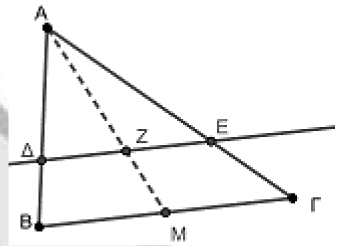
Θεώρημα Θαλή

2ο Θέμα

14534. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6 και ΑΓ=9. ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Ζ εσωτερικό στην ΑΜ ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{ΑΖ}{ΑΜ}=\frac{2}{3}$. Από το σημείο Ζ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

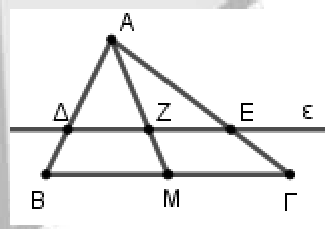


α) Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{2}{3}$ και $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=2$. **(Μονάδες 15)**

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΓΕ. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Επειδή ΔΕ // ΒΓ από το θεώρημα Θαλή ισχύει ότι:

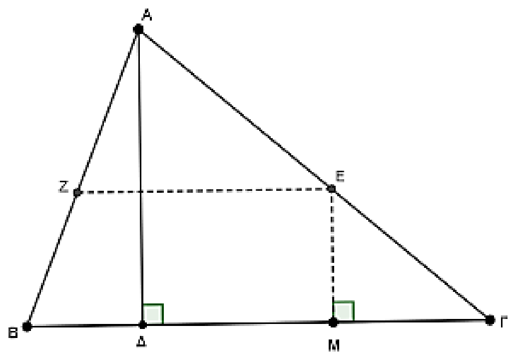


$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΖ}{ΑΜ}=\frac{2}{3} \text{ και } \frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΖ}{ΖΜ}=\frac{\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{ΑΜ}}{\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{ΑΜ}}=2$$

β) Είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow ΑΔ=\frac{2}{3}ΑΒ=\frac{2}{3}\cdot 6=\frac{12}{3}=4$ και

$$\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=2 \Leftrightarrow \frac{ΑΓ-ΕΓ}{ΕΓ}=2 \Leftrightarrow 9-ΕΓ=2ΕΓ \Leftrightarrow 9=3ΕΓ \Leftrightarrow ΕΓ=3$$

15830.Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά ΒΓ σε ένα άλλο σημείο της Μ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{ΖΑ}{ΖΒ}=\frac{ΕΑ}{ΕΓ}$ **(Μονάδες 10)**

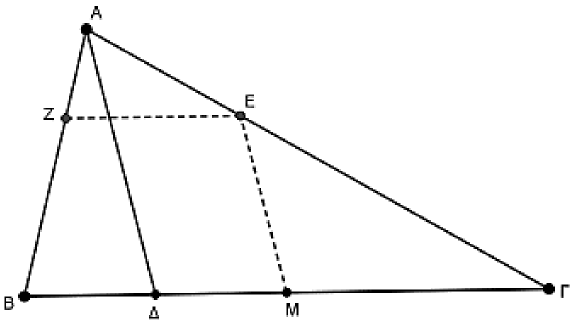
β) $\frac{ΖΑ}{ΖΒ}=\frac{ΜΔ}{ΜΓ}$ **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Από τα δεδομένα η ΖΕ // ΒΓ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ΖΑ}{ΖΒ}=\frac{ΕΑ}{ΕΓ}$.

β) Είναι ΜΕ // ΑΔ (από τα δεδομένα είναι κάθετα στην ίδια ευθεία ΒΓ), οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ΜΔ}{ΜΓ}=\frac{ΕΑ}{ΕΓ}$. Από την τελευταία ισότητα και την ισότητα που δείξαμε στο ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι $\frac{ΖΑ}{ΖΒ}=\frac{ΜΔ}{ΜΓ}$

15831.Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, το Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ και το Δ είναι το μέσο του ΜΒ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{1}{2}$ **(Μονάδες 15)**

β) $\frac{ΖΑ}{ΖΒ}=\frac{1}{2}$ **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Από τα δεδομένα, το Δ να είναι το μέσο του ΒΜ και το Μ μέσο της ΒΓ. Άρα $ΜΔ=\frac{1}{2}ΜΒ=\frac{1}{2}ΜΓ$.

Επίσης η ΜΕ // ΑΔ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{ΜΔ}{ΜΓ}=\frac{\frac{1}{2}ΜΓ}{ΜΓ}=\frac{1}{2}$.

β) Από τα δεδομένα η ΖΕ // ΒΓ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ΖΑ}{ΖΒ}=\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{1}{2}$.

14579.Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΑΓ. Επίσης ΑΒ = 3ΑΔ.

α) Να βρείτε τους λόγους $\frac{ΒΔ}{ΑΔ}$ και $\frac{ΒΕ}{ΕΓ}$. **(Μονάδες 15)**

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΓ = 3,9 και ΓΖ = 1,3 να αποδείξετε ότι η ΖΕ είναι παράλληλη της ΑΒ. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Εφόσον ΑΒ = 3ΑΔ είναι ΒΔ + ΑΔ = 3ΑΔ ή ΒΔ = 2ΑΔ. Άρα $\frac{ΒΔ}{ΑΔ}=2$.

