνία ΒΔΑ. (Μονάδες 9)
γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

1703. Έστω κύκλος κέντρου Ο και διαμέτρου ΒΓ. Θεωρούμε τα σημεία Α και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της ΒΓ, τέτοια ώστε το τόξο ΒΔ να είναι διπλάσιο του τόξου ΔΓ.



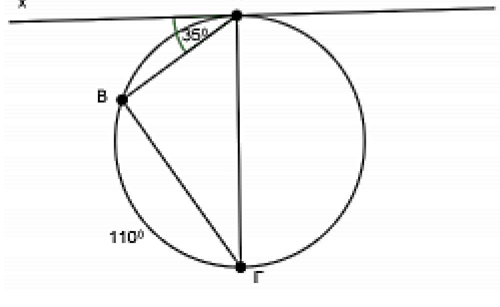
Να υπολογίσετε:
α) το μέτρο x του τόξου ΓΔ, (Μονάδες 8)
β) τη γωνία ΒΟΔ, (Μονάδες 9)
γ) τη γωνία ΒΑΔ. (Μονάδες 8)

12642. Σε κύκλο με κέντρο το Ο, παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε η ΑΔ να είναι διάμετρος και η γωνία ΒΟΓ να ισούται με 50^o. Αν η προέκταση της ΑΒ προς το Β, τέμνει την προέκταση της ΔΓ προς το Γ στο Ε, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:



α) το μέτρο της γωνίας ΒΔΓ. (Μονάδες 10)
β) το μέτρο της γωνία ΑΕΔ. (Μονάδες 15)

12637. Στο διπλανό σχήμα η xx΄ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Α και επιπλέον ισχύουν:
$ΒΑx = 35^\circ$ και $ΒΓ = 110^\circ$.

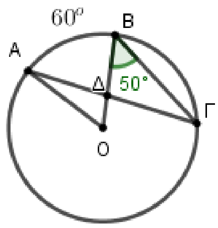


α) Ποιο είναι το μέτρο της γωνίας Γ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σας. (Μονάδες 13)

12638. Στον κύκλο του σχήματος, το Ο είναι το κέντρο του, το τόξο ΑΒ ισούται με 60^o και η γωνία Β ισούται με 50^o . Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να υπολογίσετε:

α) πόσες μοίρες είναι η γωνία Γ. (Μονάδες 10)

β) πόσες μοίρες είναι η γωνία ΑΔΟ (Μονάδες 15)

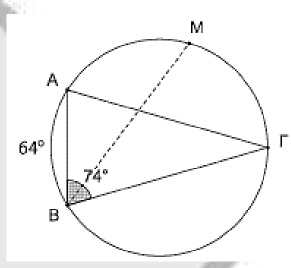


13441. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο, $\hat{B} = 74^\circ$, το μέτρο του τόξου ΑΒ που δεν περιέχει το σημείο Γ ισούται με 64^o και Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΓ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. (Μονάδες 5)



13740. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε μια τυχαία χορδή του ΑΒ, την οποία προεκτείνουμε προς το μέρος του Β κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο της Β που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι:

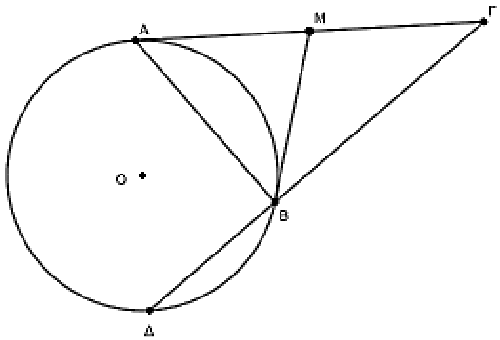
α) ΔΑ = ΔΓ. (Μονάδες 12)

β) Η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 13)

13747. Από σημείο Μ εξωτερικό ενός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε το τμήμα ΑΜ προς το μέρος του Μ και παίρνουμε τμήμα ΜΓ = ΑΜ. Από το σημείο Γ φέρουμε την τέμνουσα ΓΒΔ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Τα σημεία Α και Δ είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 12)

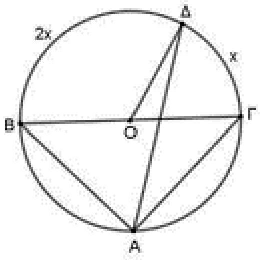


13753. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) με διάμετρο ΒΓ. Έστω Α και Δ σημεία του κύκλου τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά ημικύκλια ως προς τη διάμετρο ΒΓ. Τα μέτρα των τόξων ΒΔ και ΔΓ είναι 2x και x αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το μέτρο:

