ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Θέμα 2ο

14321. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x+y=6$ και $\varepsilon_2 : x-2y=-2$.
α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ. **(Μονάδες 13)**
β) Να δειχθεί ότι η ευθεία ε_3 : $3x+y=8$ διέρχεται από το Μ. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Για να προσδιορίσουμε το σημείο τομής των ευθειών αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους: $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2x \\ x-2(6-2x)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2x \\ x-12+4x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2x \\ x+4x=12-2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y=6-2x \\ 5x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2x \\ x=\dfrac{10}{5}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-2\cdot 2=2 \\ x=2 \end{cases}$

Άρα το σημείο τομής των δυο ευθειών είναι $M(2,2)$

β) Η ευθεία ε_3 διέρχεται από το Μ αν και μόνο αν $3\cdot 2+2=8 \Leftrightarrow 6+2=8$ ισχύει

15006.α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x-4y=-2 \\ 5x-10y=3 \end{cases}$. **(Μονάδες 13)**
β) Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x-4y=-2$ και $\varepsilon_2 : 5x-10y=3$;
(Μονάδες 12)

Λύση

α) $\begin{cases} 2x-4y=-2 \,|:2 \\ 5x-10y=3 \,|:5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ x-2y=\dfrac{3}{5} \end{cases}$ άρα $\dfrac{3}{5}=-1$ αδύνατο.

β) Επειδή το σύστημα είναι αδύνατο, οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

15011.Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.
α) i. Δίνονται οι εξισώσεις: 1. $y = 15 - x$ 2. $y - x = 15$
Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 7)**
ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €. Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:
3. $50y-20x=480$ 4. $20x+50y=480$
Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 7)**
β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αi) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50 € κατάθεσε ο Κώστας. **(Μονάδες 11)**

Λύση

α) i. Όλα τα χαρτονομίσματα είναι 15 , οπότε το άθροισμα των x και y είναι 15 , δηλαδή σωστή είναι η εξίσωση 1. $y=15-x \Leftrightarrow y+x=15$.

ii. Τα x χαρτονομίσματα των 20 € έχουν αξία 20x €. Αντίστοιχα τα y χαρτονομίσματα των 50 € έχουν αξία 50y €. Η συνολική αξία είναι 480 €, οπότε σωστή είναι η εξίσωση 4. $20x+50y=480$.

β) $\begin{cases} y=15-x \\ 20x+50y=480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15-x \\ 20x+50(15-x)=480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15-x \\ 20x+750-50x=480 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y=15-x \\ -30x=-270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15-9=6 \\ x=9 \end{cases}$

Σύμφωνα με την εκφώνηση x = 9 είναι τα χαρτονομίσματα των 20 € και y = 6 τα χαρτονομίσματα των 50 €.

15016.Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-y=3 \end{cases}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος (0,4) δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος . (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x+2y=8$ και $(\varepsilon_2): 2x-y=3$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Το σημείο (0,4) είναι λύση του συστήματος, αν και μόνο αν: $\begin{cases} 3\cdot 0+2\cdot 4=8 \\ 2\cdot 0-4=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8=8 \\ -4=3 \text{ αδύνατο} \end{cases}$.

Άρα δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος .

β) $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-3=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2(2x-3)=8 \\ 2x-3=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4x-6=8 \\ 2x-3=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=14 \\ 2x-3=y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=2 \\ y=2\cdot 2-3=1 \end{cases}$. Λύση του συστήματος είναι το $(x,y)=(2,1)$.

γ) Το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ έχει συντεταγμένες που αποτελούν λύση του συστήματος των εξισώσεών τους, άρα το σημείο τομής τους είναι το (2,1).

15195.α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x-y=-1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x-y=-1$ και $(\varepsilon_2): 3x+y=2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\begin{cases} 5x-y=-1 \\ 3x+y=2 \ (1) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 5x+3x-y+y=1 \Leftrightarrow 8x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$ και από την $(1) \Rightarrow 3\cdot\frac{1}{8}+y=2 \Leftrightarrow y=2-\frac{3}{8}=\frac{13}{8}$

Λύση του συστήματος $(x,y)=\left(\frac{1}{8},\frac{13}{8}\right)$.

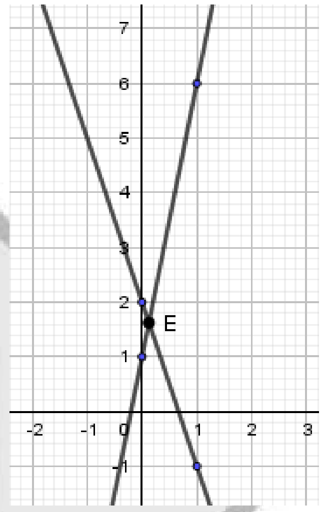
β) Κατασκευάζουμε πίνακες τιμών για τις δύο ευθείες

$(\varepsilon_1): 5x-y=-1$

x	0	1
y	1	6

$(\varepsilon_2): 3x+y=2$

x	0	1
y	2	-1



Το σημείο τομής Ε των δύο ευθειών έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1}{8},\frac{13}{8}\right)$.

15849.Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

Α. $\begin{cases} x+y+5=0 \\ 12x+6y=300 \end{cases}$ **Β.** $\begin{cases} x-y=5 \\ 6x+12y=300 \end{cases}$

Γ. $\begin{cases} y=x+5 \\ 12x+6y=300 \end{cases}$ **Δ.** $\begin{cases} y=x+5 \\ 6x+12y=300 \end{cases}$

(Μονάδες 10)

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι y = x + 5 (1). Επίσης, το ποσό που πλήρωσαν οι γονείς είναι 12x και το ποσό που πλήρωσαν τα παιδιά είναι 6y. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι: 12x + 6y = 300 (2)
Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι το Γ.

β) $\begin{cases} y=x+5 \\ 12x+6y=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+5 \\ 12x+6(x+5)=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+5 \\ 12x+6x+30=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+5 \\ 18x=270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15+5=20 \\ x=15 \end{cases}$

Άρα, οι γονείς ήταν 15 και τα παιδιά 20.

Θέμα 4ο

15117.Μια παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλνει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0,3 ευρώ. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3,8 ευρώ. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3,55 ευρώ. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4, 05 ευρώ. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

σάντουιτς	φέτες ζαμπόν	φέτες τυρί	φέτες γαλοπούλα	ψωμί	κόστος
1^{α}	2	4	0	0,3€	3,8 €
2^{α}	1	2	3	0,3€	3,55 €
3^{α}	3	0	3	0,3€	4,05 €
4^{α}	2	2	1	0,3€	
				Σύνολο	

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε πόσο κοστίζει η μία φέτα τυρί, η μία φέτα γαλοπούλα και η μία φέτα ζαμπόν.

(Μονάδες 10)

γ) Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερεις φίλοι για την παραγγελία τους;

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Αν η μία φέτα ζαμπόν κοστίζει x ευρώ, η μία φέτα τυρί y ευρώ και η μία φέτα γαλοπούλα *z* ευρώ, προκύπτει το παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$\begin{cases} 2x+4y+0,3=3,8 \\ x+2y+3z+0,3=3,55 \\ 3x+3z+0,3=4,05 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=3,5 \\ x+2y+3z=3,25 \\ 3x+3z=3,75 \end{cases}$$

β) $$\begin{cases} 2x+4y=3,5 \\ x+2y+3z=3,25 \\ 3x+3z=3,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=3,5-2x \\ x+2y+3z=3,25 \\ 3z=3,75-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3,5-2x}{4} \\ x+\cancel{2}\dfrac{3,5-2x}{\cancel{4}^{2}}+3(1,25-x)=3,25 \\ z=1,25-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{3,5-2x}{4} \\ \cancel{2x}+3,5-\cancel{2x}+6(1,25-x)=6,5 \\ z=1,25-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3,5-2x}{4} \\ 3,5+7,5-6x=6,5 \\ z=1,25-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3,5-2x}{4} \\ 11-6,5=6x \\ z=1,25-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3,5-2x}{4} \\ 4,5=6x \\ z=1,25-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{3,5-2\cdot 0,75}{4}=0,5 \\ x=0,75 \\ z=1,25-0,75=0,5 \end{cases}$$

Τελικά, η μία φέτα ζαμπόν κοστίζει x = 0, 75 ευρώ, η μία φέτα τυρί κοστίζει y = 0, 5 ευρώ και η μία φέτα γαλοπούλα κοστίζει z = 0, 5 ευρώ.

γ) Το τέταρτο σάντουιτς κοστίζει $2\cdot 0,75+2\cdot 0,5+1\cdot 0,5+0,3=3,3€$.
Συνολικά θα πληρώσουν λοιπόν: $3,8+3,55+4,05+3,3=14,7€$

14289. Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.
1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24
3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.
α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.
(Μονάδες 10)
β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Έστω x (>0) χρονών είναι η ηλικία κάθε κοριτσιού και y (>0) του αγοριού, τότε από
1 : $x+x+y=14$ και από 2 : $x\cdot y=24$.

β) Λύνουμε το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων

$$\begin{cases} 2x+y=14 \\ x\cdot y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=14-2x \\ x\cdot(14-2x)=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=14-2x \\ 14x-2x^2=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=14-2x \\ -2x^2+14x-24=0 \end{cases}$$

Η εξίσωση $-2x^2+14x-24=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=196-192=4$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-14\pm 2}{-4}\Leftrightarrow x_1=3 \text{ και } x_2=4$$

Επομένως: για $x=3$ έχουμε $y=14-2\cdot 3\Leftrightarrow y=8$ και για $x=4$ έχουμε $y=14-2\cdot 4\Leftrightarrow y=6$.
Όμως από 3, πρέπει $2x<y$ που ισχύει όταν $x=3$ και $y=8$, επομένως τα κορίτσια είναι 3 χρονών και το αγόρι 8 χρονών.

Θέμα 3ο

14237.Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:
Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.
α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους. (Μονάδες 13)
β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Έστω x(>0) η ηλικία μητέρας , y(>0) η ηλικία του παιδιού και z (>0) : η ηλικία του πατέρα.

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε : $x=3y$, $\frac{z}{y}=\frac{11}{3}\Leftrightarrow 3z=11y$ και $x+y+z=115$

Άρα έχουμε το σύστημα $(\Sigma):\left\{\begin{array}{l} x=3y \\ 11y=3z \\ x+y+z=115 \end{array}\right\}$

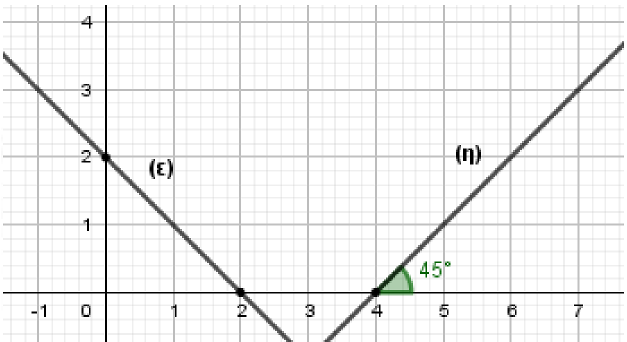
β) $(\Sigma):\left\{\begin{array}{l} x=3y \\ 11y=3z \\ x+y+z=115 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} x=3y & (1) \\ z=\frac{11}{3}y & (2) \\ x+y+z=115 & (3) \end{array}\right\}$

$(3)\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} 3y+y+\frac{11}{3}y=115\Leftrightarrow 9y+3y+11y=345\Leftrightarrow 23y=345\Leftrightarrow y=15$

$(1)\Rightarrow x=3\cdot 15=45$ $(2)\Rightarrow z=\frac{11}{\cancel{3}}\cdot\cancel{15}^{5}=55$

Άρα η μητέρα είναι 45 χρονών, το παιδί 15 και ο πατέρας 55.

14235. α) Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω σχήματος, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε)και (η) . (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η) . (Μονάδες 13)



Λύση

α) Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση της μορφής $y=\alpha x+\beta$ και διέρχεται από τα σημεία $(0,2)$ και $(2,0)$, οπότε:
$2=\alpha\cdot 0+\beta\Leftrightarrow\beta=2$ και $0=2\alpha+\beta\Leftrightarrow 2\alpha+2=0\Leftrightarrow 2\alpha=-2\Leftrightarrow\alpha=-1$, άρα (ε): $y=-x+2$.
Η ευθεία η σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x, οπότε έχει κλίση $\alpha=\varepsilon\varphi 45^{\circ}=1$.Η εξίσωση της (η) είναι της μορφής $y=x+\gamma$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $(4,0)$, ισχύει ότι
$0=4+\gamma\Leftrightarrow\gamma=-4$, άρα (η): $y=x-4$.

β)Για να βρούμε το σημείο τομής τους θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Είναι:
$\left\{\begin{array}{l} y=-x+2 \\ y=x-4 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x-4=-x+2 \\ y=x-4 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2x=6 \\ y=x-4 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=3-4=-1 \end{array}\right.$.
Οι ευθείες (ε) και (η) τέμνονται στο σημείο $(3,-1)$.

Μη γραμμικά συστήματα

Θέμα 4ο

14240.α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$. **(Μονάδες 12)**

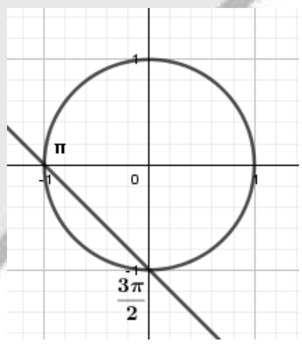
β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω , με $0 \le \omega \le 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+(-x-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+x^2+2x+\cancel{1}=\cancel{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ 2x(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x=0 \text{ ή } x=-1 \end{cases}$

Αν $x=0$ τότε $y=0-1=-1$ και αν $x=-1$ τότε $y=1-1=0$.

Λύσεις του συστήματος τα $(0,-1)$ και $(-1,0)$



β) Αν x=συνω και y = ημω τότε οι δυνατές τιμές για τα συνω και ημω είναι οι λύσεις του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα

$\left(\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega=-1 \\ \eta\mu\omega=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pi\right)$ ή $\left(\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega=0 \\ \eta\mu\omega=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}\right)$

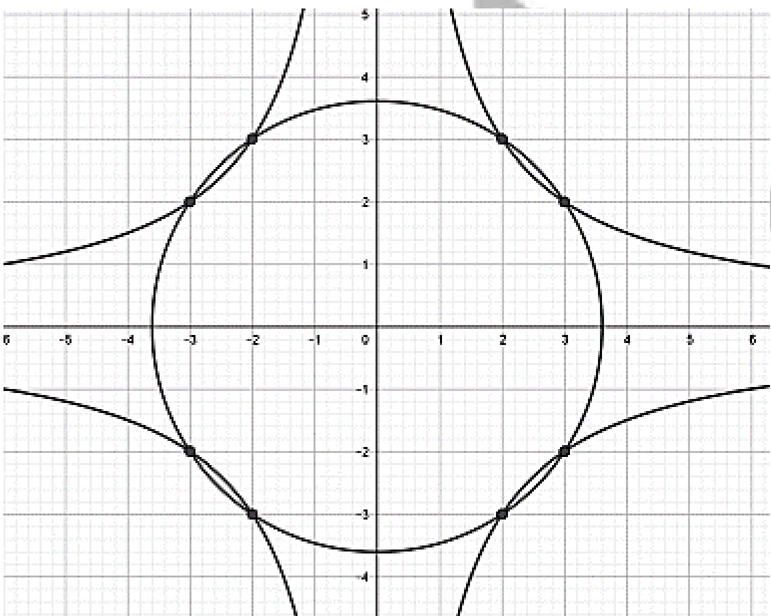
15118.α) Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma_1): \begin{cases} xy=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$. **(Μονάδες 8)**

β) Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ1) λύσεις και του $(\Sigma_2): \begin{cases} |xy|=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ **;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.** **(Μονάδες 5)**

γ) Η γεωμετρική αναπαράσταση του συστήματος (Σ_2) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με βάση το σχήμα,

i. να βρείτε τις λύσεις του (Σ_2) . **(Μονάδες 4)**

ii. να παραστήσετε γεωμετρικά το σύστημα (Σ_1) σημειώνοντας τις λύσεις του. **(Μονάδες 8)**



Λύση

α) $(\Sigma_1):\begin{cases} xy=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{6}{x}\ (1) \\ x^2+\dfrac{36}{x^2}=13 \end{cases}$. Θέτουμε $x^2=\omega$ και η $x^2+\dfrac{36}{x^2}=13$ γίνεται

$\omega+\dfrac{36}{\omega}=13 \Leftrightarrow \omega^2+36=13\omega \Leftrightarrow \omega^2-13\omega+36=0$. Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με Δ = 25 και ρίζες $\omega_1=4,\ \omega_2=9$. Τότε $\left(x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2\right)$ ή $\left(x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3\right)$.

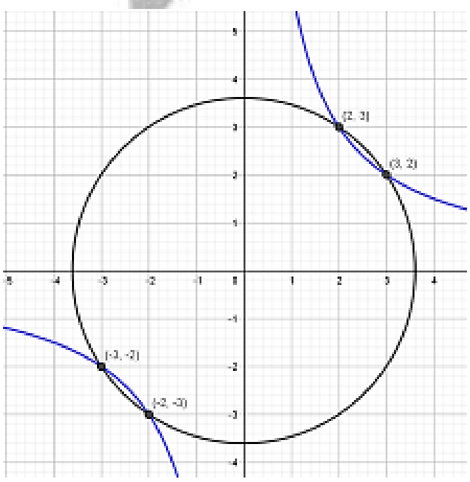
Αν x = 3, τότε $y=\dfrac{6}{3}=2$, αν x = - 3, τότε $y=\dfrac{6}{-3}=-2$, αν x = 2, τότε $y=\dfrac{6}{2}=3$ και αν x = - 2, τότε $y=\dfrac{6}{-2}=-3$. Το σύστημα έχει λύσεις τις $(2,3),\ (-2,-3),\ (3,2)$ και $(-3,-2)$.

β) Επειδή μια εξίσωση του Σ_2 είναι κοινή, οι λύσεις του Σ_1 την επαληθεύουν. Αρκεί οι λύσεις του Σ_1 να επαληθεύουν την εξίσωση $|xy|=6$.

Είναι $|2\cdot 3|=6$, $|-2\cdot(-3)|=6$, $|3\cdot 2|=6$ και $|-3\cdot(-2)|=6$, άρα οι λύσεις του Σ_1 είναι λύσεις και του Σ_2.

γ) i. Το Σ_2 έχει οκτώ λύσεις, τις 4 λύσεις του Σ_1 καθώς και τα κοινά σημεία των δύο καμπυλών που φαίνονται στο σχήμα. Δηλαδή τα σημεία $(-2,3),(-3,2),(3,2),(2,-3)$.

ii. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η γεωμετρική αναπαράσταση του (Σ1) είναι το τμήμα της γραφικής αναπαράστασης του (Σ2) που αποτελείται από τον κύκλο και τους κλάδους της υπερβολής που βρίσκονται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο, όπου είναι σημειωμένα και τα σημεία τομής των δυο γραμμών, οι συντεταγμένες των οποίων είναι οι λύσεις του συστήματος αυτού.



Θέμα 3ο

14979. Δίνεται το σύστημα (Σ): $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ **.**

α) Να λύσετε το σύστημα (Σ). **(Μονάδες 12)**

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, σε κατάλληλο σχήμα, τις λύσεις του συστήματος (Σ) που βρήκατε στο ερώτημα α. **(Μονάδες 13)**

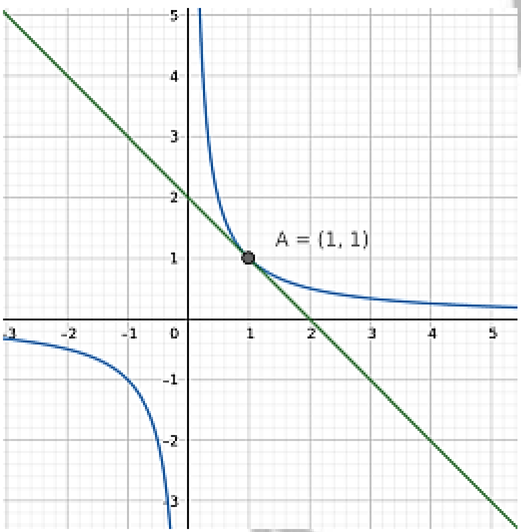
Λύση

α) $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = -x + 2 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -x^2 + 2x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

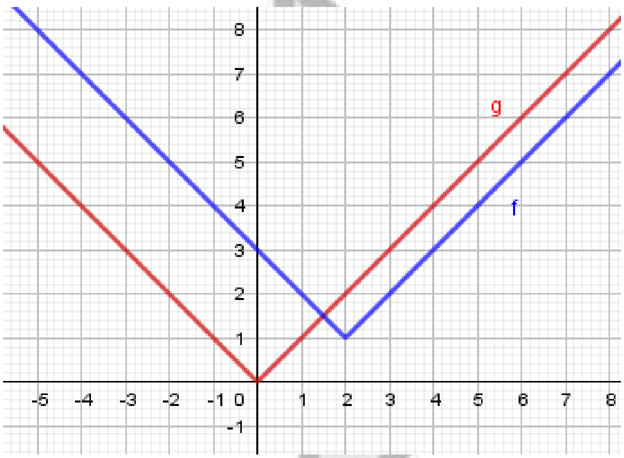
Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x , y)=(1,1).

β) Η εξίσωση y= − x+2 παριστάνει μία ευθεία, ενώ η εξίσωση $y = \dfrac{1}{x}$ παριστάνει μία υπερβολή.

Η λύση του συστήματος (x , y)=(1,1) είναι οι συντεταγμένες του μοναδικού σημείου τομής τους, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



14325. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.



Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

(Μονάδες 15)

β) Αν $g(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$ να επιλέξετε ποιος από τους παρακάτω είναι ο τύπος της συνάρτησης f. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

$f(x)=|x+2|+1$

$f(x)=|x-2|-1$

$f(x)=|x+2|-1$

$f(x)=|x-2|+1$

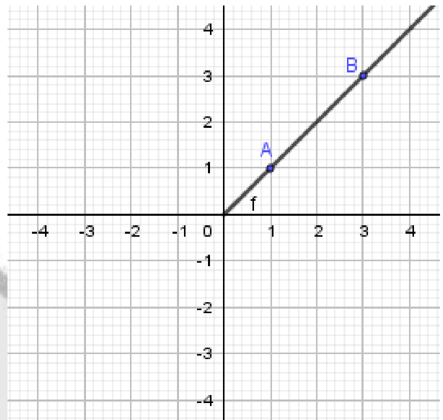
(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$. Έχει ελάχιστο το 1 για x = 2.

β) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά 2 μονάδες δεξιά και 1 μονάδα πάνω, οπότε $f(x)=|x-2|+1$.

14971. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1),B(3,3)$.



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f, που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B.

i) είναι σταθερή συνάρτηση

ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Μονάδες 12

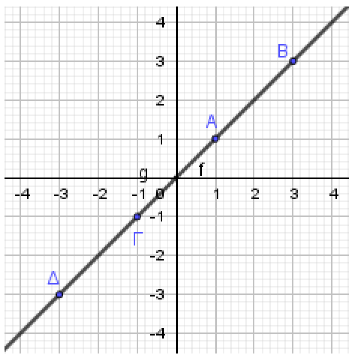
β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f, η οποία διέρχεται από τα A,B και είναι περιττή.

Μονάδες 13

Λύση

α) Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι σταθερή, αφού $f(1)=1\neq 3=f(3)$

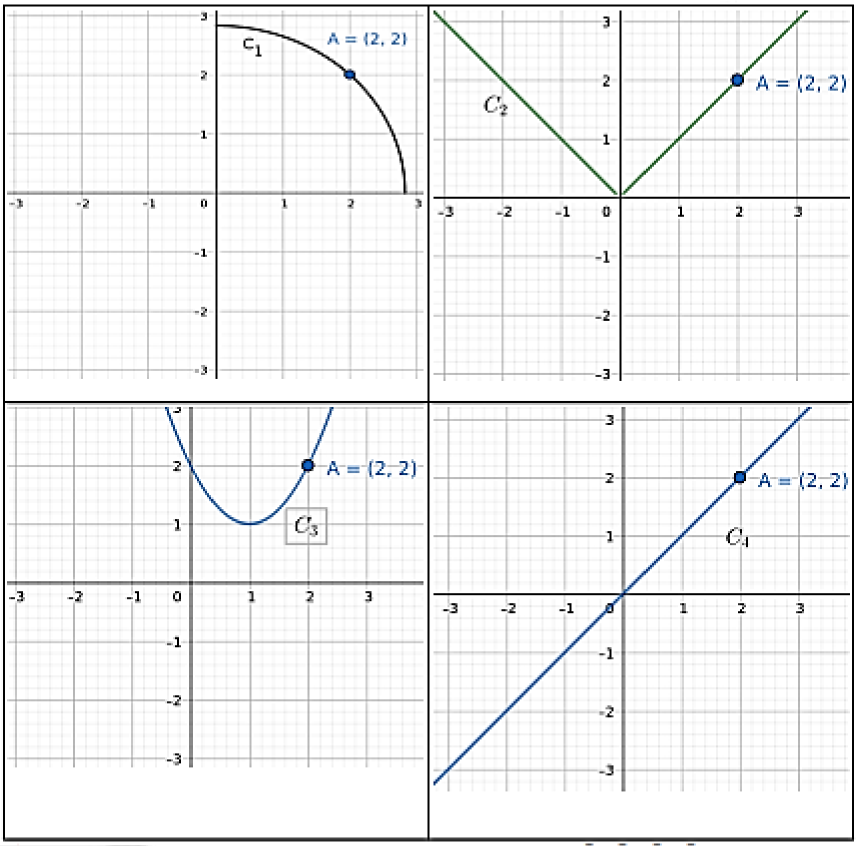
Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι γνησίως φθίνουσα, αφού 1<3 και $f(1)<f(3)$.



β) Επειδή η f είναι περιττή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.
Επειδή διέρχεται από τα A,B θα διέρχεται και από τα σημεία

$\Gamma(-1,-1)$ και $\Delta(-3,-3)$ που είναι τα συμμετρικά των Α, Β αντίστοιχα ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

14976.Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1 ,C_2 ,C_3 ,C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή. (Μονάδες 12)

β) Για τις συναρτήσεις C_2 ,C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Η C_1 δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης άρτιας ή περιττής, αφού ορίζεται μόνο για θετικούς αριθμούς.

Η C_2 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Η C_3 δεν μπορεί να είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση, αφού δεν μπορεί να είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα $y'y$, ούτε ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Η C_4 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Επομένως, εφόσον δίνεται ότι υπάρχουν μία άρτια και μία περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι η C_2 είναι η άρτια και C_4 είναι η περιττή.

β) Επειδή η C_2 είναι η άρτια ισχύει ότι $f(-2)=f(2)\Leftrightarrow k=2$.

Επειδή η C_4 είναι η περιττή ισχύει ότι $f(-2)=-f(2)\Leftrightarrow k=-2$.

15019.Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι f (- 1) = 2 και f (1) = 0. Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια . (Μονάδες 8)

β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή. (Μονάδες 8)

γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Αν η f ήταν άρτια τότε θα ήταν $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow 2 = 0$ που είναι άτοπο.

β) Αν η f ήταν περιττή τότε θα ήταν $f(-1) = -f(1) \Leftrightarrow 2 = 0$ που είναι άτοπο.

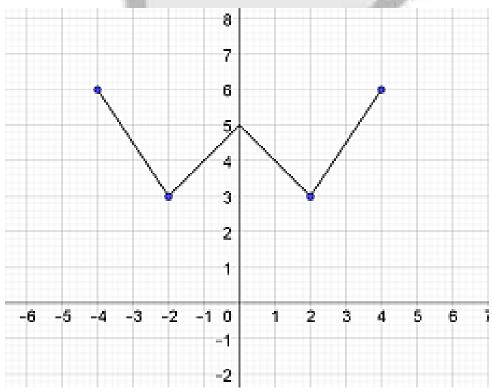
γ) Αν η f ήταν γνησίως αύξουσα τότε θα ήταν $f(-1) < f(1) \Leftrightarrow 2 < 0$ που είναι άτοπο.