Η ευθεία ΔΕ που είναι φορέας του ΔΕ είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, άρα χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου ΑΒ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα. Επομένως $\frac{ΒΕ}{ΕΓ}=\frac{ΒΔ}{ΑΔ}=2$.

β) Από το α) έχουμε ότι το σημείο Ε διαιρεί το τμήμα ΒΓ σε τμήματα με λόγο 2. Εφόσον ΑΓ = 3,9, τότε ΑΖ + ΓΖ = 3,9. Όμως ΓΖ = 1,3, άρα ΑΖ + 1,3 = 3,9 ή ΑΖ = 2,6. Επομένως $\frac{ΑΖ}{ΓΖ}=\frac{2,6}{1,3}=2$.

Άρα το σημείο Ζ διαιρεί το τμήμα ΑΓ σε τμήματα με λόγο 2. Εφόσον η ευθεία ΖΕ χωρίζει τις πλευρές του τριγώνου ΑΓ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα με λόγο 2, η ΖΕ είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, την ΑΒ.

Ομοιότητα
2ο Θέμα

14535. Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: ΑΒ = 9, ΑΓ =15 και $\hat{A}=48^\circ$, $Z\Delta=12$, $ZE=20$ και $\hat{Z}=48^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

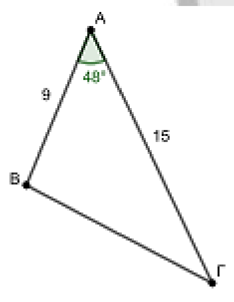
β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

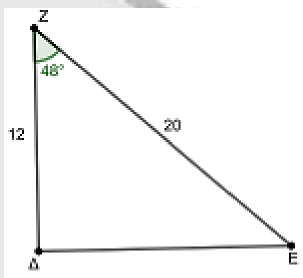
ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, άρα $\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{A\Gamma}{ZE}$.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν $\hat{A}=\hat{Z}$, έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.





β) i. Είναι $\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{A\Gamma}{ZE}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}$

ii. Επειδή $\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{3}{4}$, είναι $\lambda=\frac{3}{4}$

14536. Για δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ) γνωρίζουμε ότι: $\hat{A}=48^\circ$, $\hat{Z}=66^\circ$ και $AB=3\cdot E\Delta$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων. (Μονάδες 12)

Λύση

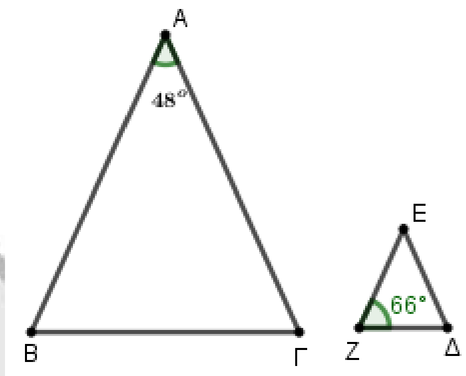
α) Επειδή το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές με ΕΔ = ΕΖ, είναι $\hat{Z}=\hat{\Delta}=66^\circ$, τότε: $\hat{E}+\hat{Z}+\hat{\Delta}=180^\circ \Leftrightarrow$

$\hat{E}+66^\circ+66^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{E}=180^\circ-132^\circ=48^\circ$

Επειδή $AB=3\cdot E\Delta$ και ΑΒ = ΑΓ, ΕΔ = ΕΖ, είναι

$\frac{AB}{E\Delta}=3$, $\frac{A\Gamma}{EZ}=3$, δηλαδή $\frac{AB}{E\Delta}=\frac{A\Gamma}{EZ}$.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν $\hat{A}=\hat{E}$, έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.



β) i. Είναι $\frac{AB}{E\Delta}=\frac{A\Gamma}{EZ}=\frac{B\Gamma}{Z\Delta}$

ii. Επειδή $\frac{AB}{E\Delta}=3$, είναι και $\frac{B\Gamma}{Z\Delta}=3$.

14537.Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:
$A = 48^\circ$, $B = 53^\circ$, $E = 79^\circ$ και $Z = 48^\circ$.

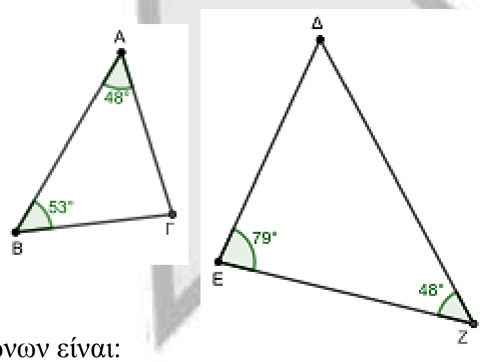
α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 10)
β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; (Μονάδες 9)
ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ έχουμε:

$\Delta + E + Z = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta + 79 + 48^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$.