α) της γωνίας ΒΑΓ. (Μονάδες 7)

β) x του τόξου ΓΔ. (Μονάδες 8)

γ) της γωνίας ΒΟΔ. (Μονάδες 10)

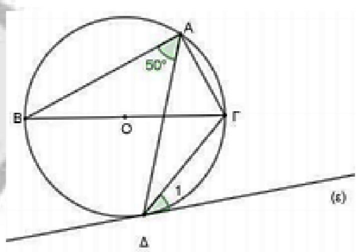


13754. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) με διάμετρο ΒΓ και τα σημεία Α, Δ του κύκλου εκατέρωθεν της διαμέτρου ΒΓ έτσι ώστε $B\hat{A}\Delta = 50^\circ$. Φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) στον κύκλο στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας :

α) $B\hat{A}\Gamma$. (Μονάδες 6)

β) $B\hat{\Gamma}\Delta$. (Μονάδες 9)

γ) $\hat{\Delta}_1$. (Μονάδες 10)

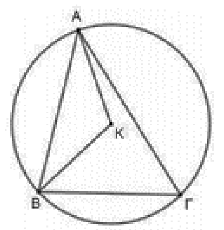


13756. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο Σε κύκλο (Κ, ρ). Να αποδείξετε ότι:

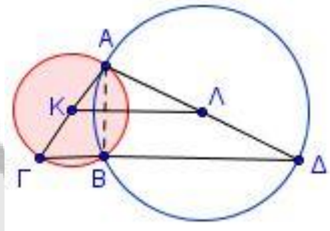
α) $A\hat{K}B = 2A\hat{\Gamma}B$. (Μονάδες 7)

β) το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

γ) $K\hat{A}B + A\hat{\Gamma}B = 90^\circ$. (Μονάδες 13)

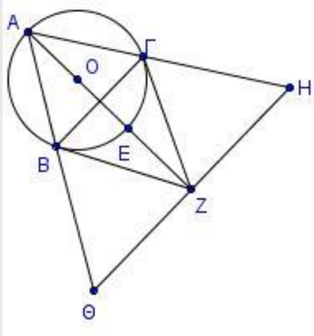


1717. Δύο κύκλοι (Κ, ρ) , (Λ, R) τέμνονται σε δύο σημεία Α,Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, τότε να αποδείξετε ότι:



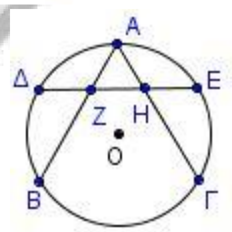
α) $ΑΒΓ=90^\circ$ (Μονάδες 5)
β) τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)
γ) το τετράπλευρο ΚΛΓΔ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)

1720. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Τα τμήματα ΓΖ και ΒΖ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Αν το τμήμα ΘΗ είναι κάθετο στο τμήμα ΑΖ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:



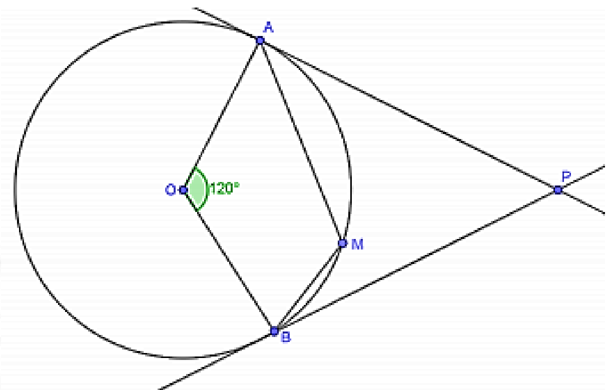
α) Το τρίγωνο ΖΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)
β) Το τετράπλευρο ΑΓΖΒ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)
γ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

1739. Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τα ίσα τόξα ΑΒ και ΑΓ, το καθένα ίσο με 120°. Έστω Δ και Ε τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