15024.Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [4, 4] – φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση την συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y , που σημαίνει ότι είναι άρτια.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο [- 2,0] και στο [2, 4] και γνησίως φθίνουσα στο [- 4,- 2] και στο [0, 2].

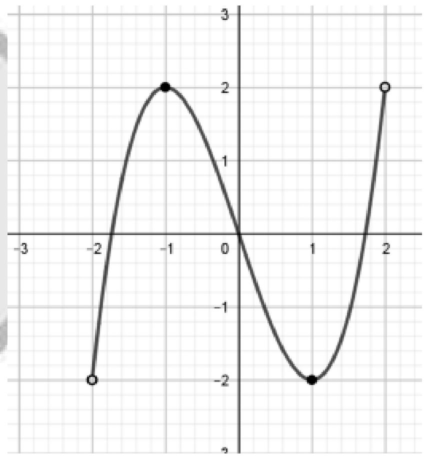
γ) Η f παρουσιάζει ελάχιστο το 3 και οι θέσεις ελαχίστου είναι το -2 και το 2.

15112.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2,2)$.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών. (Μονάδες 10)



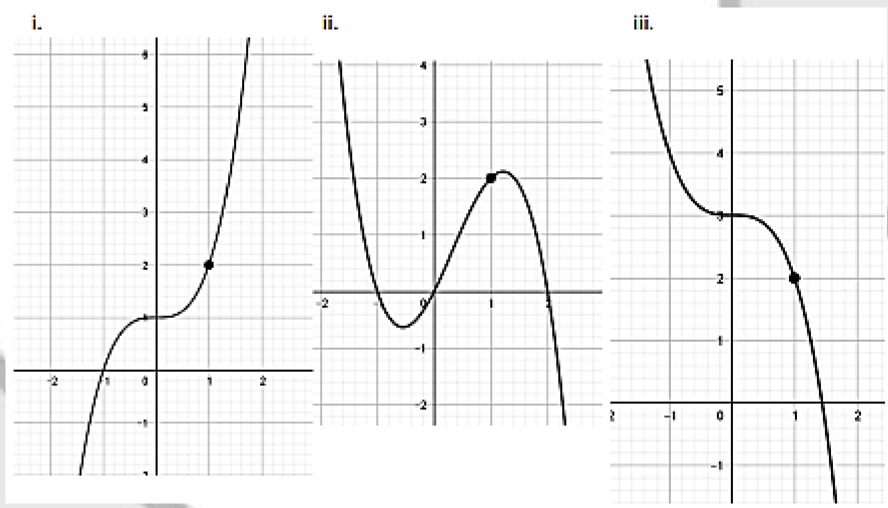
Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι περιττή, γιατί η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-2,-1]$ και $[1,2)$.

γ) Η f έχει μέγιστο για $x=-1$ το $f(-1)=2$ και ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=-2$.

15114.Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,2).
α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο Β(2,9); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



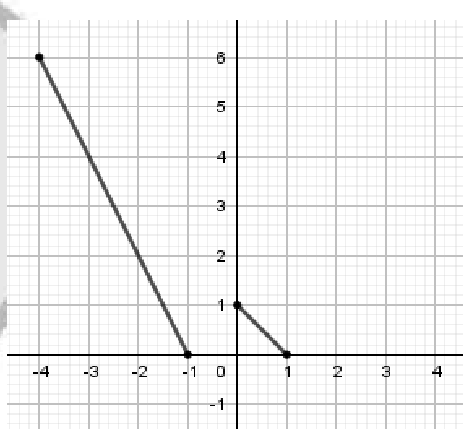
(Μονάδες 12)

Λύση

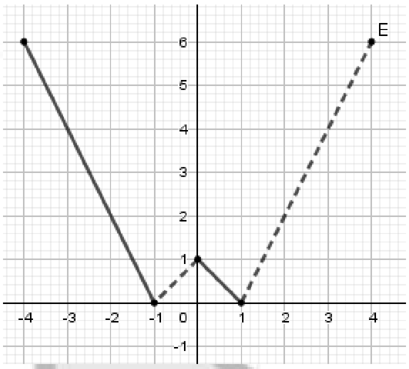
α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το Α(1, 2) και θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο Β(2, 9) , διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $1<2 \Leftrightarrow f(1)<f(2)$ αφού $f(1)=2$ και $f(2)=9$.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η i. διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο (1, 2), η i. είναι γραφική παράσταση γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

15116.Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4,4]$.
α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε
i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)
ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών. Μονάδες 9)



Λύση



α) Η συνάρτηση f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον y΄ y άξονα. Στο παρακάτω σχήμα είναι χαραγμένα και τα υπόλοιπα τμήματα με διακεκομμένη γραμμή.

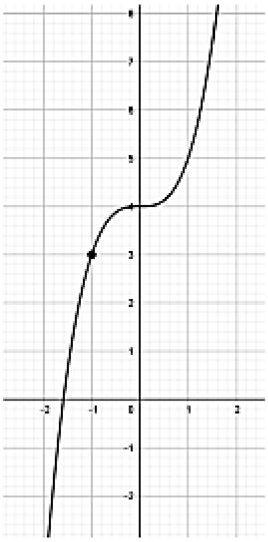
β) i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα είναι τα $[-4,-1]$ και $[0,1]$, γιατί στα διαστήματα αυτά όσο μεγαλώνουν οι τιμές του x , μικραίνουν οι αντίστοιχες τιμές του y
ii. Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 6 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές –4 και 4.

15115.Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$.

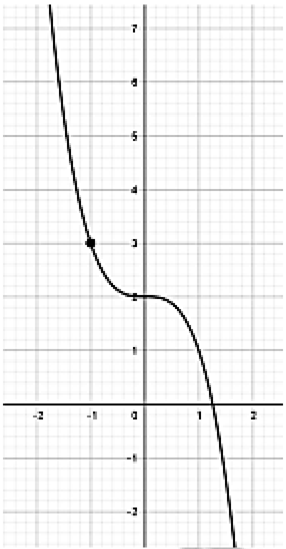
α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο Β(2,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 13)**

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

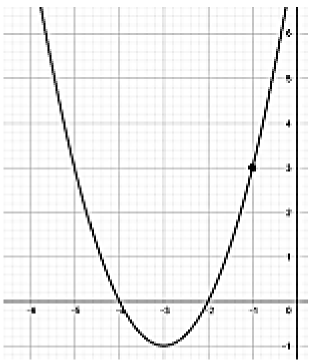
i.



ii.



iii.



(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(-1,3)$ και δεν θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο Β(2, 5), διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ είναι όμως γνησίως φθίνουσα και θα έπρεπε να ισχύει $-1<2 \Leftrightarrow f(-1)>f(2) \Leftrightarrow 3>5$ που είναι άτοπο.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η ii. διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο (–1,3), η ii. είναι γραφική παράσταση γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

15349.Δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

(Μονάδες 7)

β) Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία

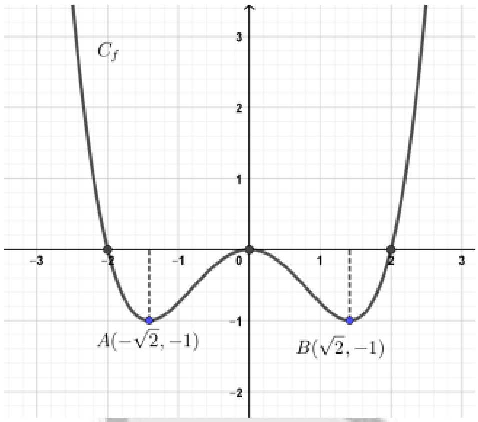
$$A\left(-\sqrt{2},-1\right) \text{ και } B\left(\sqrt{2},-1\right)$$

ανήκουν στη γραφική παράσταση της f να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x)=0$.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y, που σημαίνει ότι τα σημεία $(x,f(x))$ και $(-x,f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y. Από το σχήμα έχουμε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε x ∈ Δ, άρα η συνάρτηση είναι άρτια .

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]$, $\left[0,\sqrt{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[-\sqrt{2},0\right]$ και $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$.

γ) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=0$ ή $x=2$

15372.Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει.

Να αιτιολογήσετε την απάντησής σας.

(Μονάδες 10)

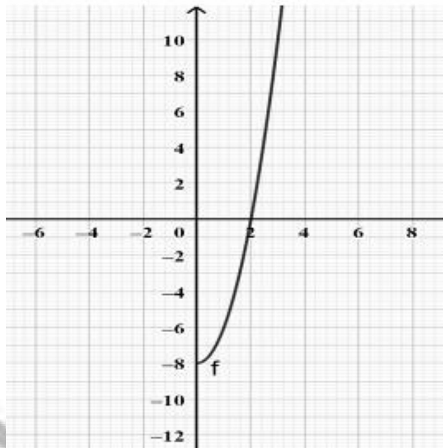
β) Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

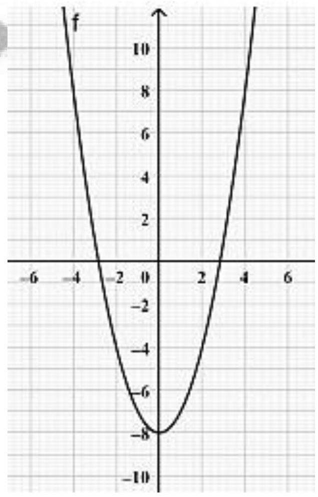
ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

(Μονάδες 7)



Λύση

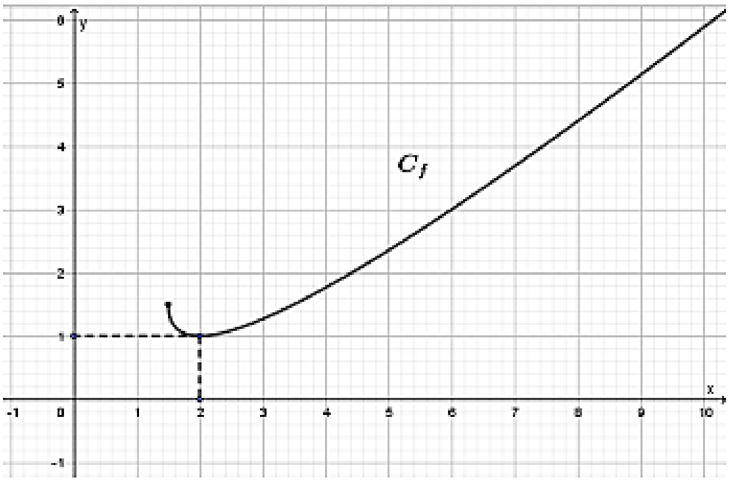
α) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως, έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Το κομμάτι της συνάρτησης που λείπει είναι το συμμετρικό ως προς τον άξονα y΄y. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει η διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



β) i. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ii. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f βλέπουμε ότι έχει ελάχιστη τιμή το -8 για x=0

15437.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\sqrt{2x-3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(Μονάδες 7)**
β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού. **(Μονάδες 8)**
γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι
I. γνησίως φθίνουσα **(Μονάδες 5)**
II. γνησίως αύξουσα **(Μονάδες 5)**

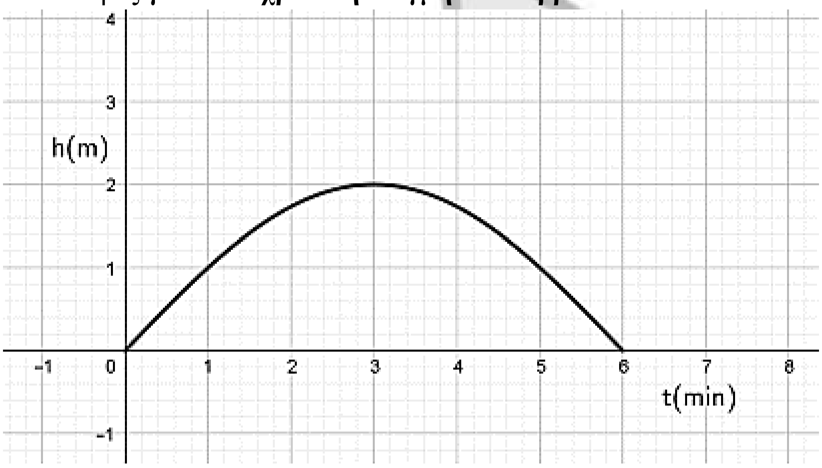
Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $2x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{3}{2}$, άρα $A_f=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

β) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι: Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με και παρουσιάζεται όταν .

γ) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3}{2},2\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

15645.Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος h του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε:



α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος. **(Μονάδες 5)**
β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει. **(Μονάδες 10)**
γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Το αντικείμενο απέχει από το έδαφος 1m όταν το σημείο της γραφικής παράστασης έχει τεταγμένη 1 , δηλαδή τις χρονικές στιγμές 1min και 5min .

β) Σύμφωνα με το σχήμα η μέγιστη απομάκρυνση είναι 2m . Σε αυτή την θέση το κινητό βρίσκεται τη χρονική στιγμή t = 3min .

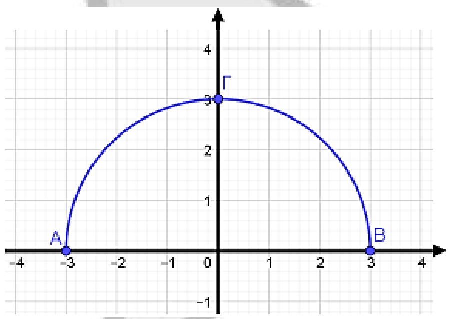
γ) Σύμφωνα με το σχήμα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος το χρονικό διάστημα [0,3].

16129.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)

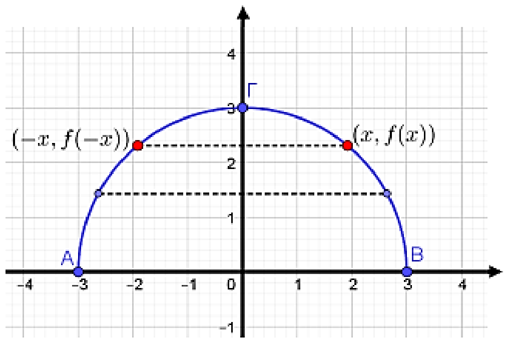
γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τετμημένες x από −3 έως 3. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $\Delta=[-3,3]$.

β) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y′y, που σημαίνει ότι τα σημεία $(x,f(x))$ και $(-x,f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y′y. Από το σχήμα έχουμε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε x ∈ Δ, άρα η συνάρτηση είναι άρτια .

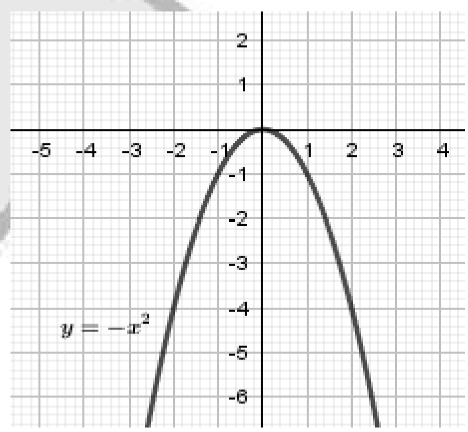


γ) Παρατηρούμε ότι η τιμή $3=f(0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f και η θέση μεγίστου είναι η x = 0. Ακόμα, η ελάχιστη τιμή της f είναι ο αριθμός $0=f(3)=f(-3)$ και υπάρχουν δύο θέσεις ελαχίστου, οι x = 3 και x = – 3.

Θέμα 4ο

14293.Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=-x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=-x^2+2x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-(x-1)^2+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *φ*, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f. (Μονάδες 10)



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. (Μονάδες 5)

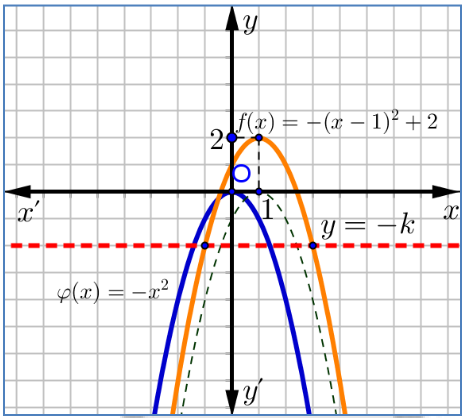
ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του. (Μονάδες 5)

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa,\ \kappa<2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Λύση

α) $f(x)=-x^2+2x+1=-(x^2-2x-1)=-(x^2-2x+1-2)=$
$-[(x-1)^2-2]=-(x-1)^2+2$

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της φ με δύο μετατοπίσεις μία οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μία κατακόρυφη κατά 2 μονάδες προς τα πάνω



β) i. Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

ii. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 (θέση) το f(1)=2 .

iii. Οποιαδήποτε ευθεία της μορφής y=k ,k < 2 τέμνει την γραφική παράσταση της f σε 2 σημεία άρα έχει δύο ρίζες.

15022.Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1)<f(2)$. **(Μονάδες 6)**

β) Να αποδείξετε ότι $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$. **(Μονάδες 7)**

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου. **(Μονάδες 6)**

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f. Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ β. $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$ γ. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ δ. $f(x)=-\sqrt{x^2-9}$

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-1)=f(1)$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(1)<f(2)$.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$ και 1 < 2, είναι $f(1)<f(2)$.

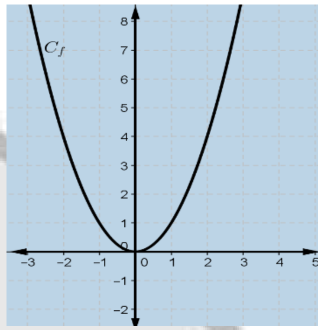
β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$, για κάθε $0\leq x\leq 3$ είναι
$f(0)\leq f(x)\leq f(3)\Leftrightarrow f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ (1)
Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-3,0]$, για κάθε $-3\leq x\leq 0$ είναι $f(-3)\geq f(x)\geq f(0)$ (2).
Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-3)=f(3)$, οπότε η (2) γίνεται: $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ (3).
Από τις σχέσεις (1), (3) προκύπτει ότι $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

γ) Επειδή $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x = 0 το $f(0)$.
Επειδή $f(x)\leq f(3)$ και $f(x)\leq f(-3)$ για κάθε $x\in[-3,3]$, η f παρουσιάζει μέγιστο στα $x=3$ και $x=-3$ το $f(-3)=f(3)$.

δ) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $[-3,3]$, ο τύπος της θα είναι ο α ή ο β.
Στην α είναι $f(0)=3$ και $f(3)=0$, δηλαδή $f(0)>f(3)$ που είναι άτοπο. Άρα ο β είναι ο τύπος της f.

Οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση

ΘΕΜΑ 2ο



14230.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$, $x\in R$

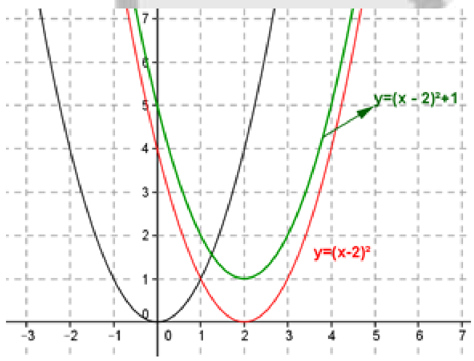
α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x)=(x-2)^2+1$.

(Μονάδες 12)

β) Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f, μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y=x^2$.

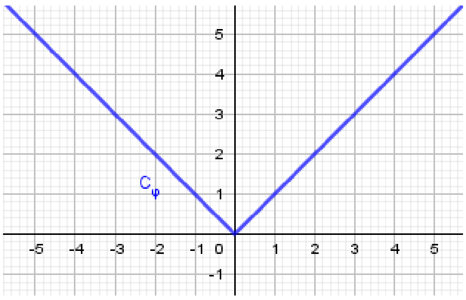
(Μονάδες 13)

Λύση



α) $f(x)=x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1$

β) Αρχικά μετατοπίζουμε την $y=x^2$ 2 θέσεις δεξιά και στη συνέχεια 1 θέση πάνω.

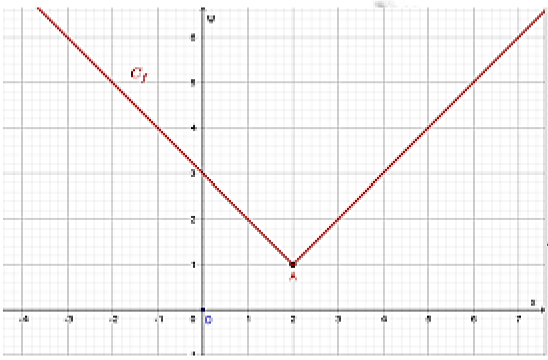


14972.Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x)=|x-2|$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=|x-2|+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g, f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της , η οποία δίνεται παρακάτω,



να βρείτε:

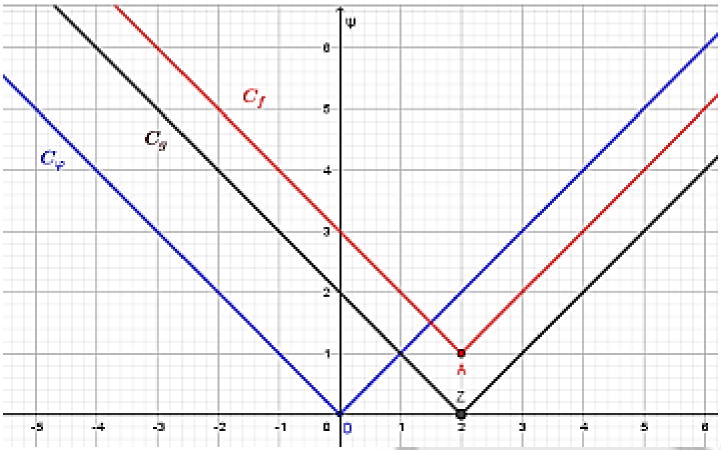
i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα. (Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; (Μονάδες 6)

Λύση

α) Οι γραφικές παραστάσεις των και προκύπτουν από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της :

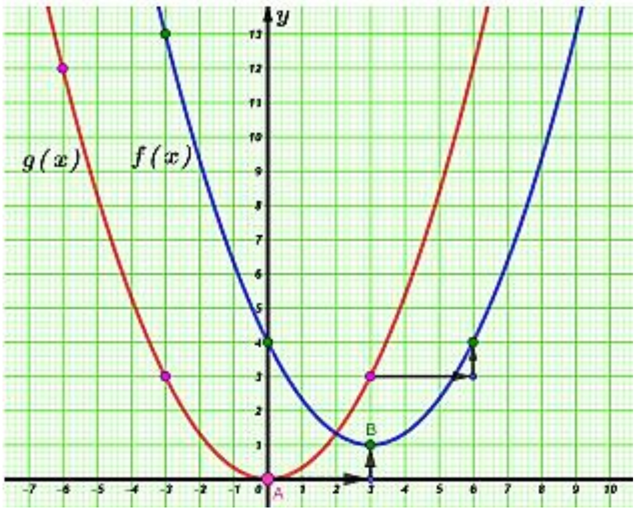
• μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (για την g) και
• μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (για την f).
Έτσι προκύπτουν οι διπλανές γραφικές παραστάσεις



β) i. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

ii. Η f έχει ελάχιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=1$.

14983.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{3}x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της g(x) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.



α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

(i) $f(x)=g(x+3)+1$

(ii) $f(x)=g(x+3)-1$

(iii) $f(x)=g(x-3)+1$

(iv) $f(x)=g(x-3)-1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου. (Μονάδες 8)

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Σωστή απάντηση είναι η (iii).

β) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η μικρότερη δυνατή τιμή της συνάρτησης $f(x)$ είναι ο αριθμός 1 και επιτυγχάνεται όταν x = 3.

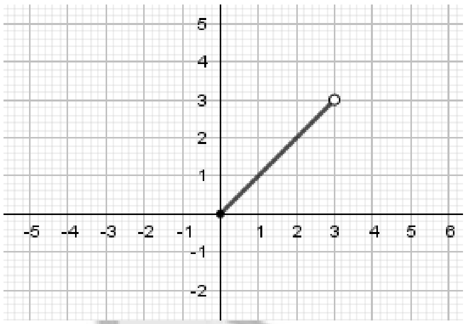
γ) Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$.

15017.Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2,2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-2)$. (Μονάδες 8)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0,3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)

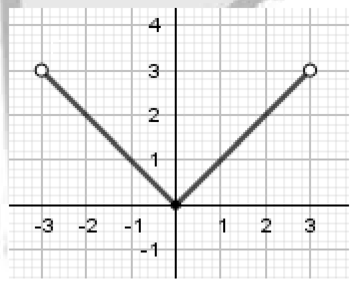


Λύση

α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα (α,3) είναι άρτια, θα πρέπει για κάθε $x\in(\alpha,3)$ και $-x\in(\alpha,3)$. Αυτό ισχύει μόνο όταν α = -3.

β)Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2,2)$, είναι $f(2)=2$. Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-2)=f(2)=2$.

γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

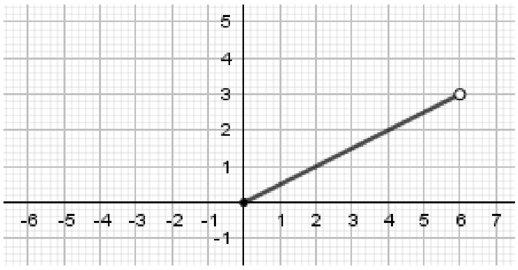


15018.Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha,6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4,2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-4)$. (Μονάδες 8)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)



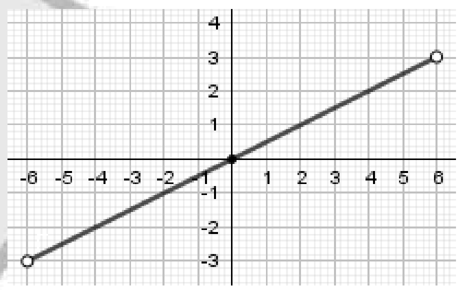
Λύση

α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα (α,6) είναι περιττή, θα πρέπει για κάθε $x\in(\alpha,6)$ και $-x\in(\alpha,6)$. Αυτό ισχύει μόνο όταν α = -6.

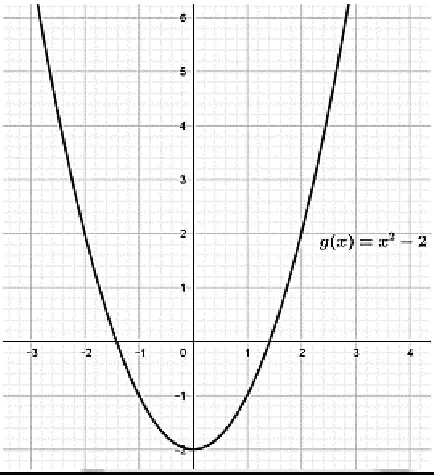
β)Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4,2)$, είναι $f(4)=2$.

Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-4)=-f(4)=-2$.

γ) Επειδή η f είναι περιττή, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



15811.Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2-2,\ x\in\mathbb{R}$.



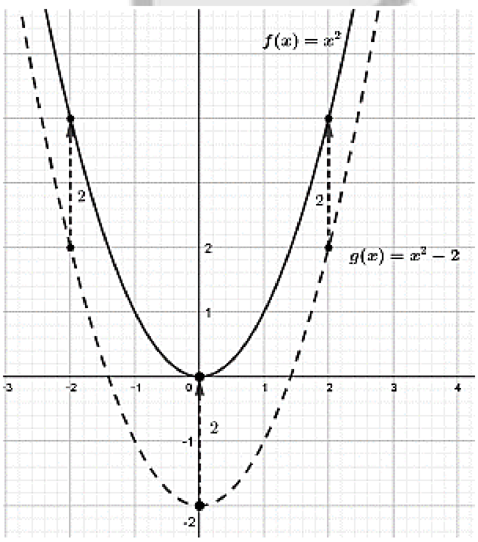
α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,
i. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.
(Μονάδες 9)
ii. να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.
(Μονάδες 7)
β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.
(Μονάδες 9)

Λύση

α) i. Η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική ως προς τον y΄y άξονα, άρα η g είναι άρτια.

ii. Η g παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x=0$, το $g(0)=-2$, διότι όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση, $g(x)\geq -2$ και η ισότητα ισχύει για $x=0$.