Επειδή $B = \Delta$ και $A = Z$ τα δύο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

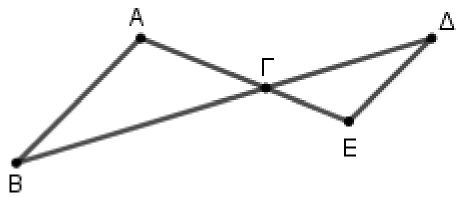


β) i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, οπότε:
Απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Δ είναι οι πλευρές ΑΓ και ΕΖ, οπότε είναι ομόλογες, απέναντι από τις ίσες γωνίες A, Z είναι οι πλευρές ΒΓ και ΔΕ, οπότε είναι ομόλογες. Τέλος απέναντι από τις ίσες γωνίες Γ, E είναι οι πλευρές ΑΒ και ΔΖ, οπότε είναι ομόλογες.

ii. Οι ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων είναι:

$$\frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{AB}{\Delta Z}$$

14538.Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε ΑΓ= 2ΓΕ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια. (Μονάδες 13)
β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.
ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;



(Μονάδες 12)

Λύση

α) Επειδή ΑΒ//ΔΕ είναι $A = E$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΕ και $B = \Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΔ.
Τα δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

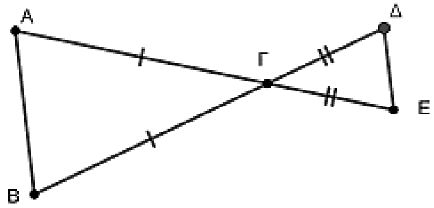
β) i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, οπότε:

- Απέναντι από τις ίσες γωνίες A, E ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$
- Απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Δ ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{A\Gamma}{\Gamma E}$ και
- Απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\Gamma B$, $\Delta\Gamma E$ ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{AB}{\Delta E}$

ii. Ο λόγος ομοιότητας είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, οπότε

$$\lambda = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \frac{2\cancel{\Gamma E}}{\cancel{\Gamma E}} = 2$$

14546.Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε ΑΒ = 2·ΔΕ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια.
(Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).
ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων; (Μονάδες 12)

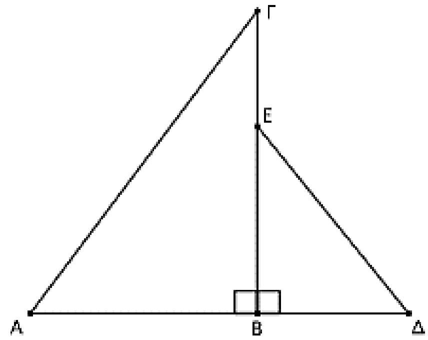
Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΑΒ και ΔΕ, είναι ΓΑ = ΓΒ και ΓΔ = ΓΕ.
Είναι $\frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta}=\frac{\Gamma B}{\Gamma E}$ και $A\Gamma B=\Delta\Gamma E$ ως κατακορυφήν, οπότε τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

β) i. Είναι $\frac{\Gamma A}{\Gamma E}=\frac{\Gamma B}{\Gamma\Delta}=\frac{AB}{\Delta E}$

ii. Είναι $\frac{\Gamma A}{\Gamma E}=\frac{\Gamma B}{\Gamma\Delta}=\frac{AB}{\Delta E}=\frac{2\cancel{\Delta E}}{\cancel{\Delta E}}=2\Leftrightarrow\frac{\Gamma A}{\Gamma E}=2\Leftrightarrow \Gamma A=2\cdot\Gamma E$

16099.Στο διπλανό σχήμα δίνονται $A=\Delta$,ΑΓ = 36, ΒΔ = 16 και ΕΔ = 24.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.
(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.
(Μονάδες 10)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ έχουν:
- $A=\Delta$ (υπόθεση)
- $AB\Gamma=EB\Delta=90^{\circ}$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

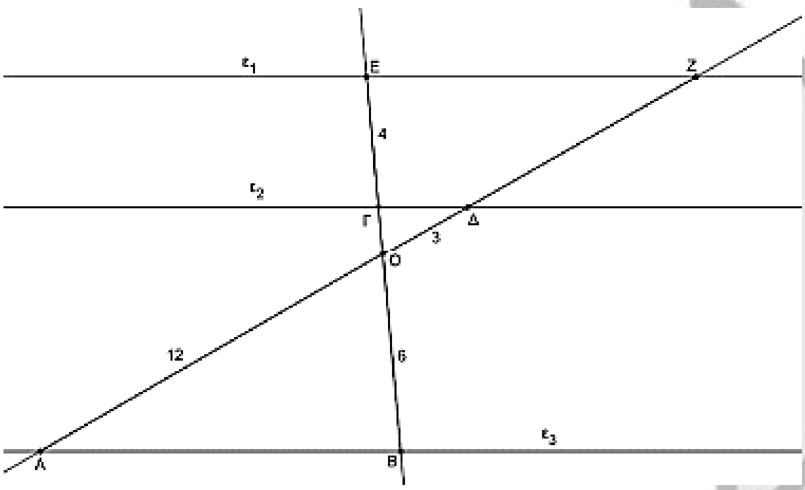
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
Άρα $\frac{A\Gamma}{E\Delta}=\frac{AB}{B\Delta}\Leftrightarrow\frac{\cancel{36}^{9}}{\cancel{24}^{6}}=\frac{AB}{16}\Leftrightarrow 6AB=144\Leftrightarrow AB=\frac{144}{6}=24$

16086.Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες. Δίνονται ότι ΓΕ = 4, ΟΔ = 3, ΟΑ = 12, ΟΒ = 6.