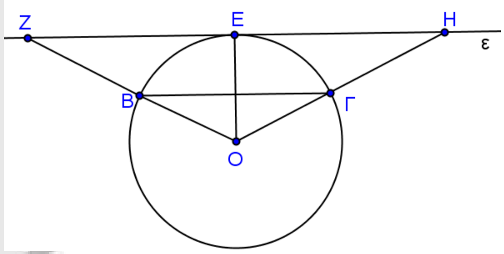
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)
β) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους. (Μονάδες 10)
γ) Η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ. (Μονάδες 7)

1768. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και μια επίκεντρη γωνία ΑΟΒ ίση με 120°. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β τέμνονται στο Ρ. Θεωρούμε σημείο Μ του τόξου ΑΒ και φέρουμε τις χορδές ΑΜ και ΒΜ, οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν τις ΡΒ και ΡΑ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)
β) $ΜΑΒ+ΜΒΑ=60^\circ$. (Μονάδες 8)
γ) Για ποια θέση του Μ είναι $ΑΜ\perp ΒΡ$; (Μονάδες 9)

1772. Έστω κύκλος (Ο, ρ) και Ε το μέσον του τόξου του ΒΓ. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στο κύκλο στο Ε. Οι προεκτάσεις των ΟΒ,ΟΓ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

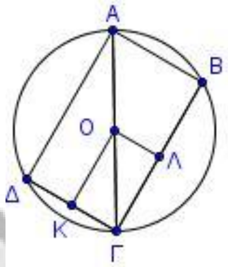


α) $ΒΓ \parallel ΖΗ$ (Μονάδες 5)
β) $ΟΖ=ΟΗ$ (Μονάδες 5)
γ) Αν Β το μέσον του ΟΖ
i. να αποδείξετε ότι $ΒΕΖ=\frac{ΖΟΗ}{4}$. (Μονάδες 8)
ii. να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΟΗ. (Μονάδες 7)

12419. Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, r), με R> r, τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διάκεντρο των κύκλων, η οποία τέμνει τους κύκλους (Κ, R) και (Λ, r) στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) ΓΔ=2ΚΛ (Μονάδες 15)

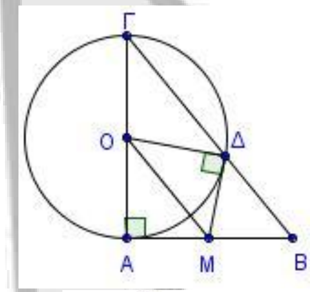
β) Τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 10)

1848. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε τις χορδές $A\Delta = B\Gamma$. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



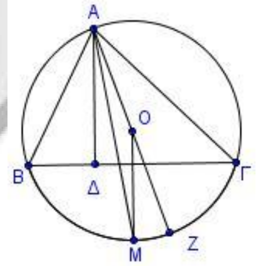
α) Οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες. (Μονάδες 6)
β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)
γ) Η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 7)
δ) Το τετράπλευρο ΟΛΓΚ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

1883. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$. Με διάμετρο την πλευρά του ΑΓ φέρουμε κύκλο που τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο Δ. Από το Δ φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα το οποίο τέμνει την ΑΒ στο Μ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\widehat{\Gamma A \Delta} = \hat{B}$ (Μονάδες 9)
β) Το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
γ) Το Μ είναι το μέσο του ΑΒ. (Μονάδες 7)

1892. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο. Θεωρούμε το μέσο Μ του κυρτογώνιου τόξου ΒΓ και το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

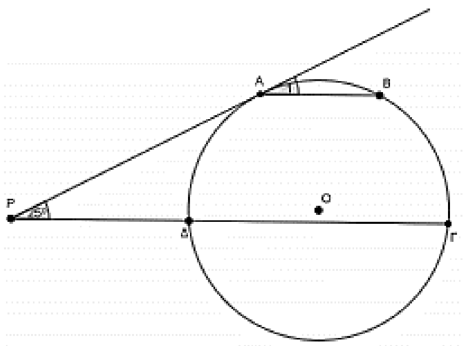


α) ΑΜ διχοτόμος της γωνίας ΔΑΟ. (Μονάδες 8)
β) $\widehat{OA\Gamma} = \widehat{\Delta AB}$ (Μονάδες 8)
γ) $\widehat{\Delta AO} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ (Μονάδες 9)

1897. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Έστω σημείο Δ του τόξου ΑΒ τέτοιο, ώστε $\Delta B \perp B\Gamma$.
α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \perp A\Gamma$. (Μονάδες 8)
β) Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
γ) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $OM = \dfrac{AH}{2}$. (Μονάδες 8)