β) Η γραφική παράσταση της $f(x)=x^2=g(x)+2$ προκύπτει με κατακόρυφη και προς τα πάνω μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά 2 μονάδες.

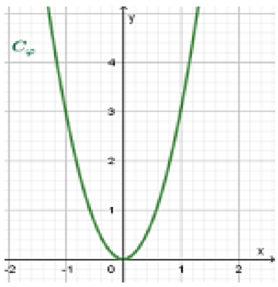


Θέμα 4ο

14973.Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=3x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=3x^2-6x+8,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
(Μονάδες 4)
β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=3(x-1)^2+5,\ x\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση , αιτιολογώντας την απάντησή σας. **(Μονάδες 4)**
γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης , να βρείτε:
i. Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης.
(Μονάδες 6)
ii. Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; **(Μονάδες 4)**
iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της και της ευθείας με εξίσωση $y=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ. **(Μονάδες 7)**

Λύση

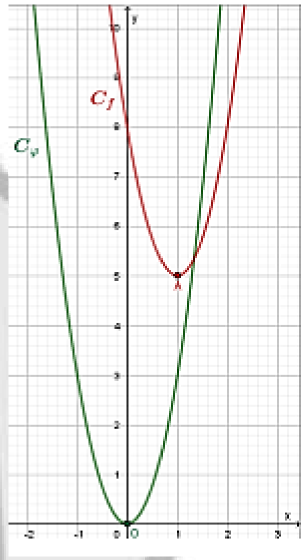
α) Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\varphi(-x)=3(-x)^2=3x^2=\varphi(x)$, επομένως είναι άρτια συνάρτηση. Η γραφική της παράσταση είναι η διπλανή παραβολή.



β) Είναι: $f(x)=3(x-1)^2+5=3(x^2-2x+1)+5\Leftrightarrow$

$f(x)=3x^2-6x+3+5=3x^2-6x+8$. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$f(x)=3(x-1)^2+5$.



Η γραφική παράσταση της προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της , μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 5 μονάδες προς τα πάνω.

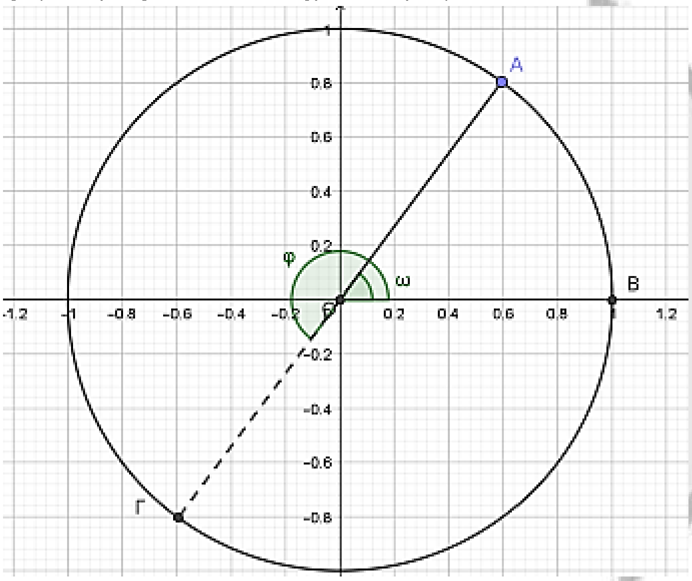
γ) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο Α(1,5).

i. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της, δηλαδή η x = 1.

ii. Η συνάρτηση παρουσιάζει στη θέση $x_0=1$, ολικό ελάχιστο το $f(1)=5$

iii. Αν λ > 5 η εξίσωση έχει 2 ρίζες
Αν λ = 5 η εξίσωση έχει 1 ρίζα
Αν λ < 5 η εξίσωση είναι αδύνατη.

15079.Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\omega = BOA$.



α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $συνω = \frac{3}{5}$. **(Μονάδες 8)**

β) Η προέκταση του τμήματος ΑΟ τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε την γωνία $\varphi = BO\Gamma$ με την βοήθεια της γωνίας ω. **(Μονάδες 8)**

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $συνφ$. **(Μονάδες 9)**

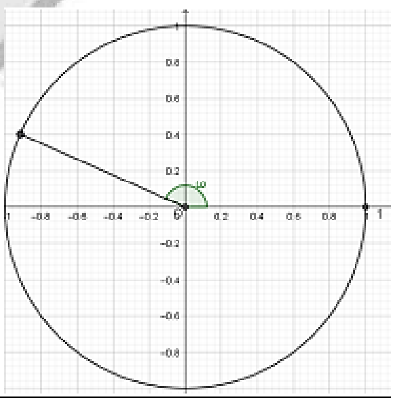
Λύση

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Επειδή η τετμημένη του σημείου Α είναι $0,6 = \frac{3}{5}$, έχουμε $συνω = \frac{3}{5}$.

β) i. Εφόσον η ΟΓ είναι προέκταση της ΟΑ έχουμε $AO\Gamma = \pi$ rad. Επομένως $\varphi = BO\Gamma = \pi + \omega$.

ii. Το συνημίτονο της γωνίας φ είναι η τετμημένη του σημείου Γ, δηλαδή $συνφ = -\frac{3}{5}$.

15191.Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με ημω = 0,4.

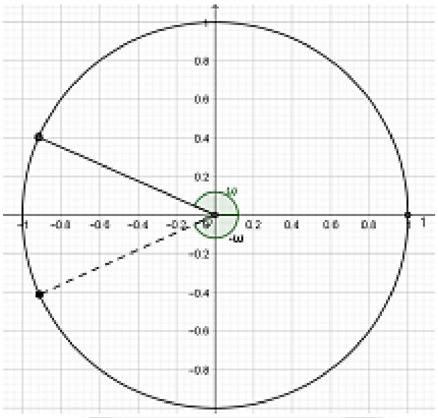


α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 12)**

β) Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $ημ(-\omega)$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι αντίθετες όταν έχουν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x. Άρα η γωνία $-\hat{\omega}$ είναι όπως φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή στο παρακάτω σχήμα.



β) Το ημίτονο γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας με το κύκλο, οπότε έχουμε, λόγω συμμετρίας

$\eta\mu(-\omega) = -0,4$

Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

ΘΕΜΑ 2ο

15046.Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $συνA = -\frac{3}{5}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το ημΑ . (Μονάδες 15)

Λύση

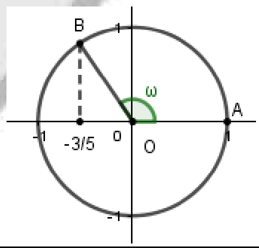
α) Επειδή η γωνία Α βρίσκεται σε τρίγωνο είναι $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$. Επειδή $συνA < 0$ είναι $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$.

β) Είναι $ημ^2A + συν^2A = 1 \Leftrightarrow ημ^2A + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow ημ^2A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow ημA = \pm\frac{4}{5}$.

Επειδή $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$, είναι ημΑ > 0, άρα $ημA = \frac{4}{5}$.

15185. α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 11)

β) Αν $συνω = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το ημω. (Μονάδες 14)



Λύση

α) Το συνημίτονο της γωνίας *ω* είναι όσο και η τετμημένη του σημείου *Β* του τριγωνομετρικού κύκλου. Άρα $συνω = -\frac{3}{5}$.

β) Είναι $ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow ημ^2ω + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow ημ^2ω = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow ημω = \pm\frac{4}{5}$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\frac{\pi}{2} < ω < \pi$, οπότε ημω > 0, άρα $ημω = \frac{4}{5}$.

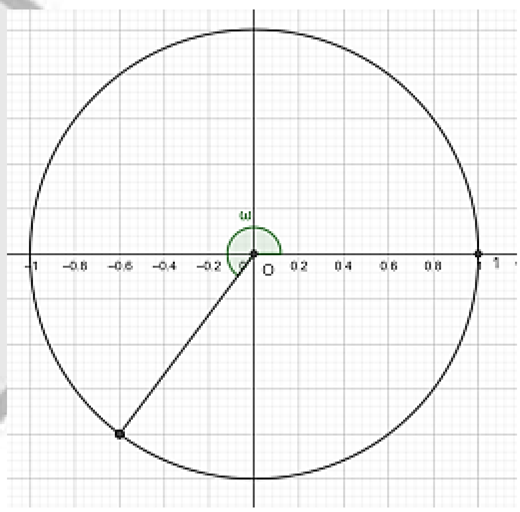
15192.Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{ω}$.

α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $συνω = -\frac{3}{5}$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. ημω . (Μονάδες 6)

ii. εφω (Μονάδες 7)



Λύση

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι ή τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Οπότε είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = -0,6 = -\frac{3}{5}$.

β) i. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm\frac{4}{5}$

Επειδή η γωνία ω βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο είναι ημω < 0, άρα $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$.

ii. $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

15429.α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 476^\circ = \eta\mu 116^\circ$. **(Μονάδες 11)**

β) Αν γνωρίζουμε ότι το $\eta\mu 116^\circ$ είναι περίπου $\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 116^\circ$. **(Μονάδες 14)**

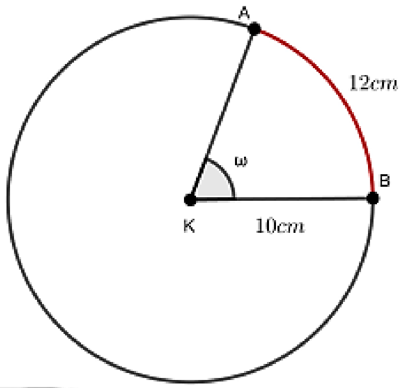
Λύση

α) $\eta\mu 476^\circ = \eta\mu\left(360^\circ + 116^\circ\right) = \eta\mu 116^\circ$

β) $\eta\mu^2 116^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 116^\circ = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 116^\circ = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 116^\circ = 1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu 116^\circ = \pm\frac{\sqrt{19}}{10}$. Επειδή $116^\circ \in \left(90^\circ, 180^\circ\right)$ είναι $\sigma\upsilon\nu 116^\circ < 0$ άρα $\sigma\upsilon\nu 116^\circ = -\frac{\sqrt{19}}{10}$.

15814.Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο ΑΒ με μήκος 12cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω.



α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας ω είναι 1, 2 rad. **(Μονάδες 6)**

ii. Με χρήση του αi) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία. **(Μονάδες 6)**

β) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{9}{25}$, να βρείτε το ημω.

(Δίνεται ότι $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$) **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) i) Το ακτίνιο (rad) είναι η γωνία που όταν γίνει επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας ρ, βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ. Εδώ έχουμε επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας 10 cm γωνία ω, η οποία βαίνει σε τόξο 12 cm. Άρα αφού το 1 rad σε αυτόν τον κύκλο είναι η γωνία που βαίνει σε τόξο 10 cm τότε η γωνία $\omega = \frac{12}{10} = 1,2$ rad.

ii) Είναι $1,2 < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2,4 < \pi$ ισχύει, άρα $\omega < \frac{\pi}{2}$ rad και είναι οξεία.

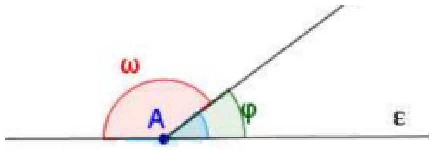
β) Ισχύει $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \left(\frac{9}{25}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{81}{625} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{544}{625} \Leftrightarrow$

$\eta\mu\omega = \pm\frac{\sqrt{544}}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm\frac{4\sqrt{34}}{25}$ και επειδή η γωνία ω είναι οξεία τότε $\eta\mu\omega = \frac{4\sqrt{34}}{25}$.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

ΘΕΜΑ 2ο

15652.Δίνεται $ημφ = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας ω του σχήματος. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $ημ^2φ + συν^2φ = 1 \Leftrightarrow συν^2φ = 1 - ημ^2φ$

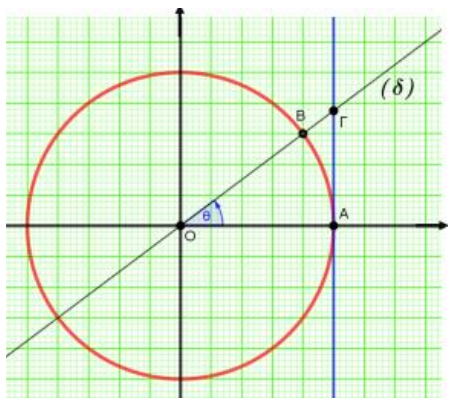
Αντικαθιστούμε το ημφ με $\frac{3}{5}$ και έχουμε $συν^2φ = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$

Επειδή φ οξεία γωνία είναι $συνφ > 0$, οπότε έχουμε $συνφ = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $ω = π - φ$.

Άρα : $ημω = ημ(π - φ) = ημφ = \frac{3}{5}$, $συνω = συν(π - φ) = -συνφ = -\frac{4}{5}$,

15092.Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A. Η τελική πλευρά OB της θετικής γωνίας $AOB = \hat{θ}$,αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ. Γνωρίζουμε ότι $ημθ = \frac{3}{5}$.



α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό συνθ και στη συνέχεια τον αριθμό εφθ.

(Μονάδες 13)

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων B και Γ.

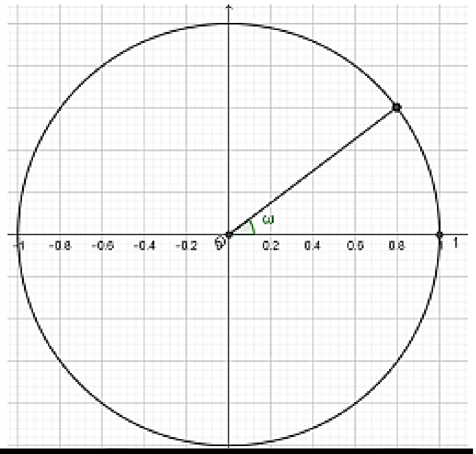
(Μονάδες 12)

Λύση

α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $συνθ = 0{,}8 = \frac{4}{5}$. Είναι $εφθ = \frac{ημθ}{συνθ} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.

β) Γνωρίζουμε ότι είναι Β(συνθ, ημθ) και Γ(1, εφθ). Έτσι έχουμε $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $Γ\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

15193.Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με συνω = 0,8.

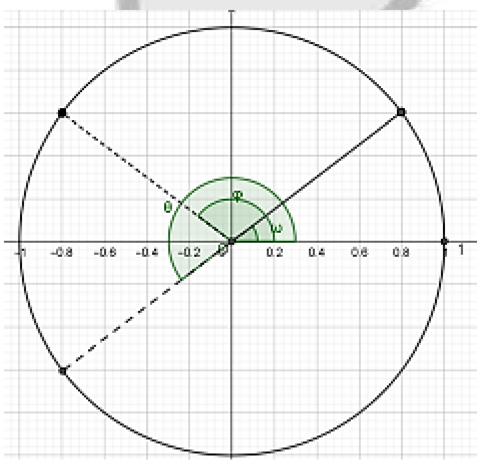


α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα [0, 2π], των οποίων το συνημίτονο είναι −0,8 . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.
(Μονάδες 13)

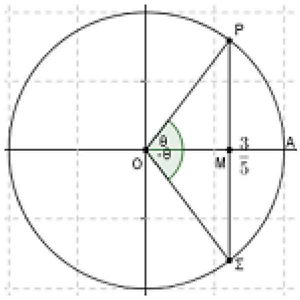
Λύση

α) Οι γωνίες που έχουν συνημίτονο −0,8 έχουν τελική πλευρά στο δεύτερο ή στο τρίτο τεταρτημόριο, ή οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία με τετμημένη −0,8 . Άρα οι ζητούμενες γωνίες φ και θ είναι όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, με την τελική τους πλευρά να είναι με διακεκομμένη γραμμή.



β) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο έχουν αντίθετα συνημίτονα, αν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y ή ως προς την αρχή O των αξόνων.
Οπότε οι δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\varphi = \pi - \omega$ ή διαφέρουν κατά π, οπότε $\theta = \pi + \omega$.

15266.Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και −θ .



α) Να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$.
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το ημθ.
(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας −θ.
(Μονάδες 8)

Λύση

α) Η τελική πλευρά της γωνίας θ είναι η OP και το σημείο P έχει τετμημένη $x = \frac{3}{5}$, άρα $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$.

β) Είναι $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \pm\frac{4}{5}$

Επειδή η γωνία θ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο είναι ημθ > 0, άρα $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$

γ) $\eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta = -\frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu(-\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}$

17936.Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $AOZ=\theta$.

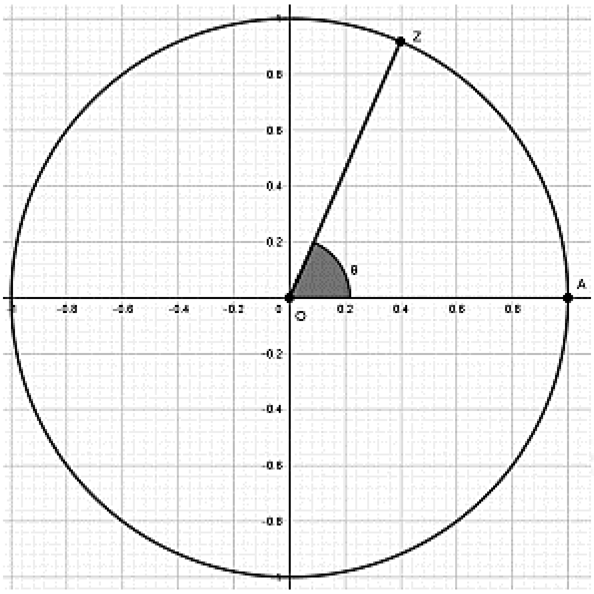
α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών

$3\pi+\theta$ και $\frac{\pi}{2}+\theta$. (Μονάδες 9)

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $συν\theta = 0,4$. (Μονάδες 7)

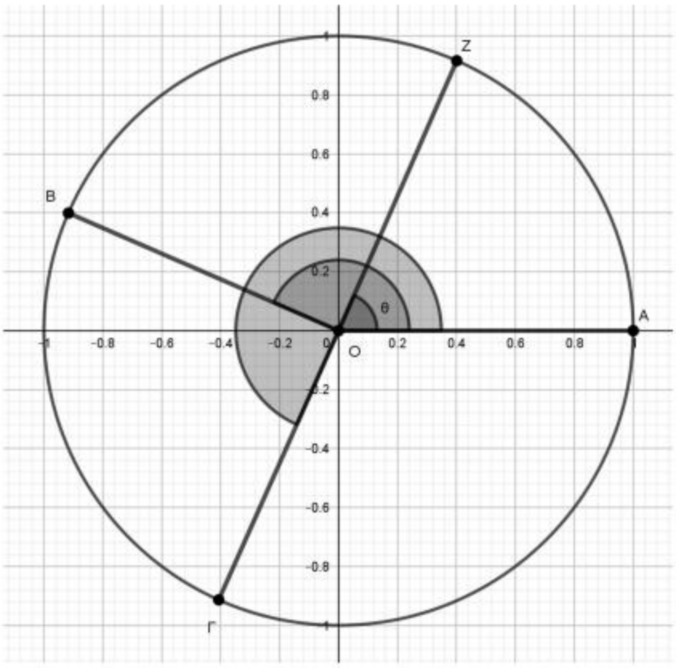
ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$συν(3\pi+\theta)$ και $ημ\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$. (Μονάδες 9)



Λύση

α) Η τελική πλευρά της $3\pi+\theta$, είναι η ΟΓ και η τελική πλευρά της $\frac{\pi}{2}+\theta$ είναι η ΟΒ.



β) i) Όπως φαίνεται στο σχήμα, η τετμημένη του σημείου Ζ της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι $0,4$, άρα $συν\theta = 0,4$.

ii) 1ος τρόπος: Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$$συν(3\pi+\theta)=-0,4 \quad \text{και} \quad ημ\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=0,4.$$

2ος τρόπος: Είναι $συν(3\pi+\theta)=συν(\pi+\theta)=-συν\theta=-0,4$ και $ημ\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=συν\theta=0,4$

17933.Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία $AOZ = \theta$.

α) Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών $3\pi + \theta$ και $4\pi - \theta$.

(Μονάδες 9)

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί

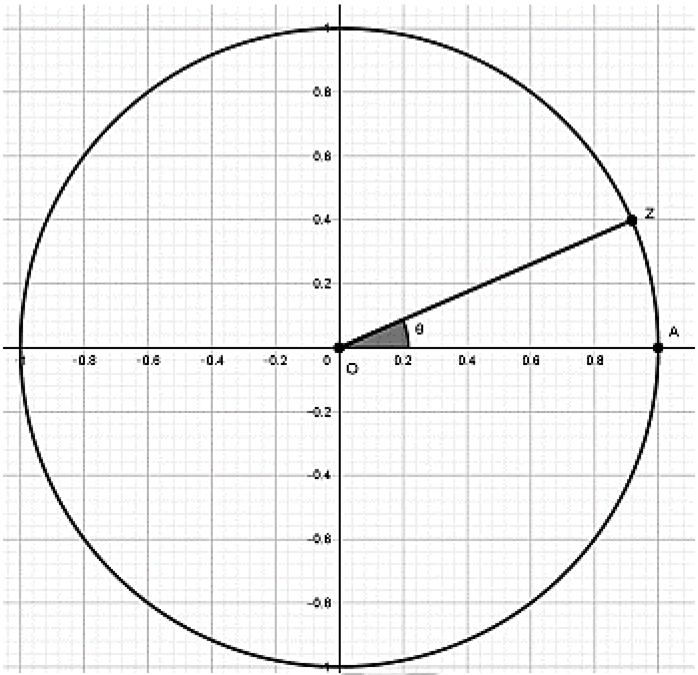
$$\eta\mu\theta = 0,4.$$

(Μονάδες 7)

ii. Με χρήση του βi) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

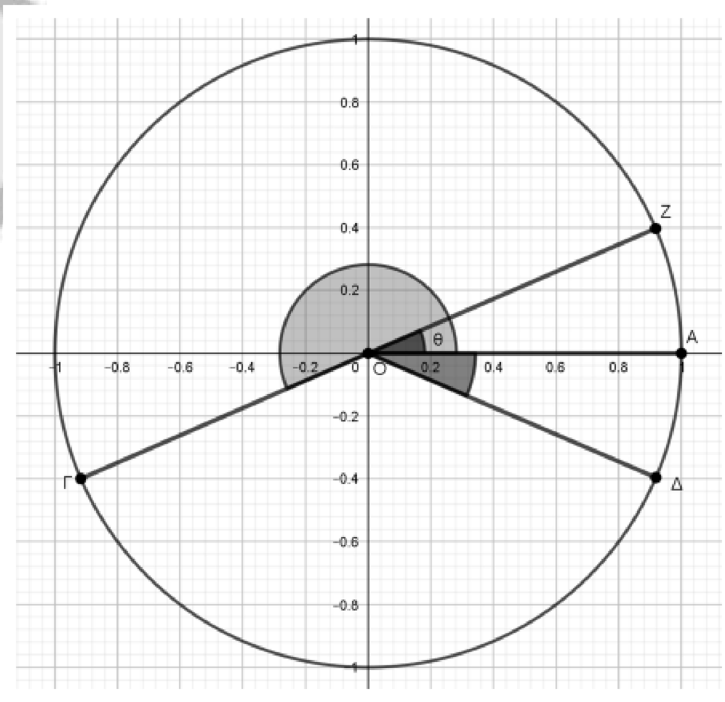
$\eta\mu(3\pi + \theta)$ και $\eta\mu(4\pi - \theta)$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Η τελική πλευρά της $3\pi + \theta$ είναι η ΟΓ και η τελική πλευρά της $4\pi - \theta$ είναι ΟΔ.



β) i) Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η τεταγμένη του σημείου Ζ της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι 0,4 , άρα $\eta\mu\theta = 0,4$.

ii) 1ος τρόπος: Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$\eta\mu(3\pi + \theta) = -0,4$ και $\eta\mu(4\pi - \theta) = -0,4$.

2ος τρόπος: Είναι $\eta\mu(3\pi + \theta) = \eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta = -0,4$ και $\eta\mu(4\pi - \theta) = \eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta = -0,4$

14323. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3συν2x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f. **(Μονάδες 12)**

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου. **(Μονάδες 13)**

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x					
συν2x					
$f(x)=-3συν2x$					

Λύση

α)Έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=-3συν2x$, $x\in\mathbb{R}$.

Για την περίοδο έχουμε $T=\frac{2\pi}{\omega}$ με ω=2 άρα είναι $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

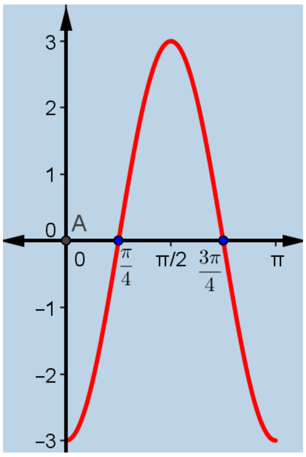
Επίσης έχουμε ότι $-1\le συν2x\le 1$ (πολ/ζω με -3) $\Leftrightarrow$ $-3\cdot(-1)\ge -3συν2x\ge -3\cdot 1$ $\Leftrightarrow$

$3\ge -3συν2x\ge -3$ $\Leftrightarrow$ $-3\le -3συν2x\le 3\Leftrightarrow -3\le f(x)\le 3\Leftrightarrow f(0)\le f(x)\le f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι το 3 ($f_{max}=3$) και ελάχιστη τιμή της f είναι το -3 ($f_{min}=-3$)

β)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συν2x	1	0	-1	0	1
$f(x)=-3συν2x$	-3	0	3	0	-3



15091.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{2}\cdot συνx$, $x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης. **(Μονάδες 7)**

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμής της. **(Μονάδες 10)**

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) i. $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

ii. Η μέγιστη τιμή της f είναι $\sqrt{2}$ και η ελάχιστη $-\sqrt{2}$.

β) $f(2025\pi)=\sqrt{2}συν(2025\pi)=\sqrt{2}συν(2024\pi+\pi)=\sqrt{2}συν\pi=-\sqrt{2}$

15172.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4ημ(11π-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $ημ(11π-x)=ημx$, $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 6)**

ii. $f(x)=4ημx$, $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 4)**

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4ημx$ όταν $x\in[0,2π]$.

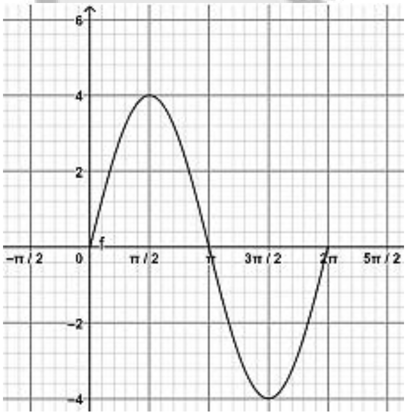
(Μονάδες 15)

Λύση

α) i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $ημ(11π-x)=ημ(10π+π-x)=ημ(5\cdot 2π+π-x)=ημ(π-x)=ημx$

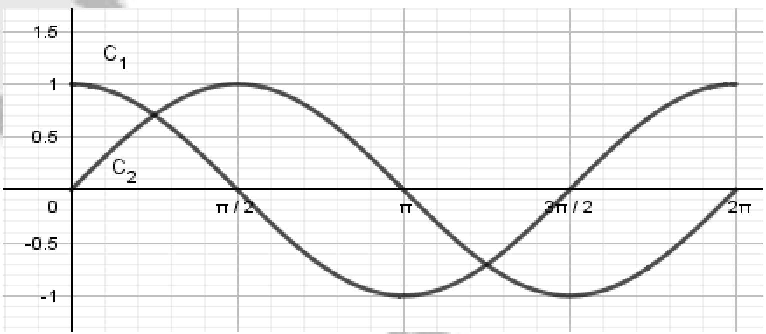
ii. Είναι $f(x)=4ημ(11π-x)=4ημx$

β) Παρατηρούμε πως η f(x) = 4ημx έχει την μορφή ρημωx με ρ=4 και ω=1. Άρα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 4 και ελάχιστη τιμή -4 με περίοδο 2π. Έχοντας τα παραπάνω χαρακτηριστικά και τον παρακάτω πίνακα τιμών στο διάστημα [0,2π],



x	0	$\frac{π}{2}$	π	$\frac{3π}{2}$	2π
4ημx	0	4	0	-4	0

15644.Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x\in[0,2π]$.