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΟΓ και ΔΖ. **(Μονάδες 10)**

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ είναι όμοια. **(Μονάδες 09)**

γ) Αν ΟΓ = 1.5 και ΔΖ = 8, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{AB}$. **(Μονάδες 06)**

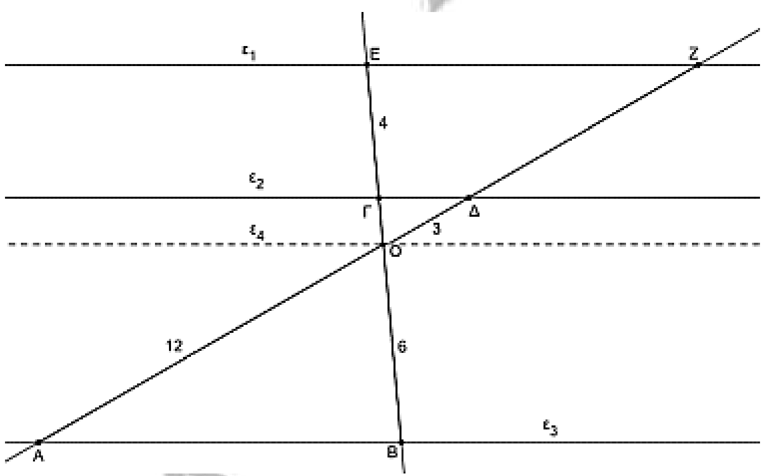


Λύση

α) Φέρνουμε ε_4 // ε_2 που διέρχεται από το Ο. Τότε από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε_2, ε_4, ε_3 που τέμνονται από τις ΓΒ και ΔΑ, έχουμε

$$\frac{OA}{O\Delta} = \frac{OB}{O\Gamma} \Leftrightarrow \frac{12}{3} = \frac{6}{O\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$12O\Gamma = 18 \Leftrightarrow O\Gamma = \frac{3}{2}$$



β) Τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουν:

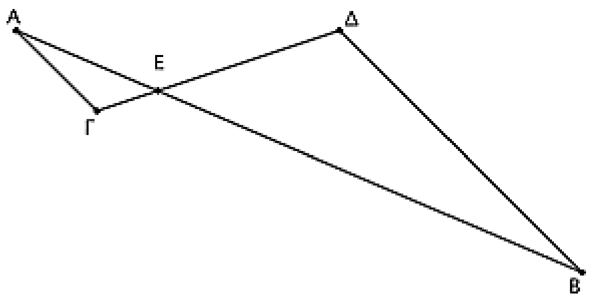
- $EZO = BAO$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΖΑ.
- $ZEO = ABO$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΕΒ.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια επειδή έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουμε:

$$\frac{EZ}{AB} = \frac{OZ}{OA} = \frac{O\Delta + \Delta Z}{OA} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$$

16100.Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι ΑΕ = 5, ΑΓ = 4, ΕΓ = 2, ΔΕ = 6, ΒΕ = 15 και ΒΔ = 12.



α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{ΒΔ}{ΑΓ}, \frac{ΔΕ}{ΕΓ}, \frac{ΒΕ}{ΑΕ}$. **(Μονάδες 9)**

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια. **(Μονάδες 8)**

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΓ και ΒΕΔ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

Α = ..., Γ = ... , ΑΕΓ = ... **(Μονάδες 8)**

Λύση

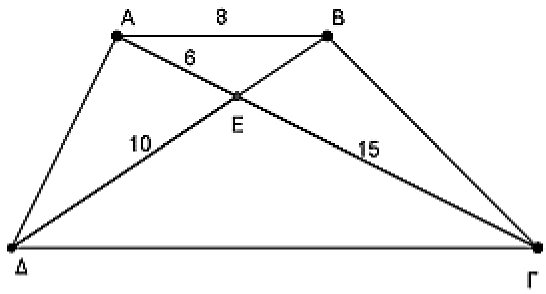
α) $\frac{ΒΔ}{ΑΓ} = \frac{12}{4} = 3,\ \frac{ΔΕ}{ΕΓ} = \frac{6}{2} = 3,\ \frac{ΒΕ}{ΑΕ} = \frac{15}{5} = 3$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

- $Α = Β$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΕΓ και ΔΕ αντίστοιχα
- $Γ = Δ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΕ και ΒΕ αντίστοιχα
- $ΑΕΓ = ΒΕΔ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

16113.Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΔΓ, Ε σημείο τομής των διαγώνιων, ΑΕ = 6, ΑΒ = 8, ΓΕ = 15 και ΔΕ = 10.



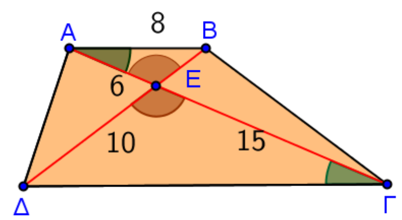
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ είναι όμοια. **(Μονάδες 09)**

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους. **(Μονάδες 09)**

γ) Να υπολογίστε τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ. **(Μονάδες 07)**

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ έχουν :



- $Ε\hat{Α}Β = Α\hat{Γ}Δ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ και
- $Α\hat{Ε}Β = Δ\hat{Ε}Γ$ γιατί είναι κατακορυφήν.

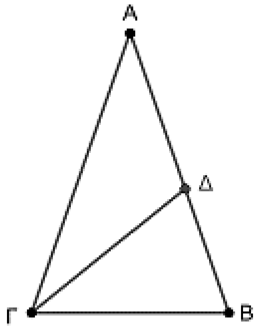
Επομένως τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία και είναι όμοια.