3ο Θέμα

12460. Στον κύκλο (Ο, ρ) δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ έτσι ώστε ΑΒ//ΓΔ. Στο σημείο Α φέρνουμε εφαπτομένη στον κύκλο, η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΔ προς το Δ, στο σημείο Ρ. Αν η γωνία $\widehat{\Delta P A} = 25^\circ$ και το τόξο ΓΔ (στο οποίο δεν ανήκουν τα Α,Β) είναι τριπλάσιο του τόξου ΑΒ (στο οποίο δεν ανήκουν τα Γ, Δ) να αποδείξετε ότι:

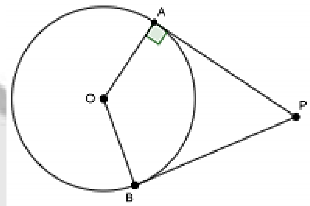


α) τα τόξα ΔAB και $AB\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
β) το τόξο ΑΒ που είναι μικρότερο του ημικυκλίου ισούται με 50^o. (Μονάδες 6)
γ) το τόξο ΔΑ στο οποίο δεν ανήκουν τα Β, Γ ισούται με 80^o. (Μονάδες 6)
δ) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)

ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

2ο Θέμα

12641. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα 4 cm. Από σημείο Ρ εκτός του κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ προς τον κύκλο. Επίσης η γωνία ΑΡΒ ισούται με 60^o .

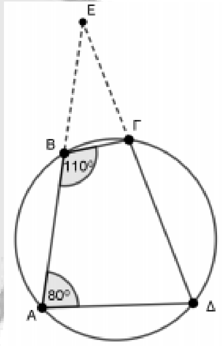


α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΡΑΟΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΡΟ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΟΡ. (Μονάδες 9)

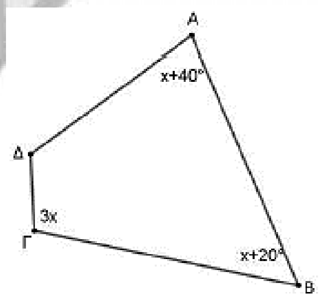
12643. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι πλευρές του ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Ε. Αν η γωνία Α του τετραπλεύρου ισούται με 80^o και η γωνία Β ισούται με 110^o , να υπολογίσετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:



α) το μέτρο της γωνία ΕΓΒ. (Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνία ΒΕΓ. (Μονάδες 13)

13818. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ το οποίο είναι εγγράψιμο. Οι γωνίες Α, Β, Γ έχουν αντίστοιχα μέτρα $x + 40°$, $x + 20°$, $3x$. Να υπολογίσετε :

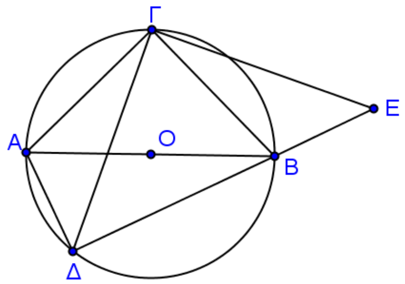


α) πόσες μοίρες είναι το x. (Μονάδες 12)

β) τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

1712. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και έστω ΑΒ μια διάμετρός του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε ώστε $BE = A\Delta$.



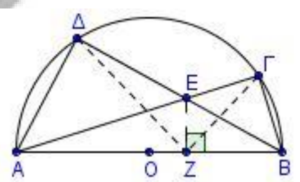
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου. (Μονάδες 9)

1769. Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο χορδές του ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε. Φέρουμε $EZ \perp AB$.



Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta A\Gamma = \Delta B\Gamma$ (Μονάδες 7)

β) Τα τετράπλευρα ΑΔΕΖ και ΕΖΒΓ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 9)

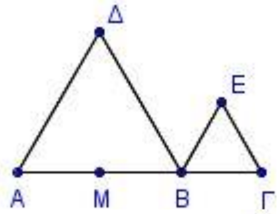
γ) Η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta Z\Gamma$. (Μονάδες 9)

1774. Έστω Α,Β,Γ συνευθειακά σημεία με $ΑΒ = 2ΒΓ$. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ, ΒΕΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο $(ΑΔ \parallel ΒΕ)$. (Μονάδες 9)

β) Τα τρίγωνα ΔΜΒ, ΔΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΔΜΒΕ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 8)