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x)=συνx$ και $g(x)=ημx$ για $x\in[0,2π]$ ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x)=συνx$ και ποια της $g(x)=ημx$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $ημx=συνx$ στο διάστημα $[0,2π]$.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $f(0)=συν0=1$, άρα η C_1 ίναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Ακόμα $g(0)=ημ0=0$ άρα η C_2 ίναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

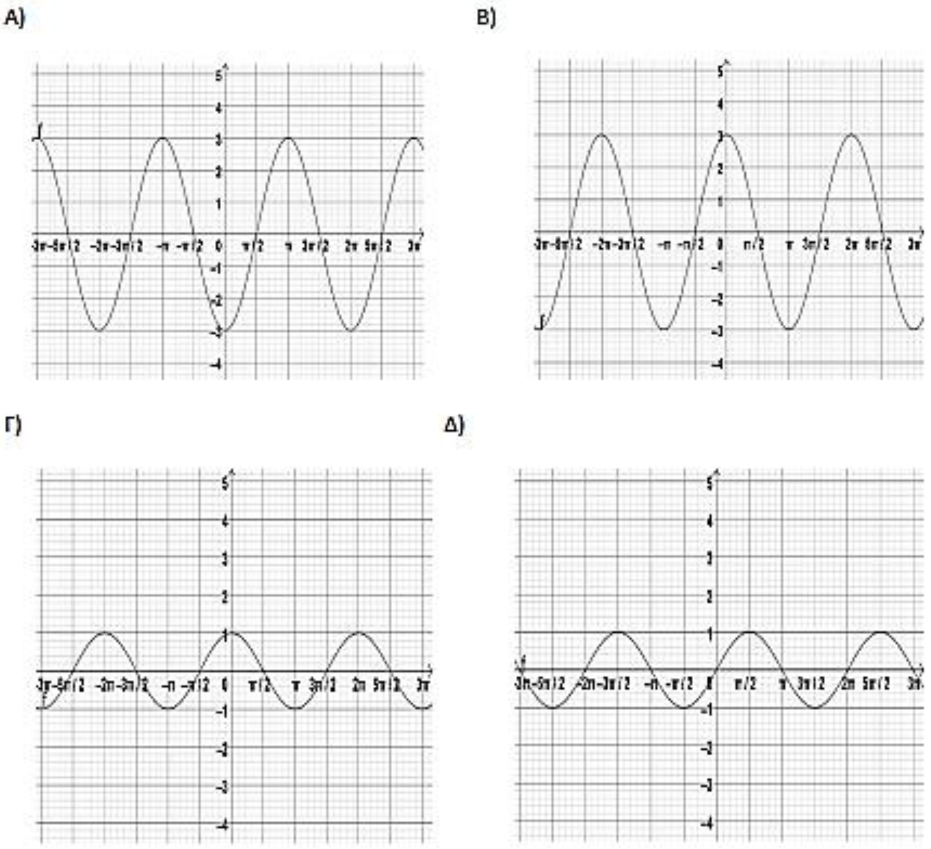
β) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων είναι τα Α και Β , με τετμημένες $x_1=\frac{π}{4}$ και $x_2=\frac{5π}{4}$.

15009. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3συνx, x \in \mathbb{R}$.**

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. **(Μονάδες 7)**

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f, να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3συνx$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 10)

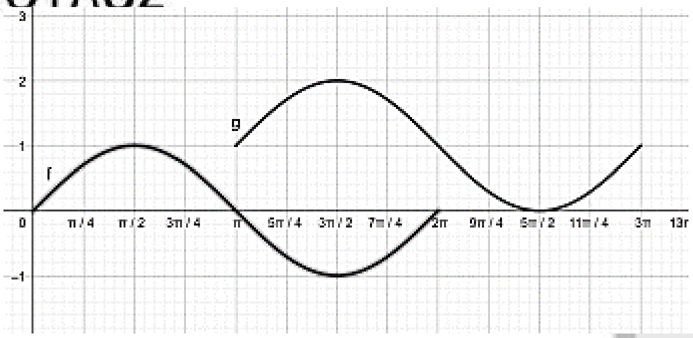
Λύση

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = ρ \cdot συν(ωx)$, $ρ < 0$ με $ρ = -3$ και $ω = 1$ οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 3.

β) Η συνάρτηση έχει περίοδο $T = \frac{2π}{ω} = 2π$.

γ) Το σχήμα Α) είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = -3συνx$, $x \in \mathbb{R}$, γιατί είναι η μόνη που έχει μέγιστη τιμή 3 για x = π και ελάχιστη −3 για x = 0 και x = 2π.

15788.



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ στο διάστημα [0, 2π] και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις.
Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:
α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά. **(Μονάδες 13)**
β) i. τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g . **(Μονάδες 6)**
ii. τον τύπο της g . **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού συνάρτησης σχεδιασμένης σε σύστημα αξόνων είναι η προβολή της γραφικής παράστασης στον άξονα x΄x . Οπότε είναι $D_g=[\pi,3\pi]$.

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης g είναι 2 στην θέση $x=\frac{3\pi}{2}$.

β) i. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f . Η γραφική παράσταση της f μετατοπίστηκε προς τα «δεξιά» κατά π και προς τα «πάνω» κατά 1.

ii. Έχουμε $g(x)=f(x-\pi)+1$, δηλαδή $g(x)=\eta\mu(x-\pi)+1$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\pi,3\pi]$.

15809.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu 2x,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g . **(Μονάδες 6)**
β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 10)
ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου. **(Μονάδες 9)**

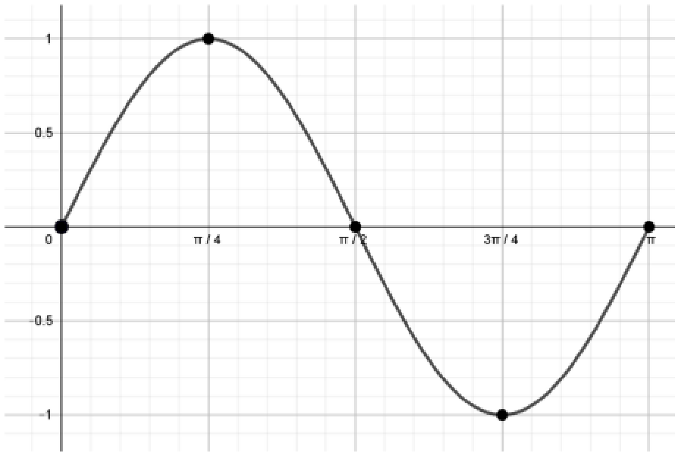
Λύση

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$, $\rho>0$ με $\rho=1$ και $\omega=2$ οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -1 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1. Έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$.

β) i)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=\eta\mu 2x$	0	1	0	-1	0

γ)



15810. **Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x,\ x\in\mathbb{R}$.**

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g . **(Μονάδες 6)**

β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου. **(Μονάδες 9)**

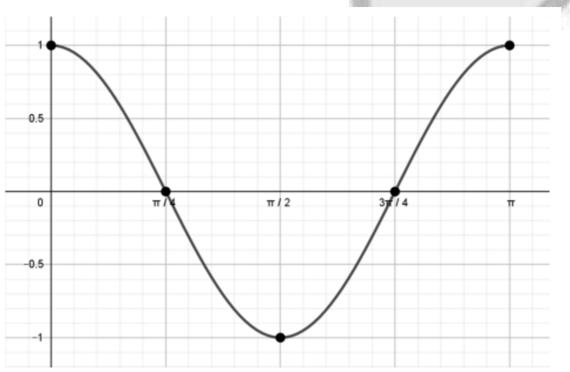
Λύση

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho>0$ με $\rho=1$ και $\omega=2$ οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -1 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1. Έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$.

Β) i)

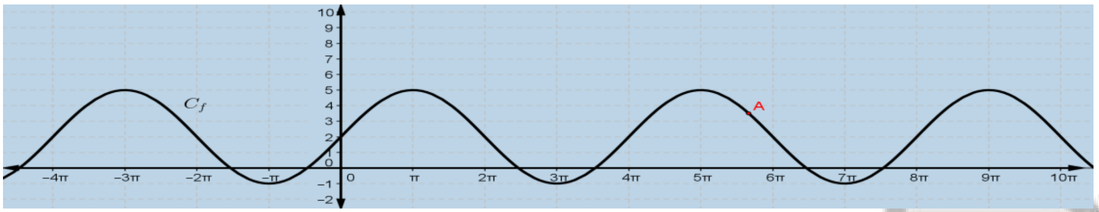
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$	1	0	-1	0	1

ii)



Θέμα 4ο

14239.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)+k$, με ρ, k πραγματικές σταθερές και $\omega>0$.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f . (Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho=3$, $\omega=\frac{1}{2}$ και $k=2$, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου $A\left(x_0,\frac{7}{2}\right)$ της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα. (Μονάδες 10)

Λύση

α) i) Από το γράφημα της συνάρτησης παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της είναι το 5 και η ελάχιστη το -1

ii) Η περίοδος T είναι το διάστημα μεταξύ δυο διαδοχικών τετμημένων των σημείων στα οποία η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο.
Οπότε $T=5\pi-\pi=4\pi$,όπου 5π και π είναι τα διαδοχικά μέγιστα.

β) $T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{4\pi}\Rightarrow \omega=\frac{1}{2}$

Από τη μορφή του γραφήματός βλέπουμε ότι $\rho>0$ άρα μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι $\rho+k$ ενώ η ελάχιστη τιμή είναι $-\rho+k$. Άρα με βάση το ερώτημα α) δημιουργούμε το σύστημα $\begin{cases}\rho+k=5\\-\rho+k=-1\end{cases}$ όπου με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $2k=4\Leftrightarrow k=2$ και $\rho+k=5\Leftrightarrow \rho=5-k\Leftrightarrow \rho=3$

γ) Για $\rho=3$, $\omega=\frac{1}{2}$ και $k=2$ έχουμε $f(x)=3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x\right)+2$.Το σημείο A ανήκει στη γραφική παράσταση της f οπότε : $f(x_0)=\frac{7}{2}\Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)+2=\frac{7}{2}\Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

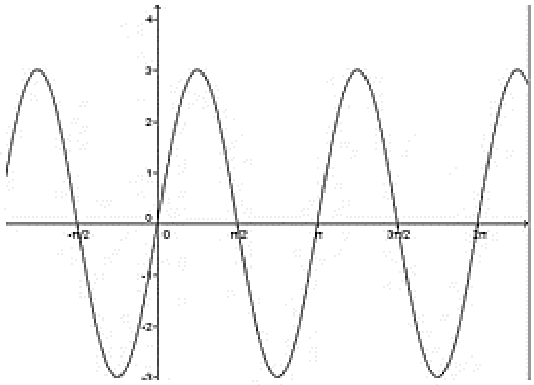
$$\eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{1}{2}x_0\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}x_0=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \frac{1}{2}x_0=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \begin{cases}x_0=4\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\\ x_0=4\kappa\pi+\frac{5\pi}{3}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}\ .$$

Λόγω του γραφήματος της f αυτές οι λύσεις για το x πρέπει να βρίσκονται στο διάστημα $(5\pi,6\pi)$ άρα

$$\begin{cases}5\pi<4\kappa\pi+\frac{\pi}{3}<6\pi\\ \acute{\eta}\\ 5\pi<4\kappa\pi+\frac{5\pi}{3}<6\pi\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}5<4\kappa+\frac{1}{3}<6\\ \acute{\eta}\\ 5<4\kappa+\frac{5}{3}<6\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{14}{3}<4\kappa<\frac{17}{3}\\ \acute{\eta}\\ \frac{10}{3}<4\kappa<\frac{13}{3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{14}{12}<\kappa<\frac{17}{12}\\ \acute{\eta}\\ \frac{10}{12}<\kappa<\frac{13}{12}\end{cases}.$$

Επειδή $\kappa\in\mathbb{Z}$ από τις δυο ανισώσεις έχουμε ότι η μόνη τιμή του κ είναι $\kappa=1$ για τη δεύτερη ανίσωση το οποίο μας δίνει ότι $x_0 = 4\pi + \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow x_0 = \frac{17\pi}{3}$

15062.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x), x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \rho > 0$.



α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδό της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 6)

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ. (Μονάδες 6)

Έστω ρ = 3 και α = 2. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5, x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4. (Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Από το σχήμα είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από επανάληψη του τμήματος της που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, \pi]$, οπότε η περίοδος της f είναι $T = \pi$.

Επιπλέον οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης περιέχονται στο διάστημα $[-3, 3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη είναι ίση με 3.

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x)$ με α, ρ > 0, οπότε έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ ελάχιστη τιμή $-\rho$ και μέγιστη ίση με ρ. Έτσι, έχουμε $\frac{2\pi}{\alpha} = \pi \Leftrightarrow \alpha = 2$ και $\rho = 3$.

γ) Είναι $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 1 + 4 = (x^2 - 1)^2 + 4$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(x^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow g(x) \geq 4$ και η ισότητα ισχύει όταν $(x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Άρα ο αριθμός 4 είναι η ελάχιστη τιμή της f.

δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq 4$ και $-3 \leq f(x) \leq 3$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη.
Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

15992.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x), g(x) = \eta\mu(\omega x)$ όπου $\omega, \rho > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω, αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι- 2 και η περίοδος της g είναι π. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 6)

β) i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x, x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x), x \in [0, \pi]$. (Μονάδες 10)

ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9}$. (Μονάδες 9)

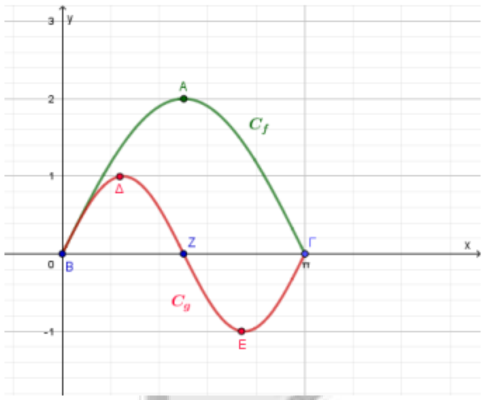
Λύση

α) Το ρ είναι η μέγιστη τιμή της f και το $-\rho$ την ελάχιστη τιμή άρα είναι $\rho = 2$.

Η περίοδος της g είναι $T=\pi \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{\omega}=\pi \Leftrightarrow \omega=2$.

β) ii) Για την συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$ έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)=2\eta\mu x$	0	2	0



Για την συνάρτηση $g(x)=\eta\mu(2x)$, $x\in[0,\pi]$ έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g(x)=\eta\mu(2x)$	0	1	0	-1	0

Άρα έχουμε τις διπλανές γραφικές παραστάσεις:

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Θέμα 2ο

14280.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημx+1,\ x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. **(Μονάδες 10)**

β) Για ποια τιμή του $x\in[0,2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή; **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Ισχύει ότι $-1\le ημx\le 1 \Leftrightarrow -2\le 2ημx\le 2 \Leftrightarrow -2\le 2ημx\le 2 \Leftrightarrow -1\le 2ημx+1\le 3 \Leftrightarrow -1\le f(x)\le 3$

Άρα η μέγιστη τιμή της f είναι $f_{max}=3$ και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι $f_{min}=-1$.

β) Έχουμε $f(x)=3 \Leftrightarrow 2ημx+1=3 \Leftrightarrow 2ημx=2 \Leftrightarrow ημx=1 \Leftrightarrow ημx=ημ\frac{\pi}{2} \overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{2}$

14324. Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $0<x<\frac{\pi}{2}$ και $ημx+ημ(\pi-x)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $ημx=\frac{1}{2}$. **(Μονάδες 12)**

β) Να βρείτε την γωνία x. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Για κάθε $0<x<\frac{\pi}{2}$ είναι $ημx+ημ(\pi-x)=1 \Leftrightarrow ημx+ημx=1 \Leftrightarrow 2ημx=1 \Leftrightarrow ημx=\frac{1}{2}$

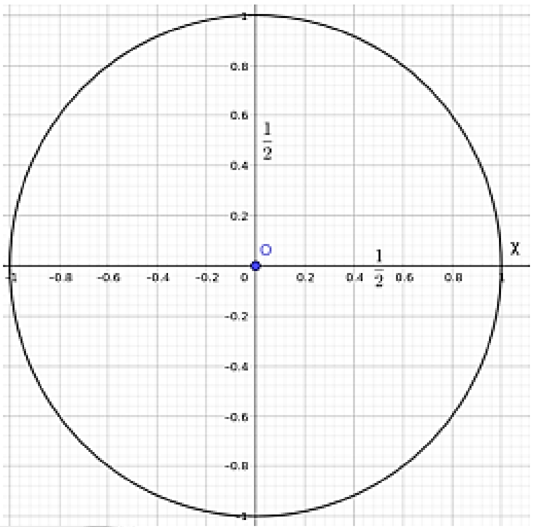
β) $ημx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow ημx=ημ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(x=2κ\pi+\frac{\pi}{6},\ κ\in\mathbb{Z}\right)$ ή $\left(x=2κ\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2κ\pi+\frac{5\pi}{6}, κ\in\mathbb{Z}\right)$

14977.α) Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα [0,2π), με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox, οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

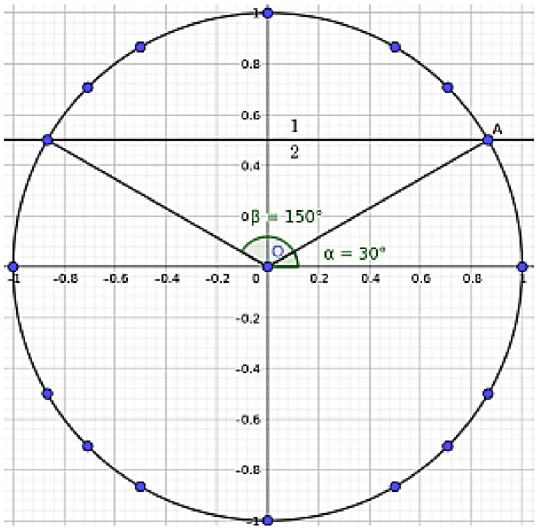
β) Να λύσετε την εξίσωση $ημx=\frac{1}{2}$ για $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)



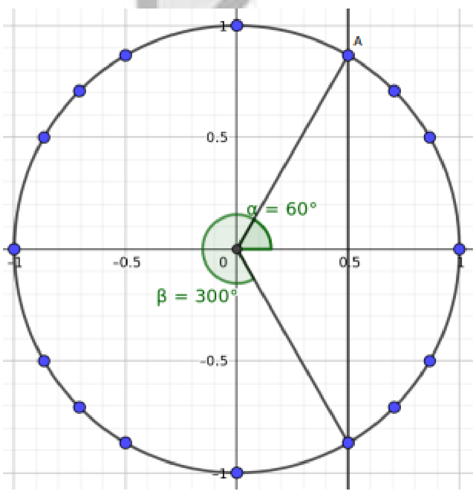
Λύση

α) Το ημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Ox και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο A του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου A στον άξονα y΄y. Άρα, οι γωνίες που έχουν ημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα y΄y στο $\frac{1}{2}$.



Οπότε φέρουμε την ευθεία $y=\frac{1}{2}$ και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα $[0,2\pi)$ που έχουν αυτό το ημίτονο. Είναι οι γωνίες $\frac{\pi}{6}$ και $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

Το συνημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Ox
και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο A του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου A στον άξονα x΄x. Άρα οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $\frac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα x΄x στο $\frac{1}{2}$. Οπότε φέρουμε την ευθεία $x=\frac{1}{2}$ και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα $[0,2\pi)$ που έχουν αυτό το συνημίτονο. Είναι οι γωνίες $\frac{\pi}{3}$ και $2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$.



β) $\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left(x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$ ή $\left(x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$

15036.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3\sigma\upsilon\nu 2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. **(Μονάδες 10)**

ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. **(Μονάδες 5)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-3$ στο $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) i) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho>0$ με $\rho=3$ και $\omega=2$. Η μέγιστη τιμή της f είναι $\rho=3$ και η ελάχιστη τιμή $-\rho=-3$.

ii) Η συνάρτηση έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$.

β) $f(x)=-3\Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu 2x=-3\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x=-1\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\pi\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

15969.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2συν(13π+x)-2ημ\left(\frac{π}{2}-x\right)$.

α) Να δείξετε ότι $συν(13π+x)=-συνx$. **(Μονάδες 5)**

β) Να δείξετε ότι $f(x)=-4συνx$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-2$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $συν(13π+x)=συν(12π+π+x)=συν(π+x)=-συνx$

β) $f(x)=2συν(13π+x)-2ημ\left(\frac{π}{2}-x\right)=-2συνx-2συνx=-4συνx$

γ) $f(x)=-2 \Leftrightarrow -4συνx=-2 \Leftrightarrow συνx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx=συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow x=2κπ\pm\frac{π}{3}, κ\in\mathbb{Z}$

Θέμα 4ο

15003.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημαx\cdot\left[συν\left(\frac{π}{2}-αx\right)+2\right]-συναx\cdot συν(π-αx)-1, α\in\mathbb{R}$.

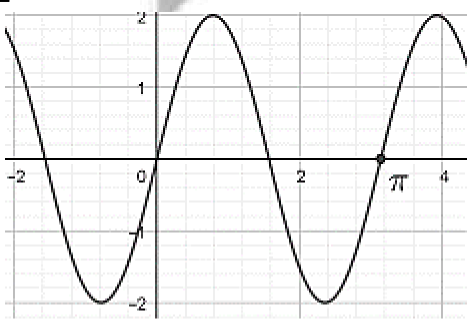
α) i. Να δείξετε ότι $f(x)=2ημαx, x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να δείξετε ότι α = 2. **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία ε: y = 1 για $x\in[0,π]$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) i. $f(x)=ημαx\cdot\left[συν\left(\frac{π}{2}-αx\right)+2\right]-συναx\cdot συν(π-αx)-1 \Leftrightarrow$

$f(x)=ημαx\cdot(ημαx+2)-συναx\cdot(-συναx)-1 \Leftrightarrow$

$f(x)=ημ^2αx+2ημαx+συν^2αx-1=1+2ημαx-1=2ημαx$

ii. Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει περίοδο T = π, άρα $\frac{2π}{α}=π \Leftrightarrow α=2$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την y = 1 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=1$.

Είναι $f(x)=1 \Leftrightarrow 2ημ2x=1 \Leftrightarrow ημ2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow ημ2x=ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow \left(2x=2κπ+\frac{π}{6} \Leftrightarrow x=κπ+\frac{π}{12}, κ\in\mathbb{Z}\right)$ ή

$\left(2x=2κπ+π-\frac{π}{6} \Leftrightarrow x=κπ+\frac{5π}{12}, κ\in\mathbb{Z}\right)$.

Είναι $0\le x\le π \Leftrightarrow 0\le κπ+\frac{π}{12}\le π \Leftrightarrow -\frac{π}{12}\le κπ\le\frac{11π}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le κ\le\frac{11}{12}$, όμως $κ\in\mathbb{Z}$ άρα κ = 0, οπότε

$x=\frac{π}{12}$.

Είναι $0 \le x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le \kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \le \pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{12} \le \kappa\pi \le \frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le \frac{7}{12}$, όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$ άρα κ = 0, οπότε $x = \frac{5\pi}{12}$. Τα ζητούμενα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες $\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{12}, 1\right)$.

15014.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του α, αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2 . (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$, είναι $\beta = 8$. (Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Η μέγιστη τιμή της f είναι η α, άρα α = 2.

β) $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\beta\pi}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta\pi}{16} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta\pi = 32\kappa\pi + 8\pi \Leftrightarrow \beta = 32\kappa + 8,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

$\beta > 0 \Leftrightarrow 32\kappa + 8 > 0 \Leftrightarrow 32\kappa > -8 \Leftrightarrow \kappa > -\frac{1}{4}$. Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$, οπότε η μικρότερη τιμή του κ είναι το 0 και τότε η μικρότερη τιμή του β είναι 8.

γ) $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu 8x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 8x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 8x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(8x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right)$ ή $\left(8x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right)$.

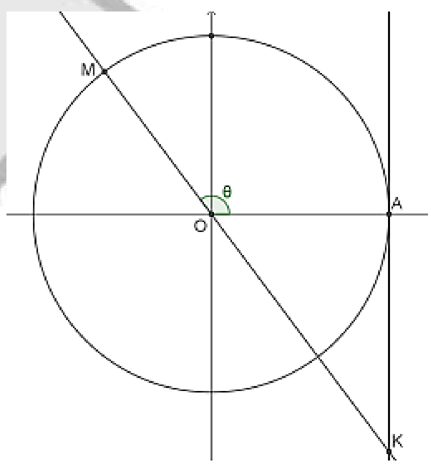
Πρέπει $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{48} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le 12\kappa\pi + \pi \le 24\pi \Leftrightarrow -\pi \le 12\kappa\pi \le 23\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \le \kappa \le \frac{23}{12}$.

Επειδή ο κ είναι ακέραιος, είναι κ = 0 ή κ = 1. Τότε $x = \frac{\pi}{48}$ ή $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{48} = \frac{13\pi}{48}$

Πρέπει $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le 12\kappa\pi + 5\pi \le 24\pi \Leftrightarrow -5\pi \le 12\kappa\pi \le 19\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le \kappa \le \frac{19}{12}$.

Επειδή ο κ είναι ακέραιος, είναι κ = 0 ή κ = 1. Τότε $x = \frac{5\pi}{48}$ ή $x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{48} = \frac{17\pi}{48}$.

15025.Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = AOM$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο Κ.



α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνθ, εφθ, σφθ. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ και Κ . (Μονάδες 6)

γ) Έστω μια γωνία $\varphi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$ και συνθ < 0.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της

στο 2ο τεταρτημόριο. **(Μονάδες 5)**

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \varphi$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \pm\frac{3}{5}$

Επειδή $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι συνθ < 0, άρα $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{3}{5}$. Είναι $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$, $\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = -\frac{3}{4}$

β) Έστω ότι το Μ έχει συντεταγμένες (x, y), τότε $x = \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{3}{5}$ και $y = \eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, άρα $M\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Η ευθεία x = 1 είναι ο άξονας των εφαπτομένων, οπότε η τεταγμένη του Κ είναι η εφθ και το Κ έχει συντεταγμένες $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$.

γ) i. η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο γιατί μόνο εκεί είναι ημφ > 0 και συν φ < 0.

ii. Είναι ημθ > ημφ και η συνάρτηση y = ημx είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, οπότε $\theta < \varphi$.