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια είναι: $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{ΒΕ}{ΕΔ} = \frac{ΑΒ}{ΓΔ}$

γ) $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = \frac{ΒΕ}{ΕΔ} = \frac{ΑΒ}{ΓΔ} \Leftrightarrow \frac{6}{15} = \frac{ΒΕ}{10} = \frac{8}{ΓΔ}$ $\frac{6}{15} = \frac{ΒΕ}{10} \Leftrightarrow 15 \cdot ΒΕ = 60 \Leftrightarrow ΒΕ = 4$

$\frac{6}{15} = \frac{8}{ΓΔ} \Leftrightarrow 6 \cdot ΓΔ = 120 \Leftrightarrow ΓΔ = 20$

16126.Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ = 36 και ΒΓ =24.
Το σημείο της Δ πλευράς ΑΒ είναι τέτοιο ώστε ΒΔ = 16.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$.



(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ έχουν:

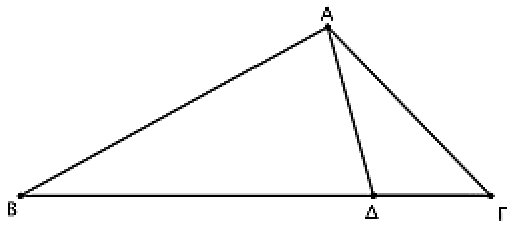
- B κοινή
- $\frac{AB}{\Gamma B}=\frac{B\Gamma}{B\Delta}$ γιατί $\frac{AB}{\Gamma B}=\frac{36}{24}=\frac{3}{2}$ και $\frac{B\Gamma}{B\Delta}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$.

Επομένως είναι όμοια αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία κοινή. Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΒΔ είναι $\frac{3}{2}$.

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ είναι όμοια, θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, οπότε

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{AB}{\Gamma B}\Leftrightarrow\frac{36}{\Gamma\Delta}=\frac{36}{24}\Leftrightarrow\Gamma\Delta=24$$

16755.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΓ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τέτοιο ώστε ΑΓ = 2ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$ και $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια. **(Μονάδες 9)**

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΑΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΒΑΓ = ...,   Β = ... **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}=\frac{2A\Gamma}{A\Gamma}=2$ και $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{2\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta}=2$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ έχουν:

- Γ κοινή και
- $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}=\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}=2$

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

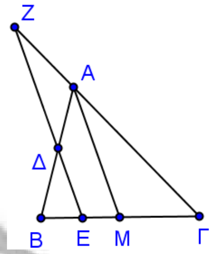
γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:

$BA\Gamma=\Gamma\Delta A$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα και

$B=\Delta A\Gamma$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΓΔ αντίστοιχα.

4ο Θέμα

14499.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{\Delta E}{\dots}=\frac{\dots}{BM}=\frac{B\Delta}{\dots}$ **ii.** $\frac{\dots}{AM}=\frac{\Gamma E}{\dots}=\frac{\dots}{\Gamma A}$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E+EZ=2AM$ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ. (Μονάδες 13)

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΒΑΜ έχουν:

1) $B\hat{\Delta}E=B\hat{A}M$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ//ΑΜ που τέμνονται από την ΑΒ και

2) τη γωνία Β κοινή.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια, οπότε οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή: $\frac{\Delta E}{AM}=\frac{BE}{BM}=\frac{B\Delta}{BA}$

ii. Τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΓΕΖ έχουν:

1) $\Gamma\hat{A}M=\Gamma\hat{Z}E$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΜ//ΕΖ που τέμνονται από την ΑΓ και

2) τη γωνία Γ κοινή.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια, οπότε οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή: $\frac{ZE}{AM}=\frac{\Gamma E}{\Gamma M}=\frac{\Gamma Z}{\Gamma A}$

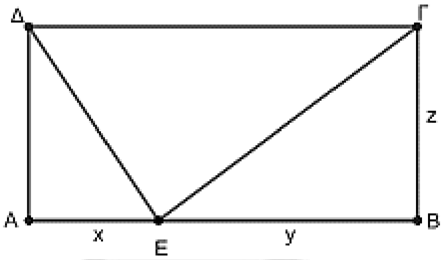
β) Από το α) i. είναι $\frac{\Delta E}{AM}=\frac{BE}{BM}$ και από το α) ii. είναι $\frac{ZE}{AM}=\frac{\Gamma E}{\Gamma M}$, με πρόσθεση κατά μέλη

έχουμε: $\frac{\Delta E}{AM}+\frac{ZE}{AM}=\frac{BE}{BM}+\frac{\Gamma E}{\Gamma M}\overset{BM=\Gamma M}{\Leftrightarrow}\frac{\Delta E+ZE}{AM}=\frac{BE+\Gamma E}{BM}\Leftrightarrow\frac{\Delta E+ZE}{AM}=\frac{\cancel{B\Gamma}}{\frac{\cancel{B\Gamma}}{2}}=2\Leftrightarrow$

$\Delta E+ZE=2AM$

Πυθαγόρειο Θεώρημα

2ο Θέμα



16805.Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι x = 8, y = 16 και z = 12.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 72. Οπότε $2AB+2B\Gamma=72 \Leftrightarrow 2(x+y)+2z=72 \Leftrightarrow$ $x+y+z=36$.

Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, άρα ισχύει $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{x+y+z}{2+4+3}=\frac{36}{9}=4$. Άρα $x=2\cdot 4=8,\ y=4\cdot 4=16$ και $z=3\cdot 4=12$.