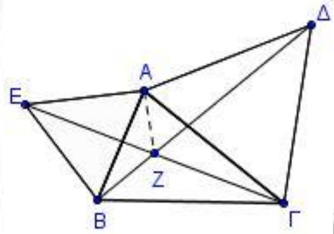


1776. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΒ , ΑΓΔ. Ονομάζουμε Ζ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΔ, ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΒΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ζεύγη των ίσων γωνιών. (Μονάδες 10)

β) Τα τετράπλευρα ΑΖΓΔ, ΑΖΒΕ είναι εγγράψιμα. (Μονάδες 10)

γ) $\hat{ΒΖΓ} = 120^\circ$. (Μονάδες 5)



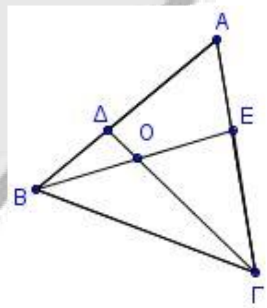
1779. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι $ΑΔ = ΑΕ$. Έστω Ο το σημείο τομής των ΓΔ και ΒΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{ΒΕΓ} = \hat{ΓΔΑ}$. (Μονάδες 10)

ii. $\hat{ΒΟΓ} = 120^\circ$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΕΟΔ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



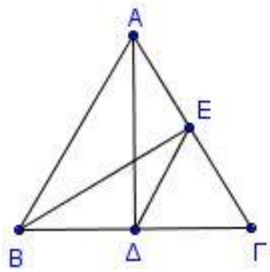
1799. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και ΑΔ, ΒΕ τα ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΓ = 2ΕΔ$. (Μονάδες 6)

β) $\hat{ΒΕΔ} = \frac{\hat{Α}}{2}$. (Μονάδες 7)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 7)

δ) $\hat{ΑΒΕ} = \hat{ΑΔΕ}$. (Μονάδες 7)

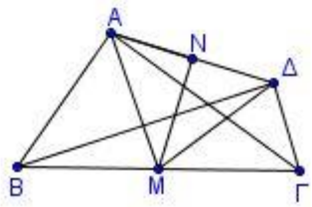


1807. Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ με $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^\circ$ και Μ,Ν τα μέσα των ΒΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΜ = ΜΔ$ (Μονάδες 10)

β) Η ΜΝ είναι κάθετη στην ΑΔ. (Μονάδες 10)

γ) $\hat{ΓΒΔ} = \hat{ΓΑΔ}$. (Μονάδες 5)



1847. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Έστω σημείο Α εξωτερικό του κύκλου και τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ ώστε να ισχύει $\hat{ΒΑΓ} = 60^\circ$. Έστω ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο Δ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

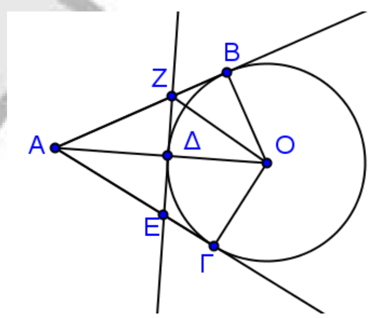
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι εγγράψιμο με $ΟΑ = 2ΟΒ$. (Μονάδες 6)

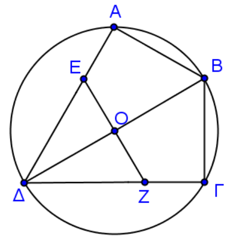
β) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)

γ) $2ΖΒ = ΑΖ$. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 6)

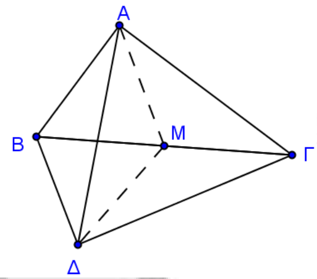


1864. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ο περιγεγραμμένος του κύκλος (Ο, ρ) ώστε η διαγώνιος του ΔΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Η γωνία Β είναι διπλάσια της Δ και οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι ίσες. Φέρουμε κάθετη στη ΒΔ στο Ο, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΔ και ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)
β) Να συγκρίνεται τα τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΓΒ. (Μονάδες 6)
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΟ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)
δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μονάδες 6)