15026.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right), x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f . **(Μονάδες 6)**

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x . **(Μονάδες 7)**

δ) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)-1\right)^2 + \left(f(1-x)-1\right)^2 = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \le \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \le 2 \Leftrightarrow -1 \le 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \le 3 \Leftrightarrow -1 \le f(x) \le 3$

άρα η f έχει ελάχιστο το – 1 όταν $\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4\kappa - 1,\ \kappa \in \mathbb{Z}$ και μέγιστο το 3 όταν $\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 4\kappa + 1,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\left(\frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \pi x = 4\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 4\kappa - \frac{1}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right)$ ή

$\left(\frac{\pi x}{2} = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \pi x = 4\kappa\pi + \frac{7\pi}{3} \Leftrightarrow x = 4\kappa + \frac{7}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}\right)$

Οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι $x=4\kappa-\frac{1}{3}$ ή $x=4\kappa+\frac{7}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(1-x)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi(1-x)}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi-\pi x}{2}\right)=1+2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)=1+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, οπότε

$$(f(x)-1)^2+(f(1-x)-1)^2=\left(\cancel{1}+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cancel{1}\right)^2+\left(\cancel{1}+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cancel{1}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$(f(x)-1)^2+(f(1-x)-1)^2=4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=4\left[\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]=4\cdot 1=4$$

15049.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu(\pi+x),x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$. **(Μονάδες 6)**

β) Να αποδείξετε ότι $-2\le f(x)\le 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. **(Μονάδες 10)**

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα y΄y. **(Μονάδες 3)**

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον x΄x . **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Είναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu(\pi+x)=-\eta\mu x$, οπότε $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

β) Είναι $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\,(1)$ και $-1\le\eta\mu x\le 1\Leftrightarrow 1\ge-\eta\mu x\ge-1\Leftrightarrow-1\le-\eta\mu x\le 1\,(2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $-2\le\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\le 2\Leftrightarrow-2\le f(x)\le 2$.

Για να είναι ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της f πρέπει να υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο συνx = 1 και $-\eta\mu x=1\Leftrightarrow\eta\mu x=-1$ που είναι αδύνατο γιατί $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1+1=2\ne 1$.

γ) i. Είναι $f(0)=\sigma\upsilon\nu 0-\eta\mu 0=1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,1).

ii. $f(x)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x$

Για $x=\frac{\pi}{4}$ είναι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ και για $x=2\pi+\frac{\pi}{4}$ είναι

$\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε $f\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Δύο σημεία τομής της C_f με τον x΄x είναι τα $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ και $\left(\frac{9\pi}{4},0\right)$.

15050. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία y = 1. **(Μονάδες 5)**

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. **(Μονάδες 6)**

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα [0, 2π]. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Είναι $f_{min} = -2$ και $f_{max} = 2$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία y = 1 προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1$. Είναι $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2συνx = 1 \Leftrightarrow συνx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2κπ \pm \frac{\pi}{3},\ κ \in \mathbb{Z}$.

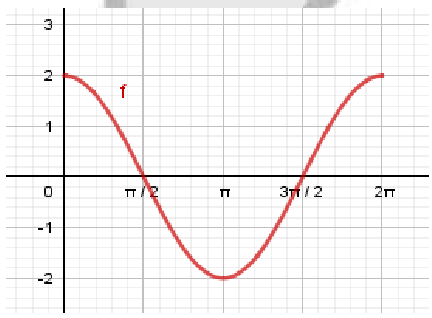
Για κ = 0 είναι $x = \frac{\pi}{3}$ και για κ = 1 είναι $x = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$. Άρα δύο κοινά σημεία της C_f με την ευθεία y = 1 είναι τα $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right), \left(\frac{7\pi}{3}, 1\right)$.

γ) Οι αριθμοί $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}$ βρίσκονται στο 1ο τεταρτημόριο όπου η συνάρτηση συνx είναι γνησίως φθίνουσα.

Είναι $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{\pi}{15} < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{5} \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ)

x	0	π/2	π	3π/2	2π
f(x)	2	0	-2	0	2

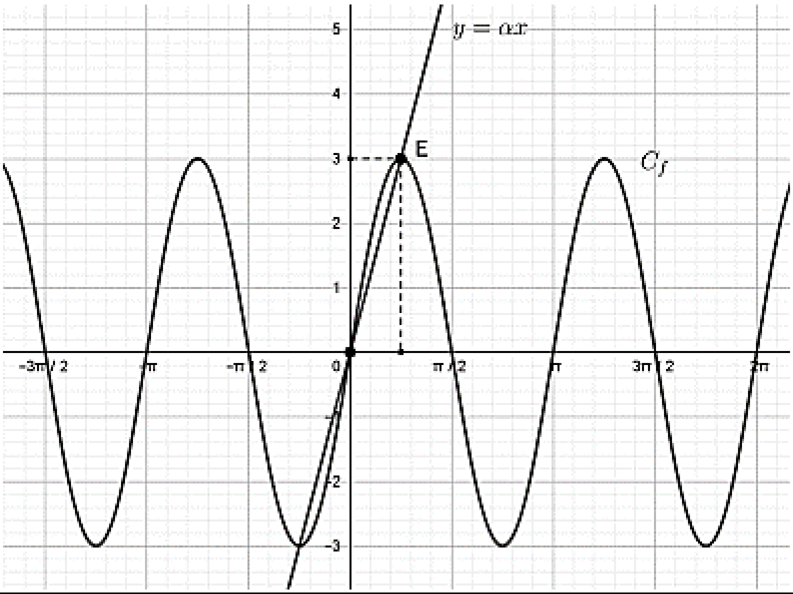


15287.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = αx,\ α \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ρημ(ωx)$, όπου ω > 0, ρ > 0 και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι ρ = 3 και ω = 2. **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α. **(Μονάδες 9)**

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3ημ(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$. **(Μονάδες 10)**



Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το -3, άρα ρ = 3.

Ακόμη παρατηρούμε ότι η f έχει περίοδο π, άρα $\frac{2\pi}{\omega}=\pi \Leftrightarrow 2=\omega$. Άρα $f(x)=3\eta\mu(2x)$

β) Η ευθεία y =αx διέρχεται από το σημείο Ε της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 3, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε διάστημα μιας περιόδου στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου, δηλαδή στο $\frac{\pi}{4}$, άρα $E\left(\frac{\pi}{4},3\right)$, οπότε $3=\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{12}{\pi}=\alpha$ και η ευθεία έχει εξίσωση $y=\frac{12}{\pi}x$.

γ) $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0\Leftrightarrow f(x)=\frac{12}{\pi}x$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$.Με βάση το σχήμα τα σημεία τομής είναι 3, οι τετμημένες των οποίων είναι:

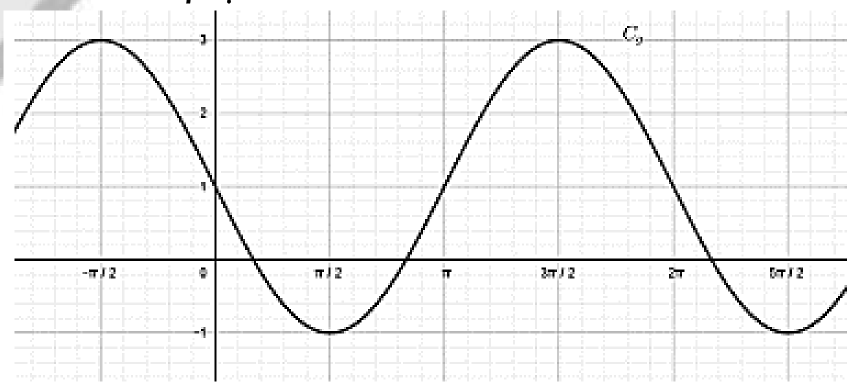
- $x=0$
- $x=\frac{\pi}{4}$ και
- $x=-\frac{\pi}{4}$ αφού $y=\frac{12}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-3$ και $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=3\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3(-1)=-3$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=-\frac{\pi}{4}$.

15288.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu 3x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f. (Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\alpha\eta\mu\beta x+\gamma$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \beta>0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, και γ.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha=-2,\ \beta=1$ και $\gamma=1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $[0,\pi)$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $T=\frac{2\pi}{3}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-1\le\eta\mu 3x\le 1\Leftrightarrow -2\le 2\eta\mu 3x\le 2\Leftrightarrow -1\le 2\eta\mu 3x+1\le 3\Leftrightarrow -1\le f(x)\le 3$, επομένως η f έχει ελάχιστο το -1 όταν $\eta\mu 3x=-1$ και μέγιστο το 3 όταν $\eta\mu 3x=1$.

β) i. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η g έχει περίοδο π, άρα $\frac{2\pi}{\beta}=2\pi \Leftrightarrow \beta=1$.

Επειδή η γραφική παράσταση της g διέρχεται από τα σημεία $(0,1)$ και $\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$ ισχύει ότι:

$g(0)=1 \Leftrightarrow \gamma=1$ και $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow \alpha\eta\mu\frac{\pi}{2}+1=-1 \Leftrightarrow \alpha=-2$.

ii. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2\eta\mu 3x+1=2\eta\mu x+1 \Leftrightarrow \eta\mu 3x=\eta\mu x \overset{x\in[0,\pi)}{\Leftrightarrow} (3x=x \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0)$ ή $\left(3x=\pi-x \Leftrightarrow 4x=\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\right)$.

15289.Δίνεται το σύστημα: (Σ): $\begin{cases}-x+2y=1\\ x+\lambda y=\lambda\end{cases}$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) i. Αν $\lambda=-1$,να λύσετε το σύστημα. (Μονάδες 2)

ii. Αν (x_0,y_0) είναι η λύση του συστήματος για $\lambda=-1$, να βρείτε γωνία $\theta\in(0,2\pi]$ τέτοια, ώστε $x_0=\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_0=\eta\mu\theta$. (Μονάδες 4)

β) Αν $\lambda=1$ και (x_1,y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $x_1=\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1=\eta\mu\omega$. (Μονάδες 7)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2,y_2) με $x_2=\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $y_2=\eta\mu\varphi$, $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

i. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{3}{5}$ και $\eta\mu\varphi=\frac{4}{5}$. (Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) i. Για $\lambda=-1$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases}-x+2y=1\\ x-y=-1\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \begin{cases}y=0\\ x-0=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=-1\end{cases}$, οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x_0,y_0)=(-1,0)$.

ii. Είναι $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\theta=-1\\ \eta\mu\theta=0\end{cases} \overset{\theta\in(0,2\pi]}{\Leftrightarrow} \theta=\pi$

β) Για $\lambda=1$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases}-x+2y=1\\ x+y=1\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \begin{cases}3y=2\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{2}{3}\\ x+\frac{2}{3}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{2}{3}\\ x=\frac{1}{3}\end{cases}$.

Αν υπήρχε γωνία ω με $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1}{3}$ και $\eta\mu\omega=\frac{2}{3}$, τότε

$\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{1}{9}+\frac{4}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{5}{9}=1$ αδύνατο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία ω.

γ) i. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_2,y_2), τότε

$-x_2+2y_2=1 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu\varphi+2\eta\mu\varphi=1 \Leftrightarrow 2\eta\mu\varphi-1=\sigma\upsilon\nu\varphi$ (1).

Είναι $\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\varphi+(2\eta\mu\varphi-1)^2=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\varphi+4\eta\mu^2\varphi-4\eta\mu\varphi+1-1=0 \Leftrightarrow$

$5ημ^2φ-4ημφ=0 \Leftrightarrow ημφ(5ημφ-4)=0 \Leftrightarrow ημφ=0$ απορρίπτεται αφού $φ\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ή $ημφ=\frac{4}{5}$ δεκτή.

Τότε από την (1) προκύπτει ότι $συνφ=2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}$.

ii. Όμως η λύση (x_2,y_2) επαληθεύει και την εξίσωση $x+λy=λ$, άρα

$x_2+λy_2=λ \Leftrightarrow συνφ+λημφ=λ \Leftrightarrow \frac{3}{5}+λ\cdot\frac{4}{5}=λ \Leftrightarrow 3+4λ=5λ \Leftrightarrow λ=3$.

15422.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ασυν\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2ημ(\pi+2x)$, $α>0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=(α+2)ημ2x$. (Μονάδες 5)
β) i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι α = 2. (Μονάδες 5)
ii. Να βρείτε την περίοδο της f. (Μονάδες 5)
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 5)
δ) Αν $g(x)=5-συν^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g, όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

Λύση

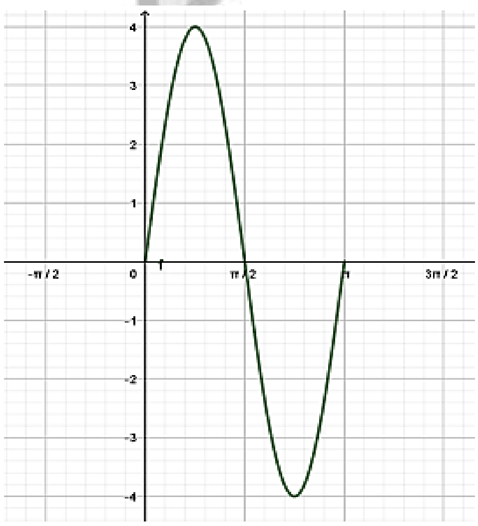
α) $f(x)=ασυν\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2ημ(\pi+2x)=$
$αημ2x-2(-ημ2x)=αημ2x+2ημ2x=(α+2)ημ2x$

β) i. Επειδή $α>0$ η f έχει μέγιστη τιμή το $α+2$, άρα $α+2=4 \Leftrightarrow α=2$.

ii. Η περίοδος της f είναι $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

γ)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$4ημ2x$	0	4	0	-4	0



δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 4ημ2x=5-συν^2 2x \Leftrightarrow 4ημ2x=5-(1-ημ^2 2x) \Leftrightarrow$

$4ημ2x=5-1+ημ^2 2x \Leftrightarrow ημ^2 2x-4ημ2x+4=0 \Leftrightarrow$

$(ημ2x-2)^2=0 \Leftrightarrow ημ2x-2=0 \Leftrightarrow ημ2x=2$ αδύνατη.

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

15347.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2συν^2(\pi-x)-3ημ\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+α$, $α\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=2συν^2x-3συνx+α$. (Μονάδες 8)
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3},1\right)$. (Μονάδες 5)

δ) Για α =2 και $g(x)=2ημ^2x+9συνx-9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) $f(x)=2συν^2(π-x)-3ημ\left(\frac{π}{2}+x\right)+α=2(-συνx)^2-3συνx+α \Leftrightarrow f(x)=2συν^2x-3συνx+α$

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(-x)=2συν^2(-x)-3συν(-x)+α=2συν^2x-3συνx+α=f(x)$, οπότε η f είναι άρτια.

γ) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{π}{3},1\right)$, ισχύει ότι:

$$f\left(\frac{π}{3}\right)=1 \Leftrightarrow 2συν^2\frac{π}{3}-3συν\frac{π}{3}+α=1 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+α=1 \Leftrightarrow \frac{2}{4}-\frac{3}{2}+α=1 \Leftrightarrow α=2$$

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2συν^2x-3συνx+2=2ημ^2x+9συνx-9 \Leftrightarrow$

$2συν^2x-3συνx+2-2(1-συν^2x)-9συνx+9=0 \Leftrightarrow$

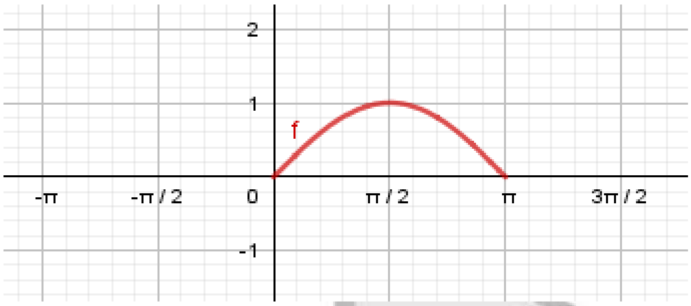
$2συν^2x-12συνx+11-2+2συν^2x=0 \Leftrightarrow 4συν^2x-12συνx+9=0 \Leftrightarrow (2συνx-3)^2=0 \Leftrightarrow$

$2συνx-3=0 \Leftrightarrow συνx=\frac{3}{2}$ αδύνατη.

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

ΘΕΜΑ 3ο

15789. **Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ημx$ με $x\in[0,\pi]$.**



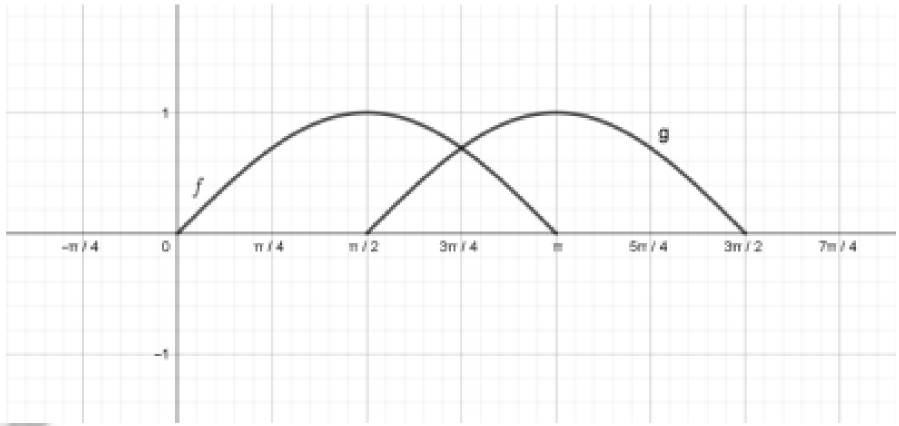
α) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την συνάρτηση $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. **(Μονάδες 8)**

ii. Ποιος είναι ο τύπος της g και σε ποιο διάστημα ορίζεται; **(Μονάδες 8)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά $\frac{\pi}{2}$ μονάδες προς τα δεξιά.



ii) Είναι $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=ημ\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=ημ\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-συνx$ με $0\le x-\frac{\pi}{2}\le\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$

β) 1ος τρόπος: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow ημx=ημ\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\cancel{x}=2κ\pi+\cancel{x}-\frac{\pi}{2}\\ x=2κ\pi+\pi-x+\frac{\pi}{2}\end{cases},\ κ\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{Αδύνατη}\\ x=κ\pi+\frac{3\pi}{4}\end{cases},\ κ\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=κ\pi+\frac{3\pi}{4},\ κ\in\mathbb{Z}\overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow}x=\frac{3\pi}{4}$

2ος τρόπος: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow ημx=-συνx\ \ (1)$

Έστω ότι $συνx=0$ τότε από την (1) είναι και $ημx=0$.

Επομένως $ημ^2x+συν^2x=1\Leftrightarrow 0=1$ άτοπο, άρα $συνx\neq 0$.

$(1)\Leftrightarrow\frac{ημx}{συνx}=-1\Leftrightarrow εφx=-1\Leftrightarrow εφx=-εφ\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow εφx=εφ\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow εφx=εφ\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow x=κ\pi+\frac{3\pi}{4},\ κ\in\mathbb{Z}\overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow}x=\frac{3\pi}{4}$

Πολυώνυμα
Θέμα 2ο

15113.Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9$ και $Q(x) = \alpha x^2 + 7,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Είναι το πολυώνυμο P(x) 3ου βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 = -\cancel{2x^3} + 4x^2 + \cancel{2x^3} - 2 + 9 = 4x^2 + 7$, οπότε το πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού και όχι 3ου.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \alpha = 4$.

Διαίρεση πολυωνύμων
Θέμα 2ο

14981.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x + 6$.

α) Να υπολογίσετε το $P(-2)$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 6 = -8 + 2 + 6 = 0$

β) Επειδή $P(-2) = 0$ το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

1	0	- 1	6	ρ= - 2
	- 2	4	- 6	
1	- 2	3	0	

γ) $P(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)$

15012.Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 3$ έχει πηλίκο $x^2 + 2$ και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$. (Μονάδες 8)

γ) Είναι το $x = 3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$;Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Από τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι $P(x) = (x - 3)(x^2 + 2) + 4$

β) $P(x) = (x - 3)(x^2 + 2) + 4 \Leftrightarrow P(x) = x^3 + 2x - 3x^2 - 6 + 4 = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$

γ) Για να είναι το x = 3 ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ πρέπει $P(3) = 0 \Leftrightarrow$
$3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow \cancel{27} - \cancel{27} + 6 - 2 = 0$ αδύνατο. Άρα το x = 3 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

15096.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-3x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το -1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x):(x^2+x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $P(1)=2\cdot1^3+1^2-3\cdot1+1=1\neq0$ και $P(-1)=2\cdot(-1)^3+(-1)^2-3\cdot(-1)+1=3\neq0$ άρα δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Είναι $P(x)=(x^2+x-1)(2x-1)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2-3x+1 & x^2+x-1 \\ \cline{2-2} -2x^3-2x^2+2x & 2x-1 \\ \hline -x^2-x+1 & \\ x^2+x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

15642.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2(x-1)^{20}-3(x-1)^{10}+5x^2-3x-2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$. (Μονάδες 10)

β) i. Να υπολογίσετε την τιμή P(0). (Μονάδες 5)

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $P(1)=2(1-1)^{20}-3(1-1)^{10}+5\cdot1^2-3\cdot1-2=5-3-2=0$ άρα το $x-1$είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) i. $P(0)=2(0-1)^{20}-3(0-1)^{10}+5\cdot0^2-3\cdot0-2=2-3-2=-3$

ii. Επειδή $P(0)\neq0$ το x δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

Πολυωνυμικές εξισώσεις - ανισώσεις

Θέμα 2ο

15040.Δίνεται η εξίσωση $x^3-7x+6=0$

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της. (Μονάδες 5)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-7x+6):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης. (Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3-7x+6=0$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Για να είναι το 1 ρίζα πρέπει $1^3-7\cdot1+6=0\Leftrightarrow1-7+6=0$ ισχύει.

β) Είναι $x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$

1	0	-7	6	ρ=1
	1	1	-6	
1	1	-6	0	

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι το x^2+x-6.

γ) $x^3-7x+6=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x-6)=0\Leftrightarrow(x-1=0\Leftrightarrow x=1)$ ή

$\left(x^2 + x - 6 = 0,\ \Delta = 25,\ x = \frac{-1+5}{2} = 2 \text{ ή } x = \frac{-1-5}{2} = -3 \right)$

15047.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. **(Μονάδες 10)**

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^4 - 1^3 - 5\cdot 1^2 + 7\cdot 1 - 2 = 1 - 1 - 5 + 7 - 2 = 0$, άρα το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι $\pm 1, \pm 2$.

Είναι $P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 - 5\cdot(-1)^2 + 7\cdot(-1) - 2 = -12 \neq 0$,

$P(2) = 2^4 - 2^3 - 5\cdot 2^2 + 7\cdot 2 - 2 = 0$, άρα και το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

15175.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. **(Μονάδες 5)**

β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = (x-1)(x^2+1)$. **(Μονάδες 10)**

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$ άρα το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) 1ος τρόπος: Εφαρμόζουμε σχήμα Horner με $\rho = 1$:

1	−1	1	−1	ρ =1
	1	0	1	
1	0	1	0	

Προκύπτει ότι $P(x) = (x-1)(x^2+1)$

2ος τρόπος: $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^2+1)$

15176.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου. **(Μονάδες 12)**

β) Αν $P(x) = (x-1)(x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του είναι $P(x) > 0$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 2 = 1 - 2 + 3 - 2 = 0$ άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου, οπότε το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - x + 2$ έχει $\Delta = -7 < 0$, άρα $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$P(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 2) > 0 \overset{x^2-x+2>0}{\Leftrightarrow} x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

15246.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$. **(Μονάδες 10)**

β) Αν $P(x)=(x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $P(x)=x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^2-1)=(x+1)(x+1)(x-1)=(x+1)^2(x-1)$

β) $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[1,+\infty)\cup\{-1\}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	0	+		+
$x-1$	−		−	0	+
$P(x)$	−	0	−	0	+

15247.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$. **(Μονάδες 10)**

β) Αν $P(x)=(2x-1)(x^2+1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $P(x)=2x^3-x^2+2x-1=x^2(2x-1)+(2x-1)=(2x-1)(x^2+1)$

β) $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2+1)\geq 0 \overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} 2x-1\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}$

15248. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x-1$ δίνει πηλίκο x^2-2 και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$. **(Μονάδες 12)**

β) Αν $P(x)=2x^3-x^2-4x+3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$. **(Μονάδες 7)**

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Από τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι $P(x)=(2x-1)(x^2-2)+1\Leftrightarrow$

$P(x)=2x^3-4x-x^2+2+1=2x^3-x^2-4x+3$

β) i. Είναι $P(1)=2\cdot 1^3-1^2-4\cdot 1+3=0$, οπότε το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. Με βάση το διπλανό σχήμα Horner είναι $P(x)=(x-1)(2x^2+x-3)$

2	-1	-4	3	ρ=1
	2	1	-3	
2	1	-3	0	

ii. $P(x)=0\Leftrightarrow (x-1)(2x^2+x-3)=0\Leftrightarrow (x-1=0\Leftrightarrow x=1)$ ή

$\left(2x^2+x-3=0,\ \Delta=1+24=25,\ x_1=\frac{-1+5}{4}=1,\ x_2=\frac{-1-5}{4}=-\frac{3}{2}\right)$

15618.α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου. **(Μονάδες 10)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $P(x)=2x^3+x^2-x=x(2x^2+x-1)$

β) $P(x)=0 \Leftrightarrow x(2x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή

$\left(2x^2+x-1=0,\ \Delta=1+8=9,\ x_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{-1-3}{4}=-1\right)$

15653.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+2x+2$.

α) i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$. **(Μονάδες 8)**

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+1)$. **(Μονάδες 5)**

β) Αν $P(x)=(x-1)(x^2+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) i. ii. $P(x)=(x+1)(x^2+2)$

1	1	2	2	ρ= - 1
	- 1	0	- 2	
1	0	2	0	

β) $P(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2)<0 \overset{x^2+2>0}{\Leftrightarrow} x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$

15654.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-7x+6$.

α) Να δείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$. **(Μονάδες 12)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Είναι $P(2)=2^3-7\cdot2+6=8-14+6=0$ άρα το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή

$\left(x^2+x-6=0,\ \Delta=25,\ x=\frac{-1+5}{2}=2 \text{ ή } x=\frac{-1-5}{2}=-3\right)$

1	0	- 7	6	ρ=1
	1	1	- 6	
1	1	- 6	0	

15674.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-x^2-x+2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. **(Μονάδες 10)**

β) Αν $P(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<3$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x)=3x^2+2x+1$ και το υπόλοιπο είναι 3, άρα

3	-1	- 1	2	ρ=1
	3	2	1	
3	2	1	3	

$P(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$

β) $P(x)<3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+2x+1)+3<3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+2x+1)<0 \;\; (1)$

Το τριώνυμο $3x^2+2x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -8<0$, άρα $3x^2+2x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$.

15695.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)+6=0$. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Με βάση το σχήμα Horner είναι

1	0	2	-3	ρ= -1
	- 1	1	-3	
1	-1	3	-6	

$P(x)=x^3+2x-3=(x+1)(x^2+x+3)-6$

β) $P(x)+6=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+x+3)-6+6=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+x+3)=0 \Leftrightarrow$

$(x+1=0 \Leftrightarrow x=-1)$ ή $(x^2+x+3=0,\ \Delta<0$ αδύνατη$)$

17241.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x+2$.

α) Ι. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$. (Μονάδες 7)

ΙΙ. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x+1)$. (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(x+1)(x^2-x+2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Ι. Επειδή $P(-1)=(-1)^3-1+2=-1-1+2=0$ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

ΙΙ. Με βάση το διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x)=x^2-x+2$ και το υπόλοιπο είναι 0, άρα

1	0	1	2	ρ= -1
	- 1	1	- 2	
1	- 1	2	0	

$P(x)=(x+1)(x^2-x+2)$

β) Το τριώνυμο x^2-x+2 έχει διακρίνουσα Δ= - 7 < 0, άρα $x^2-x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε:

$P(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+2)<0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.

18230.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-8x-4$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει παράγοντα το $(x-2)$. (Μονάδες 9)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 7)

Λύση

Θέμα 4ο

14955.Η μέση θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x)=x^3-10x^2+31x-30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν ^{o}C.
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με α < β < γ ώστε να ισχύει $T(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.
(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία Τ είναι συνεχώς κάτω από μηδέν ^{o}C .Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη; **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Για x = 2 εκατομμύρια χρόνια, είναι $T(2)=2^3-10\cdot 2^2+31\cdot 2-30=8-40+62-30=0$ ^{o}C.