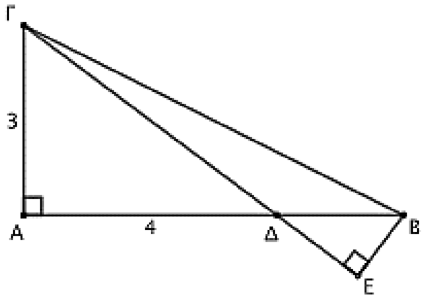
β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΒΕ έχουμε

$\Gamma E^2=y^2+z^2=16^2+12^2=256+144=400 \Leftrightarrow \Gamma E=20$

Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΑΕ για την υποτείνουσα ΔΕ έχουμε

$\Delta E^2=AE^2+\Delta A^2 \Leftrightarrow \Delta E^2=8^2+12^2=208 \Leftrightarrow \Delta E=\sqrt{208}=\sqrt{16\cdot 13}=4\sqrt{13}$

Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΓ ισούται με : $\Delta E+E\Gamma+\Delta\Gamma=4\sqrt{13}+20+(8+16)=44+4\sqrt{13}$



16757.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^\circ$, ΑΒ = 6 και ΑΓ = 3.. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε ΑΔ = 4. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$\Delta\Gamma^2=A\Gamma^2+A\Delta^2=3^2+4^2=25 \Leftrightarrow \Delta\Gamma=5$

β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ έχουν:

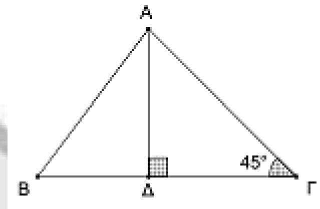
- $A\Delta\Gamma=E\Delta B$ (ως κατακορυφήν) και
- $A=E=90^\circ$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A}=\hat{E}$	$A\hat{\Delta}\Gamma=E\hat{\Delta}B$	$A\hat{\Gamma}\Delta=E\hat{B}\Delta$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΓΔ	ΑΓ	ΑΔ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΔΒ	ΔΒ	ΕΒ	ΕΔ

Επομένως $\frac{A\Gamma}{EB}=\frac{\Gamma\Delta}{\Delta B} \Leftrightarrow \frac{3}{EB}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 5EB=6 \Leftrightarrow EB=\frac{6}{5}$.



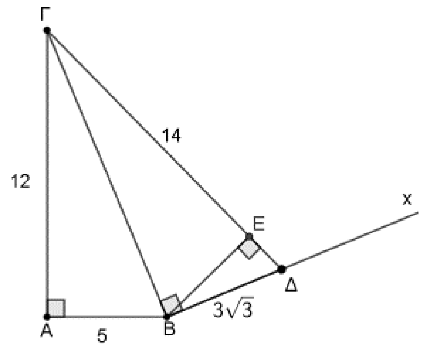
17342.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 7, $\Gamma = 45^\circ$ και ύψος ΑΔ = 4.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. ΓΔ = 4. **(Μονάδες 5)**
ii. $A\Gamma = 4\sqrt{2}$. **(Μονάδες 8)**
β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχει $\Gamma = 45^\circ$, οπότε από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:
$A\Gamma\Delta + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow A\Gamma\Delta = 45^\circ$, επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και είναι $\Gamma\Delta = A\Delta = 4$.

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, είναι:
$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \cdot 4^2 \Leftrightarrow A\Gamma = 4\sqrt{2}$

γ) Είναι $B\Delta = B\Gamma - \Delta\Gamma = 7 - 4 = 3$.Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι:
$AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow AB = 5$



21067.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$, ΑΓ = 12 και ΑΒ = 5.
α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 13.
(Μονάδες 08)
β) Φέρουμε ημιευθεία Βx κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΔΓ = 14, όπως φαίνεται στο σχήμα.
i. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 3\sqrt{3}$.
(Μονάδες 08)
ii. Να υπολογίσετε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ. **(Μονάδες 09)**

Λύση

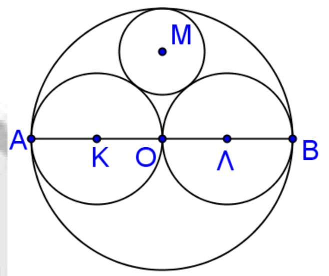
α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Leftrightarrow B\Gamma = 13$

β) i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΔΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:
$B\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27 \Leftrightarrow B\Delta = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

ii. Φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην ΔΓ, οπότε η προβολή του ΒΔ στην ΔΓ είναι η ΔΕ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ ισχύει ότι: $B\Delta^2 = \Delta E \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow 27 = \Delta E \cdot 14 \Leftrightarrow \Delta E = \frac{27}{14}$

4ο Θέμα

14500. **Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ο. Ένας τρίτος κύκλος (Μ, ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων Κ και Λ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.**



α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των κύκλων με κέντρα Κ, Λ, Μ και Ο και στη στήλη Β τα μήκη των διακέντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στη κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες. **(Μονάδες 06)**

Στήλη Α	Στήλη Β
Διάκεντρος	**Μήκος**
1. ΚΛ	**i. R**
2. ΛΜ	**ii. 2R**
3. ΟΜ	**iii. R+ρ**
	iv. 2R-ρ