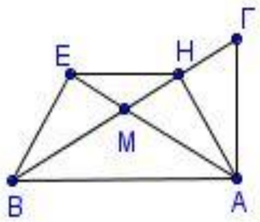
1886. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^{\circ}\right)$ και ΔΒΓ $\left(\Delta=90^{\circ}\right)$ (όπου Α και Δ εκατέρωθεν της ΒΓ) και το μέσο Μ της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
β) $\mathrm{AM}\Delta = 2\mathrm{A}\Gamma\Delta$ (Μονάδες 9)
γ) $\Gamma\mathrm{B}\Delta = \Gamma\mathrm{A}\Delta$ (Μονάδες 7)

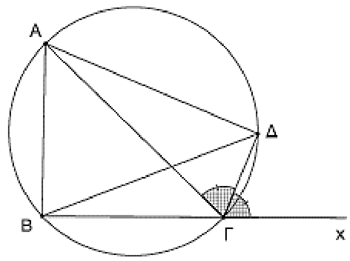
1896. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^{\circ}\right)$ έχουμε ότι $\mathrm{B}=30^{\circ}$.

Φέρουμε το ύψος ΑΗ και τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη διάμεσο ΑΜ, η οποία την τέμνει στο σημείο Ε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:



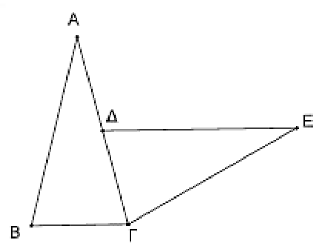
α) $\mathrm{BE}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$. (Μονάδες 7)
β) $\mathrm{AH}=\mathrm{BE}$. (Μονάδες 7)
γ) το τετράπλευρο ΑΗΕΒ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)
δ) $\mathrm{EH} \parallel \mathrm{AB}$. (Μονάδες 5)

13444. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο και οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ. Η γωνία ΔΓx είναι εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου και η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΓx.



α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{BA}\Delta=\dfrac{1}{2}\mathrm{A}\Gamma\mathrm{x}$. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και να προσδιορίσετε τις ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)
γ) Αν η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου, να αποδείξετε ότι οι γωνίες ΑΓΒ και ΒΔΓ είναι συμπληρωματικές. (Μονάδες 5)

13538. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ με ΑΒ = ΑΓ = ΕΓ = ΕΔ, όπου Δ είναι το μέσο της ΑΓ και $\mathrm{B}\Gamma=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
β) Αν η προέκταση της ΕΔ προς το Δ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι:
i. Το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΒ. (Μονάδες 8)
ii. $\mathrm{EA}\Gamma=\mathrm{EZ}\Gamma$ (Μονάδες 7)

13670. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΒ. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
β) Το τετράπλευρο ΖΑΔΕ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 5)
γ) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΑΓ. (Μονάδες 10)

13671.Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{B} < \Gamma\right)$ θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Η η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΗΕ = ΕΓ και ΗΖ = ΖΓ. (Μονάδες 10)

β) $Z\Delta E = ZHE$. (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΖΔΗΕ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 5)

13521.Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

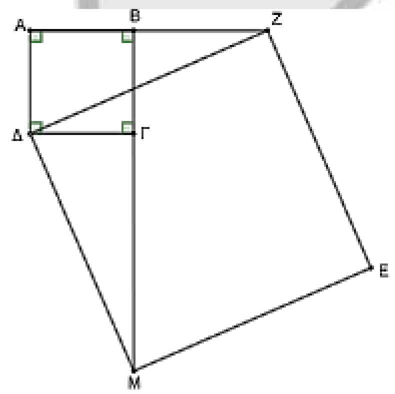
α) ΚΛ // ΒΓ. (Μονάδες 5)

β) i. ΜΛ = ΚΔ (Μονάδες 6)

ii. ΚΜ = ΔΛ. (Μονάδες 6)

γ) Το ΚΛΜΔ είναι ένα εγγράψιμο τετράπλευρο. (Μονάδες 8)

13847.Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ. Επίσης προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΜ = ΑΖ. Στη συνέχεια, θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) οι γωνίες ΒΜΖ και ΒΕΖ είναι ίσες. (Μονάδες 5)

13840.Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μία ευθεία x΄x η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο Α. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ημιευθείας Αx. Αν για κάποιο σημείο Β του κύκλου ισχύει η σχέση ΜΑ = ΜΒ, να αποδείξετε ότι:

α) το ΜΒ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο,R). (Μονάδες 7)