1	-10	31	-30	ρ=2
	2	-16	30	
1	-8	15	0	

β) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner, είναι
$T(x)=(x-2)(x^2-8x+15)$

Το τριώνυμο $x^2-8x+15$ έχει διακρίνουσα Δ= 4 και ρίζες $x_1=3,\ x_2=5$, οπότε
$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$, άρα $T(x)=(x-2)(x-3)(x-5)$, οπότε α = 2, β = 3, γ = 5.

γ) Θέλουμε να βρούμε τα διαστήματα για τις τιμές x των οποίων θα είναι $T(x)<0$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου των τιμών Τ(x) για θετικές τιμές του x.
Διαπιστώνουμε ότι παγετώνες θα υπάρχουν στον πλανήτη τα δύο πρώτα εκατομμύρια χρόνια και την χρονική περίοδο από τρία έως πέντε εκατομμύρια χρόνια.

x	0 2	3	5	+∞
$x-2$	−	+	+	+
$x^2-8x+15$	+	+	−	+
$T(x)$	−	+	−	+

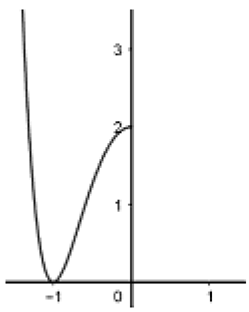
15005.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^6-3x^2+2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια. **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x′x.
(Μονάδες 10)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x\le 0$.
Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για x > 0.
(Μονάδες 4)

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.
(Μονάδες 6)



Λύση

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(-x)=(-x)^6-3(-x)^2+2=x^6-3x^2+2=f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

β) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^6-3x^2+2=0$ (1)

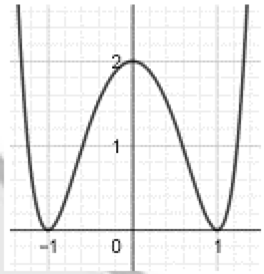
Θέτουμε $x^2=\omega\ge 0$ και η (1) γίνεται $\omega^3-3\omega+2=0$.
Παρατηρούμε ότι $1^3-3\cdot 1+2=0$, οπότε με βάση το σχήμα Horner

1	0	- 3	2	ρ= 1
	1	1	-2	
1	1	- 2	0	

η εξίσωση γίνεται $(\omega-1)\left(\omega^2+\omega-2\right)=0 \Leftrightarrow \omega=1$ ή $\omega^2+\omega-2=0$

Το τριώνυμο $\omega^2+\omega-2$ έχει ρίζες $\omega=1$ ή $\omega=-2$ που απορρίπτεται.

Άρα $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.
Επομένως η C_f τέμνει τον x΄x στα σημεία (1,0) και (- 1, 0).



γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y′y, οπότε έχει την διπλανή μορφή.

δ)Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[1,+\infty)$.

15037.Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x+3}$ και $g(x)=3x-1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g.

(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = g(x).

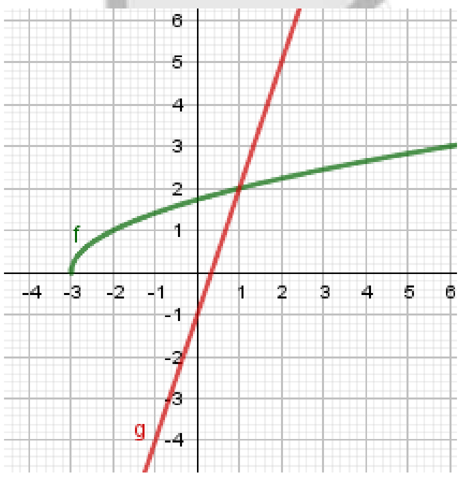
(Μονάδες 6)

γ) i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση f(x) < g(x).

(Μονάδες 7)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.

(Μονάδες 8)



Λύση

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$, άρα $A_f=[-3,+\infty)$.
Σύμφωνα με το σχήμα η f είναι γνησίως αύξουσα.
Η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του x και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g και επειδή κοινό τους σημείο είναι το (1,2), έχουμε: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=1$.

γ) i. Η ανίσωση f(x) < g(x) λύνεται γραφικά με το να βρούμε τις τετμημένες, δηλαδή τα x, όπου η C_f είναι κάτω από Cg . Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x\in(1,+\infty)$.

ii. $f(x)<g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3}<3x-1$ (1)

Αν $3x-1<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$, άρα $x\in\left[-3,\frac{1}{3}\right)$ η (1) είναι αδύνατη.

Αν $3x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{1}{3}$ η (1) γίνεται $\left(\sqrt{x+3}\right)^2<(3x-1)^2 \Leftrightarrow x+3<9x^2-6x+1 \Leftrightarrow 9x^2-7x-2>0 \Leftrightarrow$

$x\in\left(-\infty,-\frac{2}{9}\right)\cup(1,+\infty)$. Σύμφωνα με τους περιορισμούς η ανίσωση αληθεύει για $x\in(1,+\infty)$.

15066.Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-5x^3+4x^2-5x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0. (Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση P(x) < 0. (Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Είναι $P(0)=2\neq 0$ οπότε το 0 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

ii. Ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου, αν και μόνο αν $P(\rho)=0 \Leftrightarrow 2\rho^4-5\rho^3+4\rho^2-5\rho+2=0$ (1)

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου, αν και μόνο αν

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right)=0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\rho}\right)^4-5\left(\frac{1}{\rho}\right)^3+4\left(\frac{1}{\rho}\right)^2-5\frac{1}{\rho}+2=0 \Leftrightarrow 2\frac{1}{\rho^4}-5\frac{1}{\rho^3}+4\frac{1}{\rho^2}-\frac{5}{\rho}+2=0 \Leftrightarrow$$

$$2\cancel{\rho^4}\frac{1}{\cancel{\rho^4}}-5\rho^{\cancel{4}}\frac{1}{\cancel{\rho^3}}+4\rho^{\cancel{4}^2}\frac{1}{\cancel{\rho^2}}-\rho^{\cancel{4}^3}\frac{5}{\cancel{\rho}}+2\rho^4=0 \Leftrightarrow 2-5\rho+4\rho^2-5\rho^3+2\rho^4=0$$ που ισχύει λόγω της (1).

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι $\pm 1, \pm 2$. Επειδή θέλουμε θετική ρίζα, πιθανές είναι το 1 και το 2. Είναι $P(2)=2\cdot 16-5\cdot 8+4\cdot 4-5\cdot 2+2=16-40+16-10+2=0$ οπότε ο αριθμός 2 είναι θετική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου.

2	- 5	4	- 5	2	ρ= 2
	4	- 2	4	- 2	
2	- 1	2	- 1	0	

γ) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner, είναι

$P(x)=(x-2)(2x^3-x^2+2x-1) \Leftrightarrow$

$P(x)=(x-2)\left[x^2(2x-1)+(2x-1)\right]=(x-2)(2x-1)(x^2+1)$

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow$

$(x-2=0 \Leftrightarrow x=2)$ ή $\left(2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\right)$ ή

$(x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$ αδύνατη$)$

x	$-\infty$	1/2	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$	
$2x-1$	$-$ 0	$+$	$+$	
x^2+1	$+$	$+$	$+$	
$P(x)$	$+$ 0	$-$ 0	$+$	

δ) Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι

$P(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$

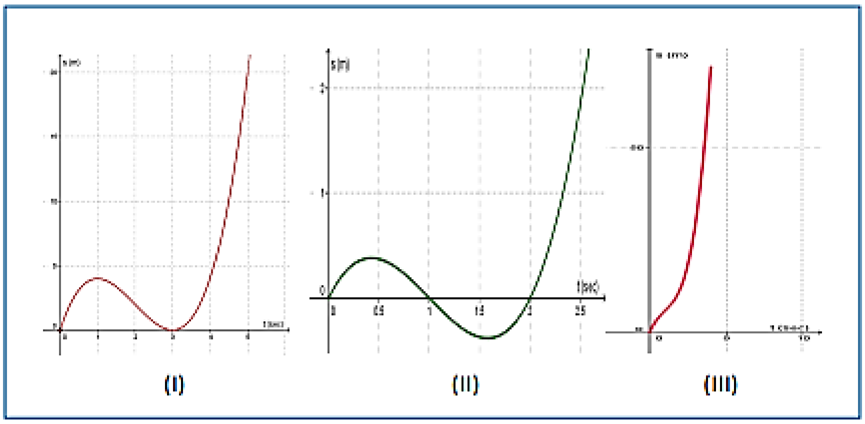
15094.Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t)=2t^3-6t^2+10t$.

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές t = 0 και t = 2. (Μονάδες 03)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων. (Μονάδες 10)

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό. (Μονάδες 08)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 04)



Λύση

α) $S(0)=0,\ S(t)=2\cdot 2^3-6\cdot 2^2+10\cdot 2=16-24+20=12$ μέτρα

β) $S(t)=30 \Leftrightarrow 2t^3-6t^2+10t=30 \Leftrightarrow t^3-3t^2+5t-15=0 \Leftrightarrow$
$(t-3)(t^2+5)=0 \Leftrightarrow t=3$ ή $t^2=-5$ αδύνατο

1	- 3	5	- 15	ρ= 3
	3	0	15	
1	0	5	0	

γ) Είναι $S(t)=2t^3-6t^2+10t=2t(t^2-3t+5)$

Το τριώνυμο t^2-3t+5 έχει Δ = - 11 < 0, οπότε για κάθε $t\ge 0$ είναι $t^2-3t+5>0$, οπότε και $S(t)\ge 0$.

δ) Με βάση το φυσικό πλαίσιο του προβλήματος, η συνάρτηση $S(t)$ πρέπει να είναι μη αρνητική και σε κανένα χρονικό διάστημα γνήσια φθίνουσα. Επομένως, είναι:
Η (Ι) είναι μεν μη αρνητική, αλλά δε διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας.
Η (ΙΙ) παίρνει και αρνητικές τιμές.
Η (ΙΙΙ) είναι μη αρνητική και γνησίως αύξουσα παντού, ως εκ τούτου αποτελεί την ενδεδειγμένη απάντηση.

15174.Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^4+x^3+\alpha x-4$ και $\delta(x)=x^2-3x+2$.
Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $\upsilon(x)=24x-24$.
α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 8)
β) Για α = 2,
i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$. (Μονάδες 2)
ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x΄x με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. (Μονάδες 8)
iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:
$P(x)=\delta(x)(x^2+4x+10)+(\alpha+22)x-24$
Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει
$(\alpha+22)x-24=24x-24 \Leftrightarrow \alpha+22=24 \Leftrightarrow \alpha=2$

$$
\begin{array}{ll|l}
x^4+x^3 & +\alpha x-4 & x^2-3x+2 \\
-x^4+3x^3-2x^2 & & \hline x^2+4x+10 \\
\hline 4x^3-2x^2 & +\alpha x-4 & \\
-4x^3+12x^2 & -8x & \\
\hline 10x^2 & +(\alpha-8)x-4 & \\
-10x^2 & +30x-20 & \\
\hline & (\alpha+22)x-24 &
\end{array}
$$

β) Για $\alpha=2$ είναι $P(x)=x^4+x^3+2x-4$.
i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$

είναι το $P(1)=1^4+1^3+2\cdot1-4=0$

1	1	0	2	−4	ρ =1
	1	2	2	4	
1	2	2	4	0	

ii. $P(x)=0 \Leftrightarrow x^4+x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3+2x^2+2x+4)=0 \Leftrightarrow$

$x=1$ ή

$x^3+2x^2+2x+4=0 \Leftrightarrow x^2(x+2)+2(x+2)=0 \Leftrightarrow$

$(x+2)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x^2+2=0$ αδύνατη.

Επομένως, τα σημεία τομής του άξονα x΄x με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι τα (- 2,0) και (1,0).

iii. $P(x)<0 \Leftrightarrow -2<x<1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		−		−	0	+	
$x+2$		−	0	+		+	
x^2+2		+		+		+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	

15250.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta$ το οποίο διαιρούμενο με το x^2-4 δίνει υπόλοιπο $4x+1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-4)$. **(Μονάδες 7)**

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β . **(Μονάδες 7)**

γ) Έστω $\alpha=4$ και $\beta=5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$ είναι το $\pi(x)=x^3-1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2-4)$. **(Μονάδες 4)**

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x)<4x+1$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α)

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-4 \\ \cline{3-3}
+ & -x^5+4x^3 & x^3-1 \\ \cline{2-2}
+ & -x^2+\alpha x+\beta & \\
 & x^2 \qquad\quad -4 & \\ \cline{2-2}
 & \alpha x+\beta-4 &
\end{array}
$$

β) Πρέπει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να είναι $\alpha x+\beta-4=4x+1$ και αυτό ισχύει όταν α=4 και $\beta-4=1 \Leftrightarrow \beta=5$.

γ) i. $P(x)=(x^2-4)(x^3-1)+4x+1$

ii. $P(x)<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^3-1)+4x+1<4x+1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x-1)(x^2+x+1)<0 \quad (1)$

το τριώνυμο x^2+x+1 έχει $\Delta<0$ οπότε $x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οι λύσεις της (1) είναι $x\in(-\infty,-2)\cup(1,2)$

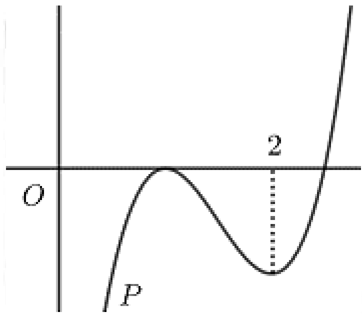
x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	−		−	0	+	
$x-1$		−		−	0	+		+	
x^2+x+1		+		+		+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

15431.α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x-5$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x-2)$ είναι – 1, να δείξετε ότι: $\begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\ \text{και}\\ \alpha+\beta=3\end{cases}$. (Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι α = −9 και β = 12. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ είναι κάτω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 10)



γ) Αν η γραφική παράσταση της P(x) είναι η διπλανή, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της. (Μονάδες 4)

Λύση

α) i. Επειδή το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$, ισχύει ότι $P(1)=0\Leftrightarrow 2+\alpha+\beta-5=0\Leftrightarrow \alpha+\beta=3$

Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου με το $(x-2)$ είναι – 1, ισχύει ότι

$P(2)=-1\Leftrightarrow 16+4\alpha+2\beta-5=-1\Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=-12\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-6$. Άρα $\begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\ \alpha+\beta=3\end{cases}$.

ii. $\begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\ \alpha+\beta=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\ \beta=3-\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+3-\alpha=-6\\ \beta=3-\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-9\\ \beta=3-\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-9\\ \beta=3-(-9)=12\end{cases}$

β) Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι

$P(x)=2x^3-9x^2+12x-5=(x-1)(2x^2-7x+5)$

2	- 9	12	-5	ρ= 1
	2	- 7	5	
2	- 7	5	0	

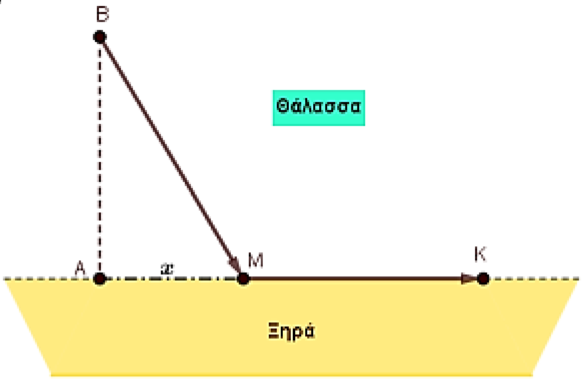
Το τριώνυμο $2x^2-7x+5$ έχει διακρίνουσα Δ = 9 και ρίζες $x=1$ ή $x=\frac{5}{2}$.

x	$-\infty$	1		5/2	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$2x^2-7x+5$	$+$	0	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ είναι κάτω από τον άξονα x΄x όταν $P(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup\left(1,\frac{5}{2}\right)$.

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της P τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία $(1,0)$ και $\left(\frac{5}{2},0\right)$, οπότε βλέπουμε ότι η P είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[2,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,2]$.

15436.Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο Β σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο Κ της ακτής, το οποίο απέχει 4km από το Α. Η διαδρομή που κάνει είναι η ΒΜ κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3km/h και η ΜΚ τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5km/h. Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος που διανύεται, της ταχύτητας και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης , είναι $\upsilon=\frac{s}{t}\Leftrightarrow t=\frac{s}{\upsilon}$.



Αν το σημείο Μ απέχει από το Α απόσταση x km, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM=\sqrt{4+x^2}$. **(Μονάδες 5)**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x)=\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}+\frac{4-x}{5},\ x\in[0,4].$$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες. **(Μονάδες 10)**

Λύση

Είναι $AM=x$, $AB=2$ και $MK=AK-AM=4-x$.

Πρέπει $\begin{cases}AM\ge 0\\ MK\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 4-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\le 4\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0,4]$.

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΑΜ προκύπτει:

$$BM^2=AB^2+AM^2\Leftrightarrow BM^2=4+x^2\overset{BM\ge 0}{\Leftrightarrow} BM=\sqrt{4+x^2}$$

β) Ο χρόνος κίνησης από το Β στο Μ είναι $t_1=\frac{BM}{u_k}=\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}$ και ο χρόνος κίνησης από το Μ στο Κ είναι $t_2=\frac{MK}{u_\tau}=\frac{4-x}{5}$. Άρα είναι $t(x)=t_1+t_2=\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}+\frac{4-x}{5}$, $x\in[0,4]$.

γ) Είναι $t(x)=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}+\frac{4-x}{5}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 5\sqrt{4+x^2}+3(4-x)=20\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{4+x^2}+12-3x=20\Leftrightarrow 5\sqrt{4+x^2}=3x+8\ (1)$

Αφού $x\in[0,4]$ τότε $3x+8>0$ άρα $(1)\Leftrightarrow 25(4+x^2)=(3x+8)^2\Leftrightarrow 100+25x^2=9x^2+48x+64\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16x^2-48x+36=0\Leftrightarrow(4x-6)^2=0\Leftrightarrow 4x-6=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}=1{,}5$ δεκτή.

Άρα το σημείο Μ θα απέχει 1,5 Km από το σημείο Α.

15677. **Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.**

α) Να βρείτε τίσι τιμές των α, β, αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$. **(Μονάδες 8)**

β) Για $\alpha=4,\ \beta=-2$

i. Να κάνετε τη διαίρεσης $P(x):(x^2+5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $P(x)=(x^2+5)(x^2-2x-6)+14x+28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=14(x+2)$.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Αφού το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)$, θα πρέπει το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεση να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, που συμβαίνει μόνο όταν

$$\begin{cases}\alpha-4=0\\ \beta+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=-2\end{cases}.$$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^4-2x^3 & -x^2 & +\alpha x & +\beta & x^2-2x+1 \\ \cline{5-5} -x^4+2x^3 & -x^2 & & & x^2-2 \\ \cline{1-2} & -2x^2 & +\alpha x & +\beta & \\ & 2x^2 & -4x & +2 & \\ \cline{2-4} & & (\alpha-4)x & +\beta+2 & \end{array}$$

β) i. Είναι $P(x)=x^4-2x^3-x^2+4x-2$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -2x^3 & -x^2 & +4x & -2 & x^2+5 \\ \cline{6-6} -x^4 & & -5x^2 & & & x^2-2x-6 \\ \cline{1-3} & -2x^3 & -6x^2 & +4x & -2 & \\ & 2x^3 & & +10x & & \\ \cline{2-5} & & -6x^2 & +14x & -2 & \\ & & 6x^2 & & +30 & \\ \cline{3-5} & & & 14x & +28 & \end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$P(x)=(x^2+5)(x^2-2x-6)+14x+28$

ii. $P(x)=14(x+2)\Leftrightarrow$

$(x^2+5)(x^2-2x-6)+14x+28=14x+28\Leftrightarrow$

$(x^2+5)(x^2-2x-6)=0\Leftrightarrow$

$(x^2+5=0\Leftrightarrow x^2=-5$ αδύνατη$)$ ή $(x^2-2x-6=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{7})$

15960. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\kappa x-1,\ \kappa\in\mathbb{R}$.**

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ για την οποία $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 6)**

β) Για $\kappa=0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$. **(Μονάδες 6)**

ii. να δείξετε ότι $f(x)\geq-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 6)**

iii. να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)=f(x)\Leftrightarrow(-x)^4+\kappa(-x)-1=x^4+\kappa x-1\Leftrightarrow$

$x^4-\kappa x-1=x^4+\kappa x-1\Leftrightarrow-\kappa=\kappa\Leftrightarrow2\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=0$

β) Για $\kappa=0$ είναι $f(x)=x^4-1$.

i. Για κάθε $x_1<x_2\leq0$ είναι $x_1^4>x_2^4\Leftrightarrow x_1^4-1>x_2^4-1\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow(-\infty,0]$.

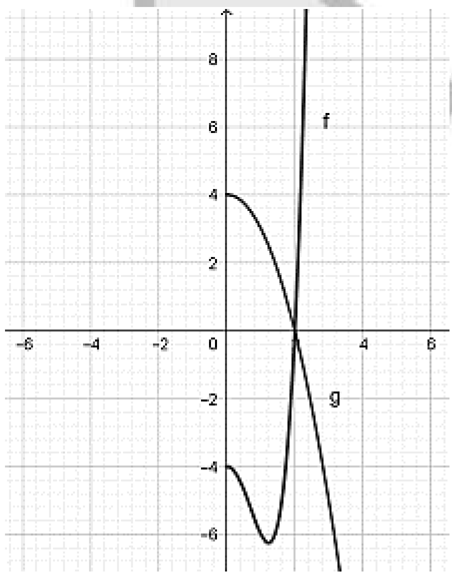
ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^4 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow f(x) \geq -1 = f(0)$.

iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τον άξονα x΄x όταν $f(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^4 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

15790.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παρατάσεων των συναρτήσεων f και g .
Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 6)



γ) Να λύσετε , αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
(Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x) < g(x)$.
(Μονάδες 6)

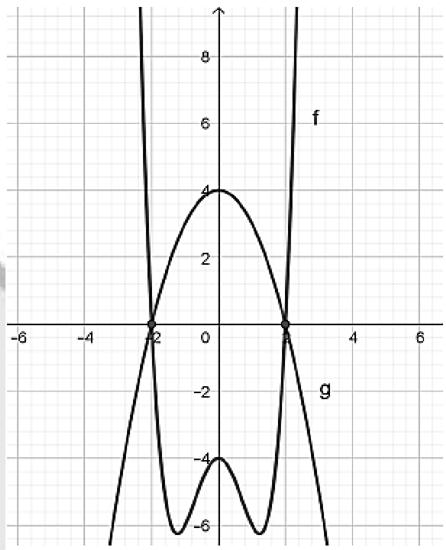
Λύση

α) Οι συναρτήσεις f,g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και είναι :

$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x)$ και

$g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x)$

β) Οι συναρτήσεις f,g είναι άρτιες άρα οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y.



γ) i) Γραφικά παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται στα σημεία με τετμημένες -2 και 2 άρα
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Αλγεβρικά έχουμε
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \;\; (1)$

Θέτουμε $x^2 = y \geq 0$ και είναι $(1) \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0$

με διακρίνουσα $\Delta = 36$ και ρίζες $y_1 = -2$, η οποία απορρίπτεται και $y_2 = 4$ δεκτή.

Άρα $y = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

ii) Γραφικά παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της g στο διάστημα $(-2, 2)$. Άρα $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$.

Αλγεβρικά ομοίως θέτουμε όπως στο προηγούμενο ερώτημα $x^2 = y \ge 0$ και είναι

$$y^2 - 2y - 8 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (-2,4) \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le y < 4 \Leftrightarrow 0 \le x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

17943.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 60m^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $x^3 + x^2 - 3600 = 0$. (Μονάδες 10)

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές με μήκη x και y αντίστοιχα και υποτείνουσα με μήκος $x+2$. Επίσης έχει εμβαδόν $E = 60 \Leftrightarrow \frac{xy}{2} = 60 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} y = \frac{120}{x}$

Πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{120}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι $(x+2)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} + 4x + 4 = \cancel{x^2} + \frac{14400}{x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^3 + 4x^2 - 14400 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 3600 = 0$

β) Οι πιθανές ακέραιες και θετικές (x>0) ρίζες της εξίσωσης $x^3 + x^2 - 3600 = 0$, οι οποίες είναι μικρότερες του 16 είναι οι αριθμοί 1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15.

Δοκιμάζοντας τις τιμές 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12 παρατηρούμε ότι δεν είναι ρίζες.

Βάζοντας το 15 είναι $15^3 + 15^2 - 3600 = 15^2(15+1) - 3600 = 225 \cdot 16 - 3600 = 0$

Άρα η μία κάθετη έχει μήκος 15 cm , η δεύτερη μήκος 8 cm και η υποτείνουσα μήκος 17 cm

γ) Εκτελούμε την διαίρεση $(x^3 + x^2 - 3600):(x - 15)$:

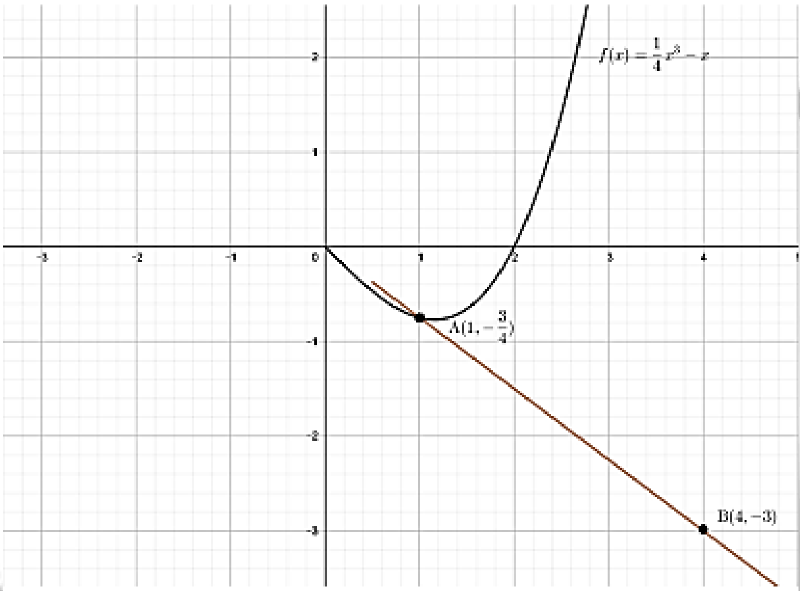
$$\begin{array}{rr|l} & x^3 + x^2 + 0x - 3600 & x - 15 \\ \cline{3-3} (+) & -x^3 + 15x^2 & x^2 + 16x + 240 \\ \cline{2-2} & 16x^2 + 0x - 3600 & \\ (+) & -16x^2 + 240x & \\ \cline{2-2} & 240x - 3600 & \\ (+) & -240x + 3600 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Είναι $x^3 + x^2 - 3600 = 0 \Leftrightarrow (x-15)(x^2 + 16x + 240) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 15$ ή $x^2 + 16x + 240 = 0$ αδύνατη γιατί έχει διακρίνουσα $\Delta = 256 - 240 = -704 < 0$

Άρα υπάρχει μόνο ένα τέτοιο ορθογώνιο τρίγωνο.

17919.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x,\ x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $B(4,-3)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ. **(Μονάδες 6)**

β) i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 5)**

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$. **(Μονάδες 6)**

γ) Αν η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Η ευθεία ΑΒ είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$ με $\alpha\neq 0$ και $\beta\in\mathbb{R}$. Διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $B(4,-3)$ άρα προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases}-\frac{3}{4}=\alpha+\beta\\ -3=4\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3=4\alpha+4\beta\\ -3=4\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow$$

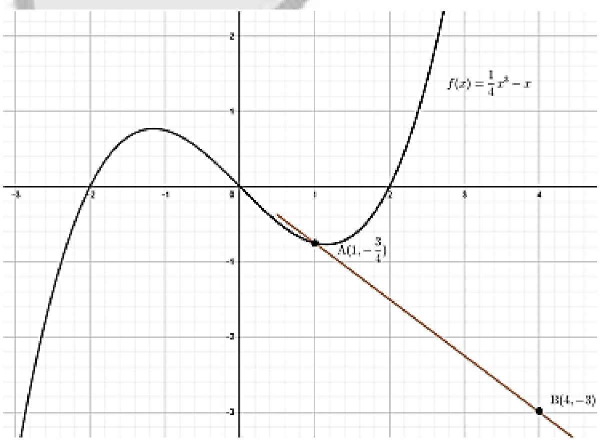
$$\begin{cases}-3-4\alpha=4\beta\\ -3-4\alpha=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=4\beta\\ -3-4\alpha=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0\\ \alpha=-\frac{3}{4}\end{cases}$$

Άρα η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$.