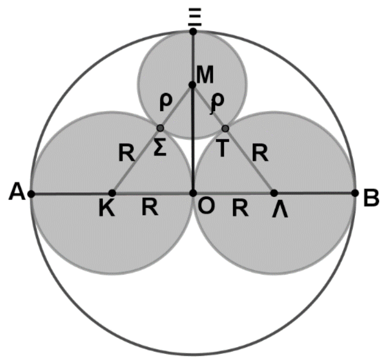
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα ΜΟ είναι το ύψος προς τη βάση του. **(Μονάδες 06)**

γ) Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου Μ ως συνάρτηση του R όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων Κ και Λ. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $1 \to \text{ii},\ 2 \to \text{iii},\ 3 \to \text{iv}$

β) Η διάκεντρος δύο εφαπτόμενων εξωτερικά κύκλων διέρχεται από το σημείο επαφής των 2 κύκλων και ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους, οπότε $ΚΜ = ΚΣ + ΣΜ = R + ρ$ και $ΛΜ = ΛΤ + ΤΜ = R + ρ$



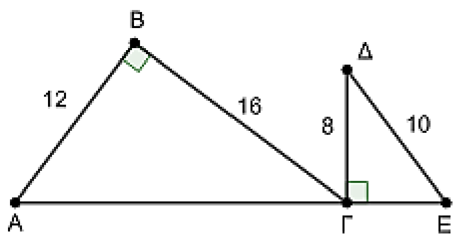
Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές αφού ΚΜ=ΛΜ .
Το Ο είναι το μέσο της πλευράς ΚΛ, άρα η διάμεσος ΜΟ είναι και ύψος,

β) Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΚ έχουμε

$$ΚΜ^2 = ΚΟ^2 + ΜΟ^2 \Leftrightarrow (ρ + R)^2 = R^2 + (2R - ρ)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{ρ^2} + 2R \cdot ρ + \cancel{R^2} = \cancel{R^2} + 4R^2 - 4R \cdot ρ + \cancel{ρ^2} \Leftrightarrow 6\cancel{R} \cdot ρ = 4R^{\cancel{2}} \Leftrightarrow ρ = \frac{2R}{3}$$

16133. **Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα και έχουν μήκη αντίστοιχα και , οι γωνίες και είναι ορθές και τα σημεία και ανήκουν στην ίδια ευθεία.**



α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ. **(Μονάδες 7)**

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια. **(Μονάδες 7)**

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΕΔ είναι το Ζ και ΣΗ είναι το ύψος του τριγώνου ΖΑΕ από την κορυφή του . Να αποδείξετε ότι:

i. ΕΗ = 13, **(Μονάδες 6)**

ii. $ΖΗ = \frac{52}{3}$ **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \Leftrightarrow A\Gamma = 20$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ έχουμε:

$\Gamma E^2 = \Delta E^2 - \Delta\Gamma^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow \Gamma E = 6$

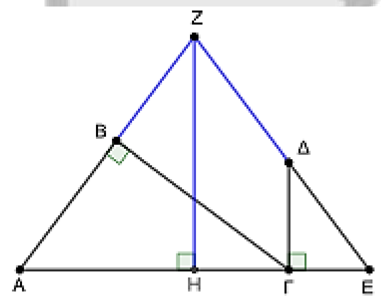
Είναι $AE = A\Gamma + \Gamma E = 20 + 6 = 26$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ έχουν:

$\frac{AB}{\Gamma E} = \frac{12}{6} = 2$, $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{16}{8} = 2$, $\frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{20}{10} = 2$, δηλαδή $\frac{AB}{\Gamma E} = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Delta E} = 2$, οπότε είναι όμοια, αφού έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) i) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια, θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $A = E$, οπότε το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ.

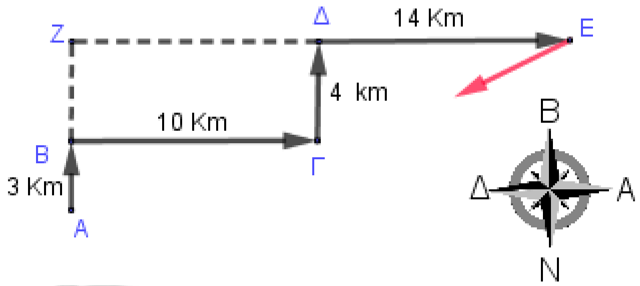
Επειδή το ΖΗ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο Η είναι το μέσο της ΑΕ. Επομένως θα είναι $HE = \frac{AE}{2} = \frac{26}{2} = 13$.



ii) Είναι ΔΓ//ΖΗ γιατί και οι δύο είναι κάθετες στην ΑΕ, οπότε από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΓΔΕ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΗΖΕ, δηλαδή:

$\frac{\Delta\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma E}{HE} \Leftrightarrow \frac{8}{ZH} = \frac{6}{13} \Leftrightarrow 6ZH = 104 \Leftrightarrow ZH = \frac{104}{6} = \frac{52}{3}$

14533.Δυο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίσει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α) i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε;

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. **(Μονάδες 12)**

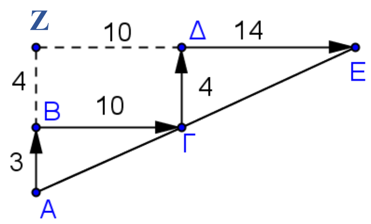
β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. **(Μονάδες 08)**