β) η διχοτόμος της γωνίας ΒΜx είναι κάθετη στη ΜΟ. (Μονάδες 6)

γ) το τετράπλευρο ΑΟΒΜ είναι εγγράψιμο. (Μονάδες 6)

δ) το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας ΒΜx. (Μονάδες 6)

14878. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Μ εξωτερικό του. Από το Μ φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ του κύκλου και έστω ότι το σημείο Γ είναι το συμμετρικό του Ο ως προς την ευθεία ΜΒ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Λ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΜΒΟ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Lambda \parallel M\Gamma$. (Μονάδες 9)

11895. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.
ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.
iii. Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.
iv. Η διάμεσος ενός τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των δύο βάσεων του τραπεζίου.
v. Αν γνωρίζουμε ότι δύο κύκλοι που έχουν ακτίνες R και ρ με R > ρ, εφάπτονται, τότε συμπεραίνουμε ότι η απόσταση των κέντρων τους είναι R + ρ.

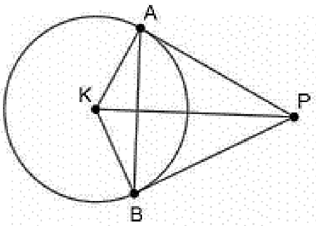
(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα, ότι κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

(Μονάδες 15)

11898. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Οι μεσοκάθετες των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
ii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
iii. Σε κάθε τρίγωνο βαρύκεντρο ονομάζεται το σημείο τομής των διχοτόμων του.
iv. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που άγεται από οποιαδήποτε κορυφή είναι διχοτόμος της αντίστοιχης γωνίας και διάμεσος της απέναντι πλευράς.
v. Αν στο παρακάτω σχήμα η ΡΚ είναι η διακεντρική ευθεία του σημείου Ρ, τότε η ίδια ευθεία είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ.



(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία ισούται με 30^{o} , τότε η απέναντι πλευρά της είναι το μισό της υποτείνουσας. (Μονάδες 15)

12066. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.
ii. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις γωνίες του τριγώνου.
iii. Αν δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
iv. Αν ένα τετράπλευρο έχει όλες τις γωνίες του ίσες, τότε είναι τετράγωνο.
v. Αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

(Μονάδες 10)

β) Από ένα σημείο Α εκτός ευθείας ε φέρουμε το κάθετο τμήμα ΑΚ προς την ε και τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι, αν τα πλάγια τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους Β και Γ ισαπέχουν από το ίχνος Κ της καθέτου.

(Μονάδες 15)

11964.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.

ii. Υπάρχουν σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος που δεν ισαπέχουν από τα άκρα του.
iii. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
iv. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
v. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο.
(Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση είναι ίσες. (Μονάδες 15)

12070. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
i. Από κάθε σημείο Ρ που είναι εξωτερικό ενός κύκλου διέρχεται μόνο μία εφαπτόμενη ευθεία προς τον κύκλο.
ii. Σε όλα τα κυρτά πολύγωνα το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τους είναι 4 ορθές.
iii. Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.
iv. Σε κάθε τραπέζιο οι διαγώνιές του είναι ίσες.
v. Δύο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου, είναι ίσες.
(Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου ανά δύο είναι ίσες. (Μονάδες 15)

12106. α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
i. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.
ii. Από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες κάθετες στην ευθεία.
iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
iv. Κάθε τετράπλευρο με ίσες διαγωνίους είναι ορθογώνιο.
v. Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου στο άκρο της χορδής ισούται με την επίκεντρη που βαίνει στο τόξο της χορδής.
(Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα. (Μονάδες 15)

12416. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
i. Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη της διαμέτρου.
ii. Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.
iii. Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες και κάθετες, τότε το τετράπλευρο είναι τετράγωνο.
iv. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία είναι ίσα.
v. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.
(Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που μπορούμε να φέρουμε από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους. (Μονάδες 15)

11892.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από αυτές το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
i. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και κάποια γωνία ίση, τότε είναι ίσα.
ii. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
iii. Κάθε τετράγωνο είναι και ρόμβος.
iv. Κάθε επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.
v. Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου η απόσταση από το μέσο κάθε πλευράς είναι τα 2/3 της αντίστοιχης διαμέσου. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. (Μονάδες 15)

13704.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

ii. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών του και μικρότερη από τη διαφορά τους.

iii. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

iv. Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

v. Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή. (Μονάδες 15)