β) i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$ και

$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{4}x^3+x=-f(x)$$

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα η f είναι περιττή άρα η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

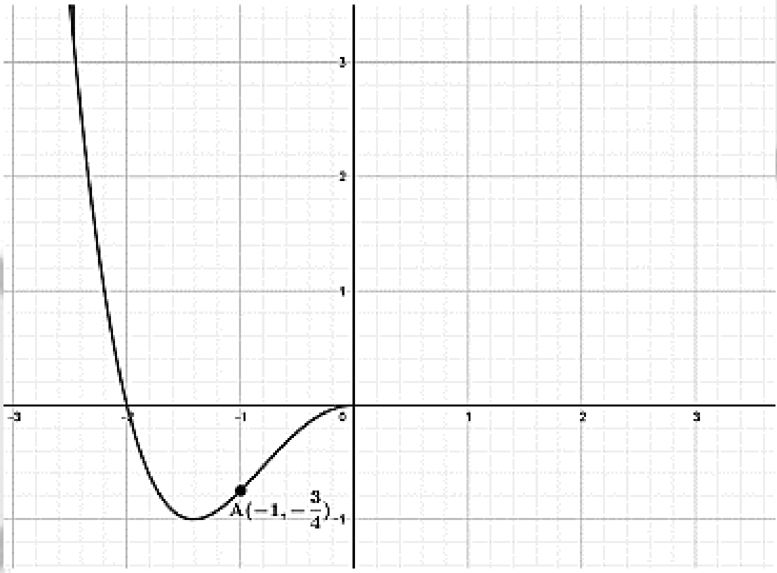


γ) 1ος τρόπος: Είναι $f(0)=0$ και

$f(-1)=-f(1)=\frac{3}{4}$ και λόγω συμμετρίας της f ως προς την αρχή των αξόνων και αφού αυτά είναι σημεία και της ευθείας τότε τα κοινά σημεία της ευθείας με την συνάρτηση f είναι τα $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $O(0,0)$, $K\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.

2ος τρόπος: $f(x)=-\frac{3}{4}x \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3-x=-\frac{3}{4}x \Leftrightarrow x^3-4x=-3x \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow$
$x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $(x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1)$

17925.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\alpha x^2,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}$ και το σημείο $A\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$ αυτής.



α) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$. **(Μονάδες 6)**
β) Για $\alpha=-1$, i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 5)**
ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$. **(Μονάδες 6)**
γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3})=-\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f.
(Μονάδες 8)

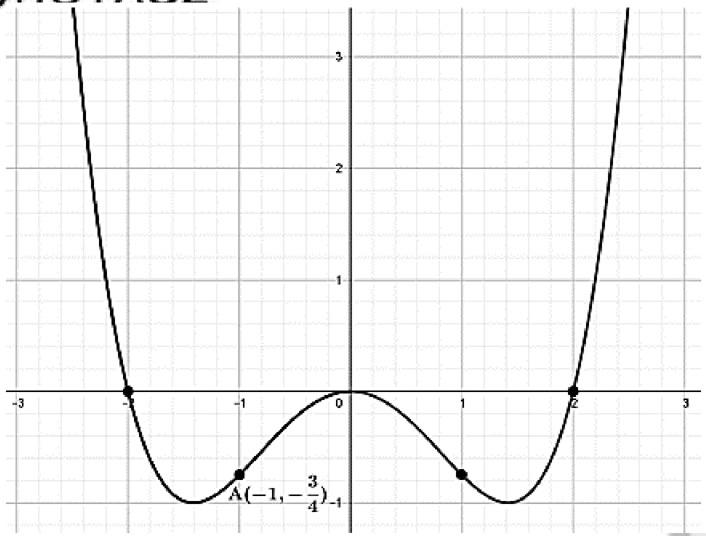
Λύση

α) Από το σχήμα είναι $f(-2)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-2)^4+\alpha(-2)^2=0 \Leftrightarrow \frac{16}{4}+4\alpha=0 \Leftrightarrow 4\alpha=-4 \Leftrightarrow \alpha=-1$

β) i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^4-(-x)^2=\frac{1}{4}x^4-x^2=f(x)$

ii) Η f είναι άρτια σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα άρα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y.

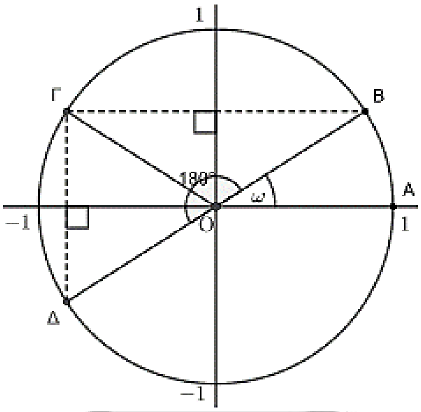


β) $f\left(-\sqrt{3}\right)=f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{3}^4-\sqrt{3}^2=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$

Θέμα 4ο

15187.Για τη γωνία ω του διπλανού σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$



α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του συνω, (Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ, (Μονάδες 6)

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών

ΑΟΒ, ΑΟΓ και ΑΟΔ.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Θέτουμε ημω = x και η εξίσωση γράφεται: $5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι ±1, ±2, ±3, ±6.

Με δοκιμή διαπιστώνουμε ότι ο −1 είναι ρίζα.

5	- 8	- 7	6	ρ= - 1
	-5	13	-6	
5	- 13	6	0	

$5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(5x^2 - 13x + 6) = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή $\left(5x^2 - 13x + 6 = 0,\ \Delta = 49,\ x_1 = 2,\ x_2 = \frac{3}{5}\right)$

Επειδή $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, είναι 0 < ημω < 1, άρα $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

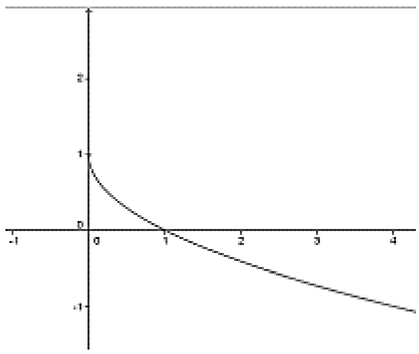
β) i. Ισχύει ότι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \overset{\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$

ii. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο γνωρίζουμε ότι το σημείο Β έχει συντεταγμένες (συνω, ημω), άρα $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.Τα σημεία Γ και Δ είναι συμμετρικά του Β ως προς τον άξονα y'y και την αρχή Ο αντίστοιχα.

Οπότε είναι: $\Gamma\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\Delta\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

iii. Το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών ΑΟΒ, ΑΟΓ και ΑΟΔ είναι οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων Β, Γ και Δ αντίστοιχα. Άρα, $\eta\mu AOB = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu AOB = \frac{4}{5}$, $\eta\mu A O\Gamma = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu A O\Gamma = -\frac{4}{5}$ και

$\eta\mu A O\Delta = -\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu A O\Delta = -\frac{4}{5}$



15270.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της. **(Μονάδες 6)**

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$ και $0<\alpha<\frac{1}{4}<\beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P=(2f(\alpha)-1)(2f(\beta)-1)$. **(Μονάδες 10)**

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x)=1-\sqrt{x},\ x\ge 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y=2x$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Από το σχήμα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 και επιτυγχάνεται όταν x = 0.

β) Είναι $\alpha<\frac{1}{4}\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\alpha)>f\left(\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow f(\alpha)>\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2f(\alpha)>1\Leftrightarrow 2f(\alpha)-1>0$ και

$\beta>\frac{1}{4}\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\beta)<f\left(\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow f(\beta)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2f(\beta)<1\Leftrightarrow 2f(\beta)-1<0$, άρα $P=(2f(\alpha)-1)(2f(\beta)-1)<0$

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία, δίνονται από τη λύση της εξίσωση $f(x)=2x$.

Για κάθε $x\ge 0$ είναι $f(x)=2x\Leftrightarrow 1-\sqrt{x}=2x\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}-1=0$ (1)

Θέτουμε $\sqrt{x}=u\ge 0$, οπότε $x=u^2$ και η (1) γίνεται: $2u^2+u-1=0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με Δ= 9 και ρίζες $u=-1$ απορρίπτεται ή $u=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$.

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

15377.Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα. Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α) Να βρείτε τη διαφορά Δ(x) των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x. **(Μονάδες 4)**

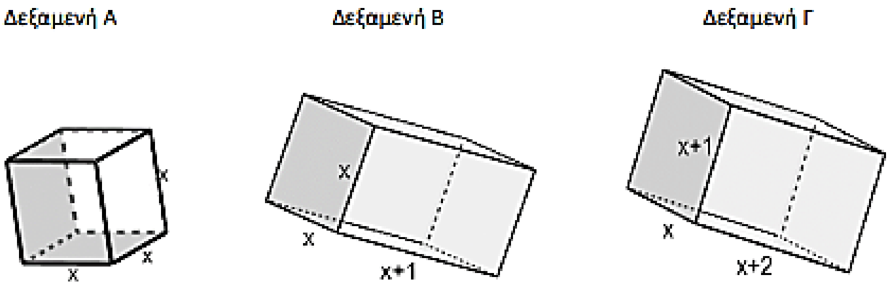
β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β. **(Μονάδες 9)**

ii. Τη διαφορά των όγκων Δ(x). **(Μονάδες 4)**

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα. **(Μονάδες 8)**

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ



Λύση

α) Ο όγκος της κυβικής δεξαμενής Α υπολογίζεται από τον τύπο του όγκου κύβου, δηλαδή $V_A(x) = x^3$ και ο όγκος της δεξαμενής Β, από τον τύπο του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, $V_B(x) = (x+1)\cdot x^2$

Είναι $\Delta(x) = V_B(x) - V_A(x) = (x+1)\cdot x^2 - x^3 = x^3 + x^2 - x^3 = x^2$

β) i. $V_B(x) = 36 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+4x+12) = 0 \Leftrightarrow (x-3=0 \Leftrightarrow x=3)$ ή

$(x^2 + 4x + 12 = 0$ αδύνατη γιατί έχει $\Delta < 0)$

Η διάσταση της δεξαμενής Α είναι x = 3 μέτρα. Οι διαστάσεις της δεξαμενής Β είναι 3 μέτρα, 3 μέτρα και 4 μέτρα.

ii. Η διαφορά των όγκων είναι $\Delta(x) = 3^2 = 9$ κυβικά μέτρα.

γ) Η νέα δεξαμενή Γ θα έχει όγκο $V_\Gamma(x) = (x+1)(x+2)x$.

$V_\Gamma(x) \geq 60 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)x \geq 60 \Leftrightarrow (x^2+x)(x+2) - 60 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x - 60 \geq 0 \Leftrightarrow$

$x^3 + 3x^2 + 2x - 60 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+6x+20) \geq 0$ (1)

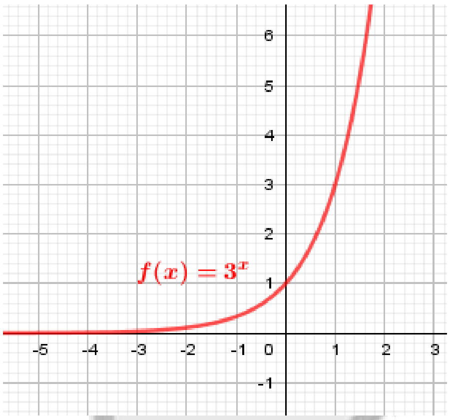
Το τριώνυμο $x^2 + 6x + 20$ έχει $\Delta < 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 6x + 20 > 0$, οπότε η (1) γίνεται: $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Επομένως, η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι το 3, που είναι και η ζητούμενη ακμή.

Εκθετική συνάρτηση

Θέμα 2ο

21451.Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3^x, x\in\mathbb{R}$.



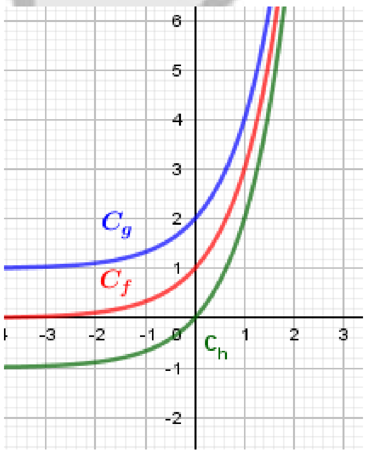
α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=3^x+1$ και $h(x)=3^x-1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 12)

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και ποια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h ;

(Μονάδες 13)

Λύση

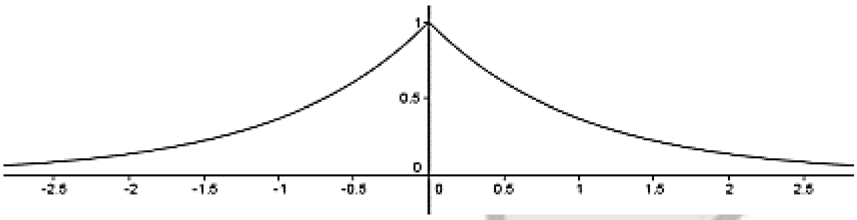


α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=3^x+1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτηση h προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων.

β) Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη την ευθεία y = 0 (τον αρνητικό ημιάξονα των x). Η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Άρα η γραφική παράσταση της g έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση y = 1. Ομοίως, η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα κάτω. Άρα η γραφική παράσταση της h έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y=-1$.

Θέμα 4ο

15269.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f.

A. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ e^{-x}, & x\geq 0 \end{cases}$ **B.** $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0 \\ e^x, & x\geq 0 \end{cases}$ **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της. **(Μονάδες 5)**

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

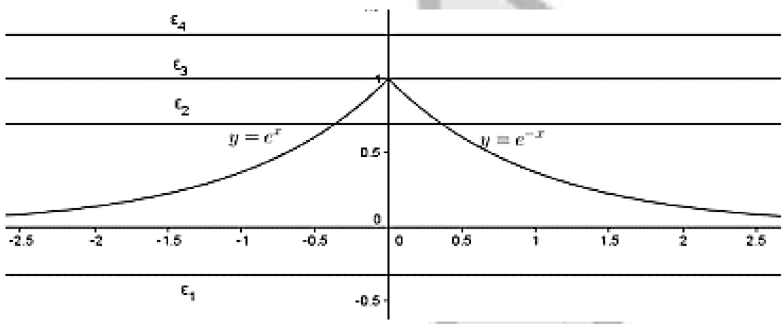
δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$ είναι το σημείο (0, 1). **(Μονάδες 5)**

Λύση

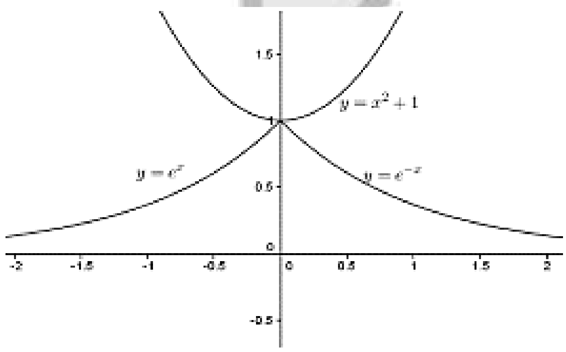
α) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την $y = e^x$ για x <0 και την $y = e^{-x}$ για $x \geq 0$, οπότε $f(x) = \begin{cases} e^x , & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
Παρατηρούμε ότι έχει μέγιστη τιμή το 1 για x = 0.

γ) Αν $\alpha \leq 0$ (ευθεία ε_1) τότε η C_f δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την ευθεία y = α..
Αν $0 < \alpha < 1$ (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία y = α έχουν 2 κοινά σημεία.
Αν α = 1 (ευθεία ε_3) έχουν ένα κοινό σημείο το (0,1).
Τέλος αν $\alpha > 1$ (ευθεία ε_4) δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1$ η παραβολή έχει ελάχιστο το 1 για x = 0.
Επειδή η f έχει μέγιστο το 1 για x = 0 το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την παραβολή είναι το (0,1)



21471.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία A(1,3) και B(2,13).
α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β . **(Μονάδες 7)**
Αν α = 5 και β = - 7
β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y΄y . **(Μονάδες 4)**
γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία A(1,3) και B(2,13), οπότε:
$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + \beta = 13 \end{cases} \overset{(-)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha - 2\alpha + \beta - \beta = 13 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 + \beta = 3 \\ \alpha = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -7 \\ \alpha = 5 \end{cases}.$$

β) Για $\alpha = 5$ και $\beta = -7$ είναι $f(x) = 5 \cdot 2^x - 7$ και για x = 0 είναι $f(0) = 5 - 7 = -2$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, - 2) .

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{x_1} < 5 \cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{x_1} - 7 < 5 \cdot 2^{x_2} - 7 \Leftrightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ) $f(x) > 4^x - 3 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^x - 7 > 4^x - 3 \Leftrightarrow 0 > (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4$
Θέτουμε $2^x = y > 0$ και η εξίσωση γίνεται $y^2 - 5y + 4 < 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με Δ=9 και ρίζες $y=1$ ή $y=4$, άρα

$y^2-5y+4<0 \Leftrightarrow 1<y<4 \Leftrightarrow 1<2^x<4 \Leftrightarrow 2^0<2^x<2^2 \Leftrightarrow 0<x<2$

21448.Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t = 0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του f (t) (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t)=q_0\cdot\alpha^t$, $t\geq 0$, όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f, εκφράζοντας τις τιμές f (t) ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0. (Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha=\frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής. (Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Στο πλαίσιο του προβλήματος η σταθερά q_0 παριστάνει τη δόση του φαρμάκου που πήρε ο ασθενής (την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό τη χρονική στιγμή $t = 0$).
Η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό του ασθενούς μειώνεται όσο περνούν οι ημέρες, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση $f(t)=q_0\cdot\alpha^t$, $t\geq 0$ είναι φθίνουσα, το οποίο συμβαίνει όταν $0<\alpha<1$.

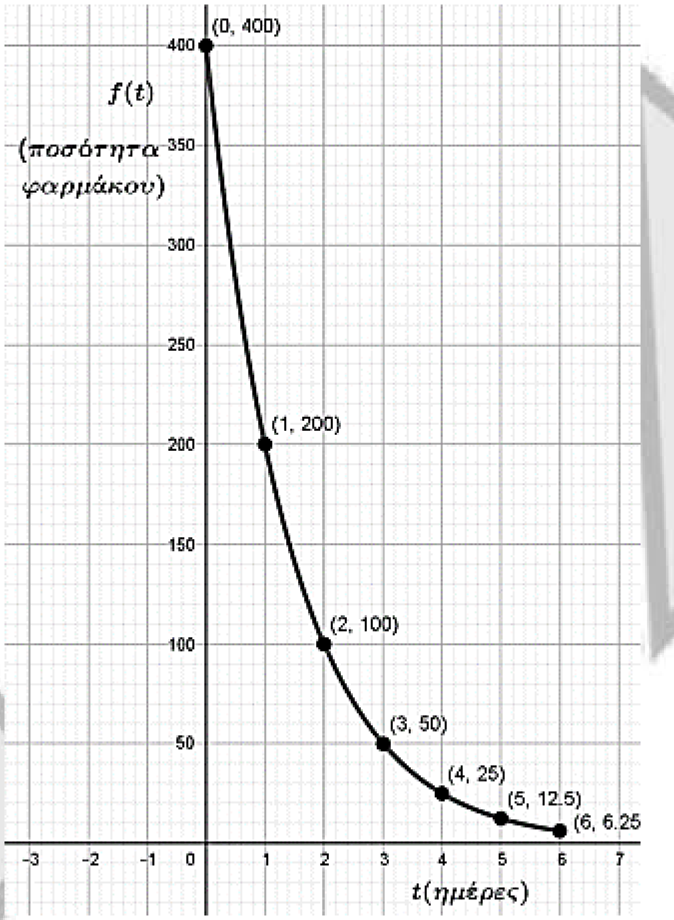
β) i. Μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί, δηλαδή $f(1)=\frac{1}{2}q_0 \Leftrightarrow q_0\cdot\alpha=\frac{1}{2}q_0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$.

ii. $f(2)=q_0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{q_0}{4}$, $f(2)=q_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{q_0}{8}$, $f(4)=q_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{q_0}{16}$, $f(5)=q_0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{q_0}{32}$ και $f(6)=q_0\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{q_0}{64}$.

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$

γ) i. Έχουμε $f(4)=25 \Leftrightarrow \frac{q_0}{16}=25 \Leftrightarrow q_0=400mg$

ii. Με τη βοήθεια του βii) ερωτήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $f(t)=400\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$ στο διάστημα $[0,6]$:



Λογάριθμοι

Θέμα 2ο

15687.Δίνεται η παράσταση $A=\log_4 3+\log_4 \alpha-\log_4 \beta$ όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A=\log_4\frac{3\alpha}{\beta}$. **(Μονάδες 13)**

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha=16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $A=\log_4 3+\log_4\alpha-\log_4\beta=A=\log_4(3\alpha)-\log_4\beta=\log_4\frac{3\alpha}{\beta}$

β) $A=\log_4\frac{3\alpha}{\beta}=\log_4\frac{16\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}}=\log_4 4^2=2$

15816.Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\ln 2,\ \beta=\ln 4,\ \gamma=\ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta=\alpha+\gamma$. **(Μονάδες 12)**

β) Να αποδείξετε ότι $\beta+\gamma=5\alpha$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $2\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow 2\ln 4=\ln 2+\ln 8\Leftrightarrow \ln 4^2=\ln(2\cdot 8)\Leftrightarrow \ln 16=\ln 16$ ισχύει

β) $\beta+\gamma=\ln 4+\ln 8=\ln(4\cdot 8)=\ln 32=\ln 2^5=5\ln 2=5\alpha$

15817.Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\ln 2$ και $\beta=\ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0<\alpha<\beta$. **(Μονάδες 12)**

β) Να αποδείξετε ότι $\beta-\alpha<1$. **(Μονάδες 13)**

Δίνεται $e\simeq 2.71$.

Λύση

α) Είναι $2<3$ και η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$f(2)<f(3)\Leftrightarrow \ln 2<\ln 3\Leftrightarrow \alpha<\beta$

β) $\beta-\alpha<1\Leftrightarrow \ln 3-\ln 2<1\Leftrightarrow \ln\frac{3}{2}<\ln e\Leftrightarrow \frac{3}{2}<e$ ισχύει

Θέμα 4ο

15251.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α. **(Μονάδες 6)**

β) Για α =15

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-3x+2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. **(Μονάδες 6)**

ii. αν $P(x)=(x^2-3x+2)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. **(Μονάδες 7)**

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Είναι $P(1)=0\Leftrightarrow 2-9+\alpha-2-6=0\Leftrightarrow \alpha=15$

2	-9	13	- 6	ρ=1
	2	-7	6	
2	-7	6	0	

β) i. Είναι $P(x)=2x^3-9x^2+13x-6$ και
$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

Κάνοντας τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x-1$προκύπτει ότι $P(x)=(x-1)(2x^2-7x+6)$.

Το τριώνυμο $2x^2-7x+6$ έχει Δ=1 και ρίζες $x=2,\ x=\frac{3}{2}$, οπότε

$2x^2-7x+6=2(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x-2)(2x-3)$, άρα

$P(x)=(x-1)(x-2)(2x-3)=(x^2-3x+2)(2x-3)$

ii. $P(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$

x	$-\infty$		1		3/2		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	–		–	0	+	
$2x-3$		–		–	0	+		+	
$P(x)$		–	0	+	0	–	0	+	

iii. Είναι $\ln 2<\ln e=1$ και $P(x)<0$ για $x<1$,
άρα $P(\ln 2)<0$.

15474.Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=e^{\ln e}x^3+4x^2\ln\sqrt{e}+2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x)=ex^3+2x^2+2$. **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y=ex+4$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y=ex+4$. **(Μονάδες 8)**

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $P(e)-e^2-4$. **(Μονάδες 4)**

Λύση

α) $P(x)=e^{\ln e}x^3+4x^2\ln\sqrt{e}+2=ex^3+4x^2\ln e^{\frac{1}{2}}+2=ex^3+4x^2\cdot\frac{1}{2}+2=ex^3+2x^2+2$

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y=ex+4$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$P(x)=ex+4 \Leftrightarrow ex^3+2x^2+2=ex+4 \Leftrightarrow ex^3-ex+2x^2-2=0 \Leftrightarrow$

$ex(x^2-1)+2(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(ex+2)=0 \Leftrightarrow (x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1)$ ή

$\left(ex+2=0 \Leftrightarrow ex=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{e}\right)$

x	$-\infty$		-1		-e/2		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	–		–	0	+	
$ex+2$		–		–	0	+		+	
$P(x)$		–	0	+	0	–	0	+	

γ) Για να βρούμε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) είναι πάνω από την ευθεία ε: y = ex + 4 θα λύσουμε την ανίσωση:

$P(x)>ex+4 \Leftrightarrow (x^2-1)(ex+2)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-1,-\frac{2}{e}\right)\cup(1,+\infty)$

δ) Παρατηρούμε ότι το $P(e)-e^2-4$ είναι η τιμή του $P(x)-(ex+4)$ για x = e, οπότε με βάση το προηγούμενο σκέλος είναι $P(e)-e^2-4>0$ αφού e > 1.

15822.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x$, $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha\neq 0$ το οποίο το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$. **(Μονάδες 7)**

β) Να αποδείξετε ότι α = -1 και β = 0. **(Μονάδες 6)**

γ) Με α = - 1 και β = 0,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$. **(Μονάδες 6)**

ii. να αποδείξετε ότι $P\left(\log\sqrt{10}\right)>0$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Είναι $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x=x\left(\alpha x^2+\beta x+1\right)$, οπότε μία ακέραια ρίζα του πολυωνύμου είναι η x = 0 και οι άλλες δύο θα είναι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+1$ που επειδή έχει ακέραιους συντελεστές, θα πρέπει οι δύο αυτές ακέραιες ρίζες να είναι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή του 1. Δεδομένου ότι οι μόνοι διαιρέτες του 1 είναι το 1 και το -1, συμπεραίνουμε ότι οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες είναι το 1 και το -1. Άρα οι ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι το 0, το 1 και το – 1.

β) Είναι $P(1)=0\Leftrightarrow \alpha+\beta+1=0\Leftrightarrow \beta=-1-\alpha\ (1)$.

$P(-1)=0\Leftrightarrow -\alpha+\beta-1=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}-\alpha-1-\alpha-1=0\Leftrightarrow -2\alpha=2\Leftrightarrow \alpha=-1$ και από τη σχέση (1) προκύπτει β =0.

γ) i. Είναι $P(x)>0\Leftrightarrow -x^3+x>0\Leftrightarrow$

$x\left(1-x^2\right)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$1-x^2$	−	0	+		+	0	−
x	−		−	0	+		+
$P(x)$	+	0	−	0	+	0	−

ii. $\log\sqrt{10}=\log 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

Επειδή $\frac{1}{2}\in(0,1)$ είναι $P\left(\log\sqrt{10}\right)=P\left(\frac{1}{2}\right)>0$

15823.Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$. **(Μονάδες 10)**

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$. **(Μονάδες 10)**

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.
(Μονάδες 5)

Λύση

α) Είναι $P(x)=\left(4x^2-1\right)(3x-2)+1$

$P(x)=1\Leftrightarrow\left(4x^2-1\right)(3x-2)+1=1\Leftrightarrow\left(4x^2-1\right)(3x-2)=0\Leftrightarrow$

$\left(4x^2-1=0\Leftrightarrow 4x^2=1\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}\right)$ ή $\left(3x-2=0\Leftrightarrow 3x=2\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\right)$

β) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $P(x)=1$ έχει λύσεις τις $x=\frac{1}{2}$ ή $x=-\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{2}{3}$.

Είναι $\log 5\neq\frac{1}{2}$ αφού $5\neq 10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$, $\log 5\neq-\frac{1}{2}$ αφού $5\neq 10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$ και

$\log 5 \neq \frac{2}{3}$ αφού $5 \neq 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}$, άρα $P(\log 5) \neq 1$.

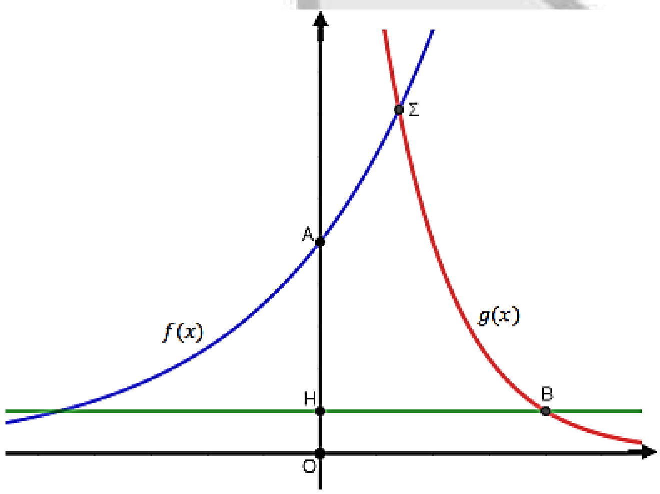
γ) Είναι $P(-1) = \left(4(-1)^2 - 1\right)\left(3(-1) - 2\right) + 1 = 3 \cdot (-5) + 1 = -14 < 0$ και

$P(0) = \left(4 \cdot 0^2 - 1\right)\left(3 \cdot 0 - 2\right) + 12 + 1 = 3 > 0$.

Αφού οι τιμές $P(-1)$ και $P(0)$ είναι ετερόσημες, η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

Θέμα 3ο

15392.Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 5^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x′x τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο $H\left(0, \frac{1}{5}\right)$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ.

(Μονάδες 10)

γ) Αν είναι x_B, x_Σ οι τετμημένες των σημείων Β, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x_B - x_\Sigma = \log 20$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Είναι $f(0) = 2^0 = 1$, άρα $A(0,1)$.

Είναι $g(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{1-x} = 5^{-1} \Leftrightarrow 1 - x = -1 \Leftrightarrow 2 = x$, άρα $B\left(2, \frac{1}{5}\right)$.

β) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^x = 5^{1-x} \Leftrightarrow 2^x = \frac{5}{5^x} \Leftrightarrow 2^x \cdot 5^x = 5 \Leftrightarrow 10^x = 5 \Leftrightarrow x = \log 5$, άρα $x_\Sigma = \log 5$.

γ) $x_B - x_\Sigma = 2 - \log 5 = \log 10^2 - \log 5 = \log \frac{100}{5} = \log 20$

15093.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(10^x-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0,+\infty)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)+x=\log(10^{2x}-10^x)$, $x>0$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y=-x$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $10^x-1>0 \Leftrightarrow 10^x>1 \Leftrightarrow 10^x>10^0 \Leftrightarrow x>0$, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x όταν $f(x)>0 \Leftrightarrow$

$\log(10^x-1)>0 \Leftrightarrow \log(10^x-1)>\log 1 \Leftrightarrow 10^x-1>1 \Leftrightarrow 10^x>2 \Leftrightarrow \log 10^x>\log 2 \Leftrightarrow x>\log 2$

γ) $\log(10^{2x}-10^x)=\log\left[10^x(10^x-1)\right]=\log 10^x+\log(10^x-1)=x+f(x)$

δ) Η τετμημένη του κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f με την y = - x, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=-x \Leftrightarrow f(x)+x=0 \Leftrightarrow \log(10^{2x}-10^x)=0 \Leftrightarrow \log(10^{2x}-10^x)=\log 1 \Leftrightarrow$

$10^{2x}-10^x=1 \Leftrightarrow 10^{2x}-10^x-1=0 \quad (1)$

Θέτουμε $10^x=\omega>0$ και η (1) γίνεται $\omega^2-\omega-1=0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta=5$ και ρίζες $\omega=\frac{1+\sqrt5}{2}$ ή $\omega=\frac{1-\sqrt5}{2}$ που απορρίπτεται.

Άρα $10^x=\frac{1+\sqrt5}{2} \Leftrightarrow \log 10^x=\log\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) \Leftrightarrow x=\log\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)$.

Το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες $\left(\log\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right),-\log\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\right)$.

15267.Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2+1)=1+\log 3-\log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2+1)=\log 5$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση. (Μονάδες 13)

Λύση

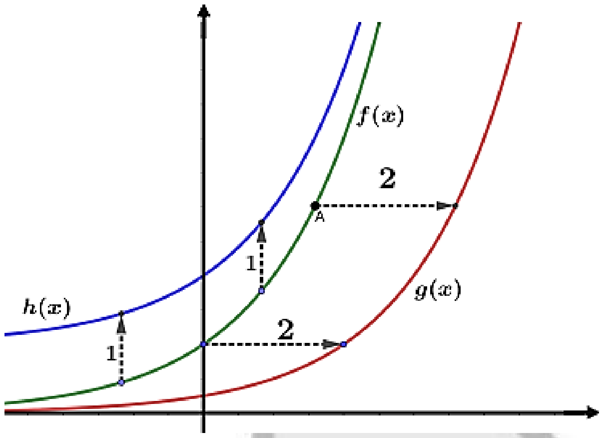
α) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+1>0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$\log(x^2+1)=1+\log 3-\log 6 \Leftrightarrow \log(x^2+1)=\log 10+\log 3-\log 6 \Leftrightarrow \log(x^2+1)=\log 30-\log 6 \Leftrightarrow$

$\log(x^2+1)=\log\frac{30}{6} \Leftrightarrow \log(x^2+1)=\log 5$

β) $\log(x^2+1)=\log 5 \Leftrightarrow x^2+1=5 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

15393.Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων g(x) και h(x), $x \in \mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f(x).



α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των g(x) και h(x) από την γραφική παράσταση της f(x) . **(Μονάδες 8)**

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων g(x) και h(x). **(Μονάδες 8)**

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της g(x) προέκυψε από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f(x) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά. Επίσης, η γραφική παράσταση της h(x) προέκυψε από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f(x) κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

β) Με βάση τα παραπάνω, έχουμε: $g(x) = f(x-2) = 2^{x-2}$, $h(x) = f(x)+1 = 2^x + 1$.

γ) Είναι $f(x) = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$, άρα Α(4,16).

15675.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **(Μονάδες 10)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A_f = (0, +\infty)$

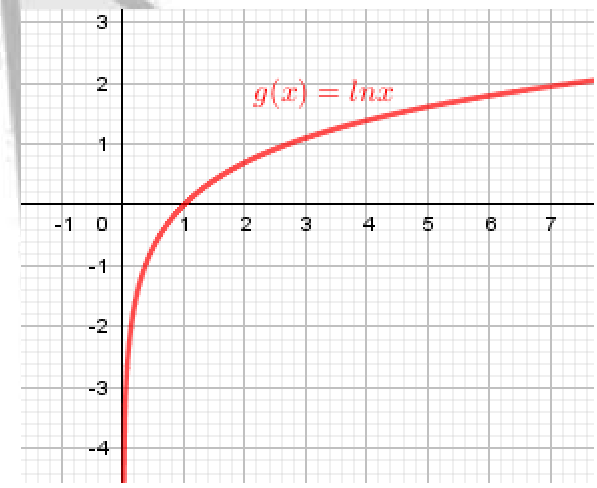
β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

15808.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . **(Μονάδες 7)**

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x . **(Μονάδες 8)**

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$.



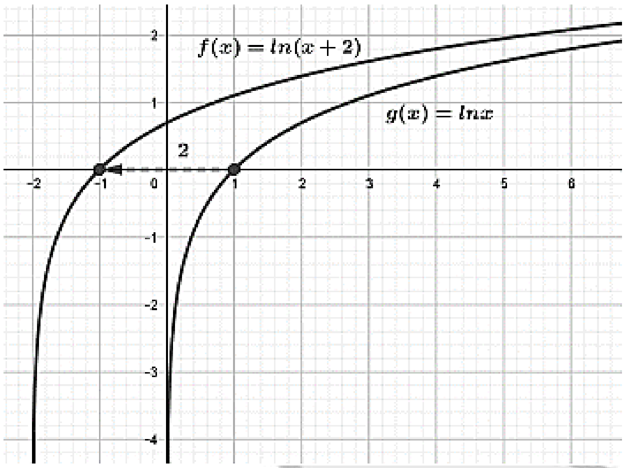
Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g . **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$, άρα $A_f=(-2,+\infty)$.

β) Είναι
$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x+2)=0 \Leftrightarrow x+2=1 \Leftrightarrow x=-1$
Η C_f τέμνει τον x΄x στο σημείο $(-1,0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά δυο μονάδες αριστερά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



17318.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$. **(Μονάδες 5)**

β) Να δείξετε ότι $\ln3+3\ln2-f(3)=\ln4$. **(Μονάδες 7)**

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\ln4$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $f(3)=\ln(3^2-2\cdot3+3)=\ln6$

β) Να δείξετε ότι $\ln3+3\ln2-f(3)=\ln3+\ln2^3-\ln6=\ln(3\cdot8)-\ln6=\ln\left(\frac{24}{6}\right)=\ln4$.

γ) $f(x)=\ln4 \Leftrightarrow \ln(x^2-2x+3)=\ln4 \Leftrightarrow x^2-2x+3=4 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=8$ και ρίζες $x=1-\sqrt{2}$ ή $x=1+\sqrt{2}$.

21449. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y. **(Μονάδες 10)**

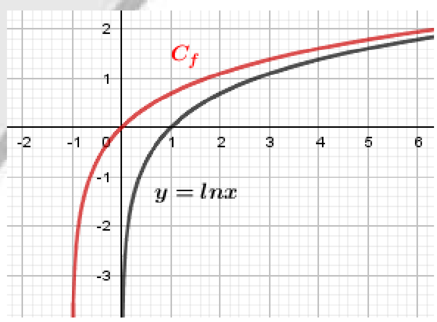
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y=\ln x$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$, άρα $A_f=(-1,+\infty)$.

β) Είναι $f(0)=\ln1=0$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=\ln1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$, οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μετατόπιση της $y=\ln x$ κατά 1 μονάδα αριστερά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα



21450.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x^2+4)$ και $g(x)=\ln x+\ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . **(Μονάδες 12)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x^2+4>0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f=\mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $x>0$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g=(0,+\infty)$.

β) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \ln(x^2+4)=\ln x+\ln 4\Leftrightarrow \ln(x^2+4)=\ln(4x)\Leftrightarrow x^2+4=4x\Leftrightarrow$

$x^2-4x+4=0\Leftrightarrow (x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$ δεκτή.

Θέμα 4ο

15015.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. **(Μονάδες 7)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x=0$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x>0$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $P(x)=0\Leftrightarrow x^3-x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x^2-x-2)=0\Leftrightarrow (x=0)$ ή

$\left(x^2-x-2=0,\ \Delta=1+8=9,\ x_1=\dfrac{1+3}{2}=2,\ x_2=\dfrac{1-3}{2}=-1\right)$

β) Για κάθε $x>0$ είναι: $\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x=0\Leftrightarrow P(\ln x)=0\Leftrightarrow (\ln x=0\Leftrightarrow x=1)$ ή

$(\ln x=2\Leftrightarrow x=e^2)$ ή $\left(\ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}\right)$

γ) Θέτουμε lnx = ω και η ανίσωση γίνεται

$\omega^3-\omega^2-2\omega>0\Leftrightarrow \omega(\omega^2-\omega-2)>0\Leftrightarrow$

$P(\omega)>0\Leftrightarrow -1<\omega<0$ ή $\omega>2$

ω	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
ω		−		−	0	+		+	
$\omega^2-\omega-2$		+	0	−		−	0	+	
$P(\omega)$		−	0	+	0	−	0	+	

Άρα $\left(-1<\ln x<0\Leftrightarrow \dfrac{1}{e}<x<1\right)$ ή $\ln x>2\Leftrightarrow x>e^2$ δεκτές

15021.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **(Μονάδες 5)**

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το O(0,0). **(Μονάδες 6)**

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2)+f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)$. **(Μονάδες 7)**

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=0$, για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x\neq 0$, άρα $A=\mathbb{R}^*$.

β) Για κάθε $x\in A$ και $-x\in A$.

Είναι $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{-x}=-\dfrac{x^2+1}{x}=-f(x)$, οπότε η f είναι περιττή και επομένως η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το Ο(0,0).

γ) $f(\ln 2)+f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)=f(\ln 2)+f\left(\ln 2^{-1}\right)=f(\ln 2)+f(-\ln 2)=f(\ln 2)-f(\ln 2)=0$

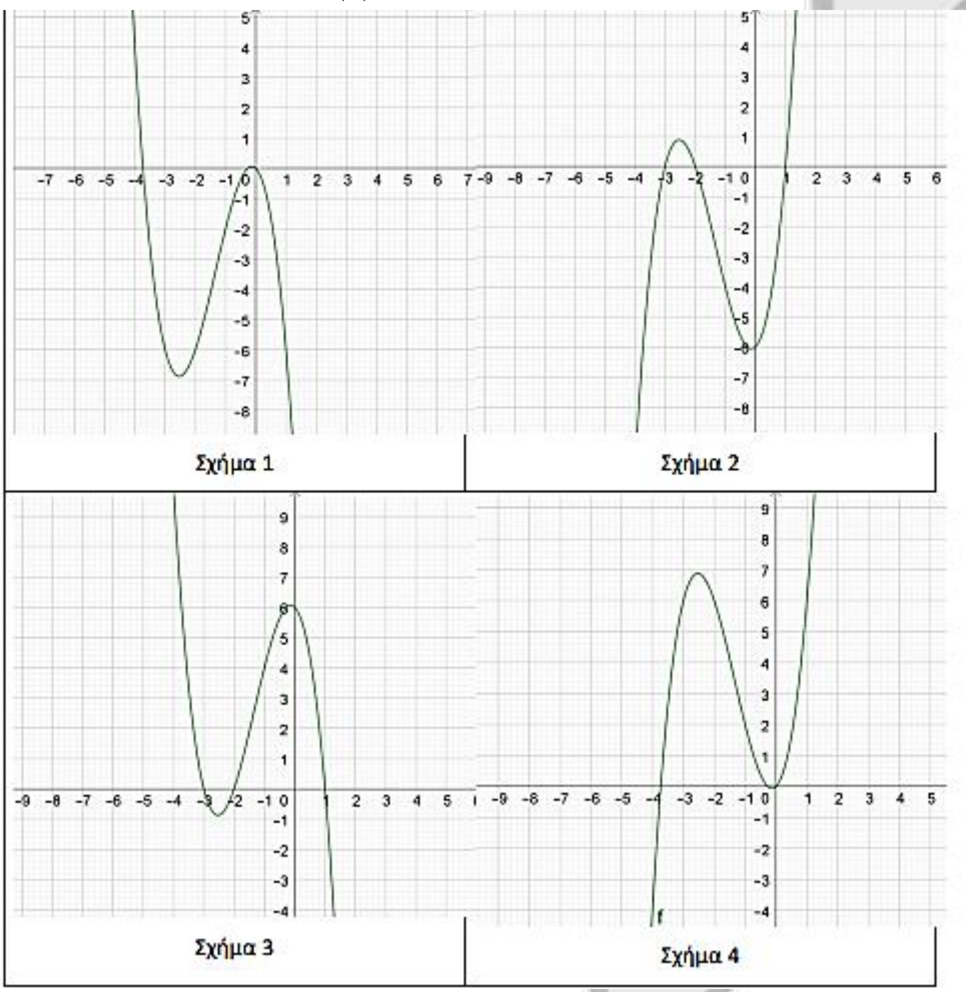
δ) Για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ είναι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=f(\eta\mu\theta)+f(-\eta\mu\theta)=f(\eta\mu\theta)-f(\eta\mu\theta)=0$

15678.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=-x^3-4x^2-x+6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 10)

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωσή $P(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την x =1. (Μονάδες 8)



Σχήμα 1 Σχήμα 2

Σχήμα 3 Σχήμα 4

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $P(1)=0$, οπότε το πολυώνυμο έχει ρίζα το 1.

Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι

$P(x)=(x-1)\left(-x^2-5x-6\right)=-(x-1)\left(x^2+5x+6\right)$

-1	-4	- 1	6	ρ=1
	-1	-5	-6	
-1	-5	-6	0	

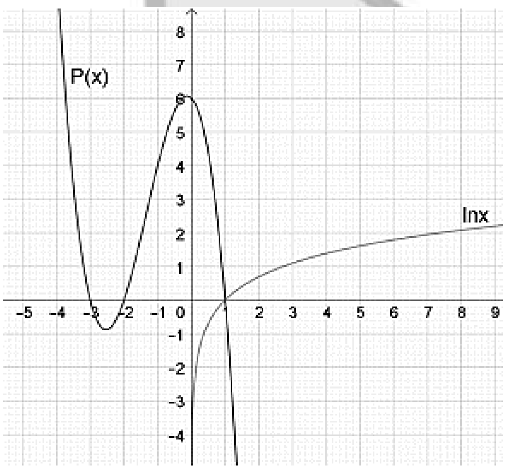
Το τριώνυμο x^2+5x+6 έχει διακρίνουσα Δ= 1 και ρίζες -2 , -3, άρα $P(x)=-(x-1)(x+2)(x+3)$

$P(x)<0 \Leftrightarrow -(x-1)(x+2)(x+3)<0 \Leftrightarrow$
$(x-1)(x+2)(x+3)>0 \Leftrightarrow x\in(-3,-2)\cup(1,+\infty)$

x	$-\infty$ -3	-2	1	$+\infty$
$x-1$	–	–	– 0	+
$x+2$	–	– 0	+	+
$x+3$	– 0	+	+	+
Γινόμενο	– 0	+ 0	– 0	+

β) Με βάση το α) ερώτημα, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) θα πρέπει να είναι κάτω από τον άξονα x΄x , για κάθε $x\in(-3,-2)\cup(1,+\infty)$, οπότε το μόνο σχήμα που το ικανοποιεί είναι το γ.

γ) Αν στο σχήμα γ συμπληρώνουμε τη γραφική παράσταση της lnx όπως φαίνεται παρακάτω, θα διαπιστώσομε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη 1 , που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x)=\ln x$ έχει μοναδική λύση την x =1.



15679.Δίνεται η παράσταση $A=\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$. **(Μονάδες 8)**
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α. **(Μονάδες 8)**
γ) Να λύσετε την εξίσωση $A=-\ln 3$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0 \Leftrightarrow (\omega^2-1)(\omega-3)>0 \Leftrightarrow$
$(\omega-1)(\omega+1)(\omega-3)>0 \Leftrightarrow$
$-1<\omega<1$ ή $\omega>3$

ω	$-\infty$ -1	1	3	$+\infty$
$\omega-1$	–	– 0	+	+
$\omega+1$	– 0	+	+	+
$\omega-3$	–	–	– 0	+
Γινόμενο	– 0	+ 0	– 0	+

β) Η παράσταση Α ορίζεται όταν
$\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}>0$ και αν θέσουμε $e^x=\omega$ είναι $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0 \Leftrightarrow -1<\omega<1$ ή $\omega>3$.
Άρα $(-1<e^x<1 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0)$ ή $(e^x>3 \Leftrightarrow x>\ln 3)$

γ) $A=-\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)=\ln 3^{-1} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x-3}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$3e^{2x}-\cancel{3}=e^x-\cancel{3} \Leftrightarrow 3e^{2x}-e^x=0 \Leftrightarrow 3e^{2x}(3e^x-1)=0 \Leftrightarrow e^x=0$ αδύνατη ή

$3e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{3}=-\ln 3$

15690.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y . **(Μονάδες 5)**

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=\ln x$. **(Μονάδες 6)**

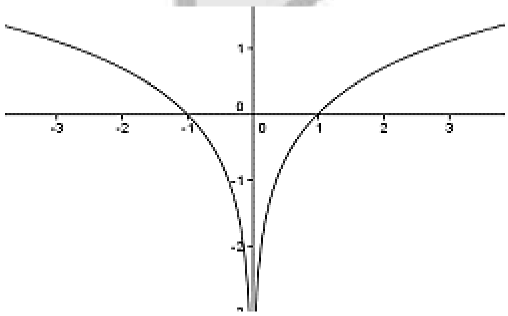
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2,\ x\neq 0$. **(Μονάδες 7)**

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία y = 2. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι άρτια.
Επειδή $A_f=\mathbb{R}^*$ παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in A_f$ και $-x\in A_f$.
Είναι $f(-x)=\frac{1}{2}\ln(-x)^2=\frac{1}{2}\ln x^2=f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

β) Για κάθε x > 0 είναι $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\ln x=\ln x$



γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και, σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = lnx, x > 0 και στη συνέχεια θεωρήσουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς τον άξονα y΄y .

δ) Η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία y = 2, όταν

$f(x)<2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln x^2<2\Leftrightarrow\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\ln|x|<2\Leftrightarrow|x|<e^2\Leftrightarrow -e^2<x<e^2$. Όμως $x\neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία y = ln2 για $x\in(-e^2,0)\cup(0,e^2)$.

16001.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x\ln x}$ και $g(x)=\sqrt{\ln x}$.

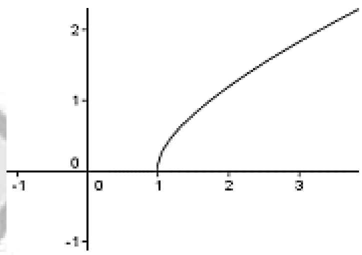
α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους. **(Μονάδες 4)**

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω. **(Μονάδες 5)**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f.

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της. **(Μονάδες 4)**

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$. **(Μονάδες 5)**



δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y=1-x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x)=1-x$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $\begin{cases}x>0\\ x\ln x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 1$, άρα $A_f=[1,+\infty)$.

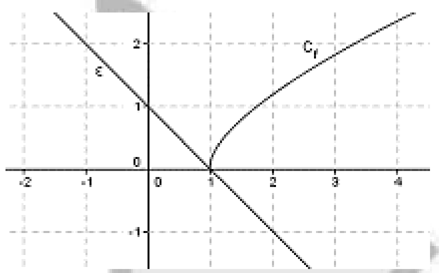
Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει $\begin{cases}x>0\\ \ln x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 1$, άρα $A_g=[1,+\infty)$.

β) Είναι $f(x)-g(x)=\sqrt{x\ln x}-\sqrt{\ln x}=\sqrt{x}\sqrt{\ln x}-\sqrt{\ln x}=\sqrt{\ln x}\left(\sqrt{x}-1\right)$

Επειδή $x\geq 1$, είναι $\sqrt{\ln x}\geq 0$ και $\sqrt{x}-1\geq 0$, άρα $f(x)-g(x)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$.

γ) i. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

ii. Είναι $\frac{5}{3}<\frac{7}{5}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(\frac{5}{3}\right)<f\left(\frac{7}{5}\right)$.



δ) Η ευθεία ε τέμνει τους άξονες στα σημεία (1,0) και (0,1) όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το μοναδικό κοινό σημείο της με την C_f είναι το (1,0).

Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=x-1$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

21445.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\frac{4^x-1}{2^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **(Μονάδες 7)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$. **(Μονάδες 9)**

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log 3-\log 7$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $\frac{4^x-1}{2^x+5}>0\Leftrightarrow\left(4^x-1\right)\left(2^x+5\right)>0\overset{2^x+5>0}{\Leftrightarrow}4^x-1>0\Leftrightarrow 4^x>4^0\Leftrightarrow x>0$, άρα $A_f=(0,+\infty)$.

β) $f(x)=\log 3-\log 7\Leftrightarrow\log\frac{4^x-1}{2^x+5}=\log\frac{3}{7}\Leftrightarrow\frac{4^x-1}{2^x+5}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow 7\left(4^x-1\right)=3\left(2^x+5\right)\Leftrightarrow$

$7\cdot\left(2^x\right)^2-7=3\cdot 2^x+15\Leftrightarrow 7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22=0$

Θέτουμε $2^x=y>0$ και η εξίσωση γίνεται $7y^2-3y-22=0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ=625 και ρίζες $y=2$ ή $y=-\frac{11}{7}$ που απορρίπτεται.

Άρα $2^x=2\Leftrightarrow x=1$.

γ) $f(x)>\log 3-\log 7\Leftrightarrow\log\frac{4^x-1}{2^x+5}>\log\frac{3}{7}\Leftrightarrow\frac{4^x-1}{2^x+5}>\frac{3}{7}\Leftrightarrow 7\left(4^x-1\right)>3\left(2^x+5\right)\Leftrightarrow$

$7\cdot\left(2^x\right)^2-7>3\cdot 2^x+15\Leftrightarrow 7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22>0\Leftrightarrow 7y^2-3y-22>0\Leftrightarrow y=-\frac{11}{7}$ αδύνατο ή $y>2\Leftrightarrow$

$2^x>2\Leftrightarrow x>1$

21446.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **(Μονάδες 7)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$. **(Μονάδες 9)**

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$, άρα $A_f = (\ln 2, +\infty)$.

β) $f(x) + x = 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) + \ln e^x = \ln 2^3 \Leftrightarrow \ln\left[e^x(e^x - 2)\right] = \ln 8 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x = 8 \Leftrightarrow$

$(e^x)^2 - 2e - 8 = 0$

Θέτουμε $e^x = y > 0$ και η εξίσωση γίνεται $y^2 - 2y - 8 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ=36 και ρίζες $y = 4$ ή $y = -2$ απορρίπτεται.

Άρα $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$ δεκτή.

γ) $f(x) + x \ge 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) + \ln e^x \ge \ln 2^3 \Leftrightarrow \ln\left[e^x(e^x - 2)\right] \ge \ln 8 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x \ge 8 \Leftrightarrow$

$(e^x)^2 - 2e - 8 \ge 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 \ge 0 \Leftrightarrow y \le -2$ αδύνατο ή $y \ge 4 \Leftrightarrow e^x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge \ln 4$.

21470.Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 e^{ct}$.Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το 1/3 της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. **(Μονάδες 10)**

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για t = 0). **(Μονάδες 6)**

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, οπότε

$Q(2) = \frac{1}{3}Q_0 \Leftrightarrow Q_0 e^{2t} = \frac{1}{3}Q_0 \Leftrightarrow (e^t)^2 = \frac{1}{3} \overset{e^t>0}{\Leftrightarrow} e^t = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Είναι $Q(t) = Q_0 e^{ct} = Q_0 (e^t)^c = Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$

β) $Q(4) = 1 \Leftrightarrow Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9}Q_0 = 1 \Leftrightarrow Q_0 = 9$ κιλά

γ) $Q(t) = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 9\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^2\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^t = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^2 \cdot 3^{-\frac{t}{2}} = 3^{-4} \Leftrightarrow 3^{2-\frac{t}{2}} = 3^{-4} \Leftrightarrow 2 - \frac{t}{2} = -4 \Leftrightarrow$

$6 = \frac{t}{2} \Leftrightarrow t = 12$.

Συνεπώς μετά από 12 χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

Θέμα 3ο

15676.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **(Μονάδες 7)**
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 8)**
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον x΄x. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$, άρα $A_f=(0,+\infty)$

β) $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(e^x-1)=0 \Leftrightarrow e^x-1=1 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(ln2,0)

γ) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον x΄x για τις τιμές του x > 0 για τις οποίες είναι

$f(x)<0 \Leftrightarrow \ln(e^x-1)<0 \Leftrightarrow e^x-1<1 \Leftrightarrow e^x<2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x<\ln 2$