Λύση

α) i. Το πρώτο κινητό έκανε τη διαδρομή $A \to B \to \Gamma \to \Delta \to E$ οπότε η απόσταση που διένυσε ήταν:

$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E = 3 + 10 + 4 + 14 = 31km$

Το δεύτερο κινητό έκανε τη διαδρομή $A \to Z \to E$ οπότε η απόσταση που διένυσε ήταν: $AZ + ZE = 7 + 24 = 31km$



ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ ($K = 90^o$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$AE^2 = AZ^2 + ZE^2 = (3+4)^2 + (10+14)^2 \Leftrightarrow$

$AE^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 \Leftrightarrow \; AE = \sqrt{625} = 25$

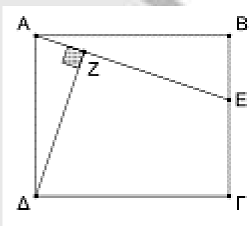
β) Αν τα σημεία Α, Γ και Ε ήταν συνευθειακά θα πρέπει να ισχύει: ΑΓ+ΓΕ=ΑΕ
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($B = 90^o$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 = 3^2 + 10^2 = 9 + 100 = 109 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{109}$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ ($\Delta = 90^o$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$E\Gamma^2 = \Delta E^2 + \Delta\Gamma^2 = 14^2 + 4^2 = 196 + 16 = 212 \Leftrightarrow E\Gamma = \sqrt{212}$

$A\Gamma + \Gamma E = \sqrt{109} + \sqrt{212} \neq 25$ αλλιώς θα είχαμε άρρητο ίσο με ρητό άτοπο.
Επομένως δεν διέρχονται από το σημείο Γ.

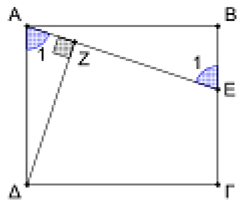


17348.Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με ΑΒ = 6 και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε ΒΕ = 2. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.
α) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$. **(Μονάδες 8)**
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. **(Μονάδες 9)**
γ) Αν ΔΖ = ΖΕ, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε:

$AE^2 = AB^2 + BE^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40 \Leftrightarrow AE = 2\sqrt{10}$



β) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ έχουν:

- $A_1 = E_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ
- $B = Z = 90^\circ$ γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και η ΔΖ κάθετη στην ΑΕ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

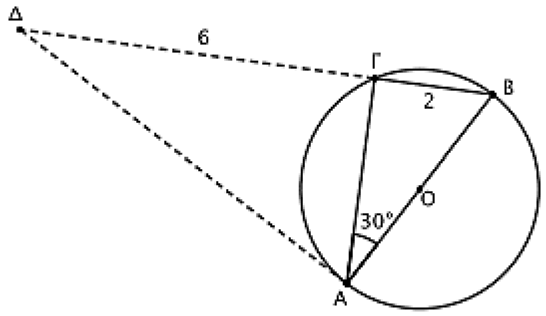
Επομένως ισχύει ότι $\frac{AB}{\Delta Z} = \frac{AE}{A\Delta} = \frac{BE}{AZ} \Leftrightarrow \frac{6}{\Delta Z} = \frac{2\sqrt{10}}{A\Delta} = \frac{2}{AZ}$ (1).

γ) Είναι $\frac{6}{\Delta Z} = \frac{2}{AZ} \Leftrightarrow \frac{6}{\Delta Z} = \frac{2}{AE - ZE} \overset{\Delta Z = ZE}{\Leftrightarrow} \frac{6}{\Delta Z} = \frac{2}{2\sqrt{10} - \Delta Z} \Leftrightarrow 12\sqrt{10} - 6\Delta Z = 2\Delta Z \Leftrightarrow$

$12\sqrt{10} = 8\Delta Z \Leftrightarrow \Delta Z = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. Τότε η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{6}{\frac{3\sqrt{10}}{2}} = \frac{2\sqrt{10}}{A\Delta} \Leftrightarrow 6A\Delta = \frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot 2\sqrt{10} \Leftrightarrow 6A\Delta = 30 \Leftrightarrow A\Delta = 5$$

21149.Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $\hat{ΒΑΓ} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν ΒΓ = 2, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

i. Την ακτίνα R.

ii. Το μήκος της πλευράς ΑΓ. (Μονάδες 16)

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε ΓΔ = 6. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Λύση

α) i. Η γωνία ΒΓΑ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ, οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{ΒΑΓ} = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, δηλαδή $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{2R}{2} \Leftrightarrow R = 2$.

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 - ΒΓ^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \Leftrightarrow ΑΓ = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$ΑΔ^2 = ΑΓ^2 + ΔΓ^2 = 12 + 6^2 = 48 \Leftrightarrow ΑΔ = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΔ. Είναι $ΔΒ^2 = 8^2 = 64$ και $ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = 4^2 + 48 = 64$.

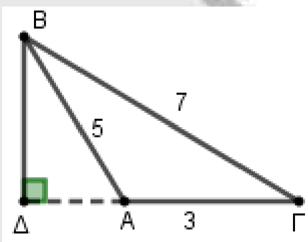
Επειδή $ΔΒ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2$ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $\hat{ΒΑΔ} = 90^\circ$, επομένως το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.

14549. Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι : α=7, β=3 και γ=5.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 12)
β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 49$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 9 + 25 = 34$.

Είναι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.



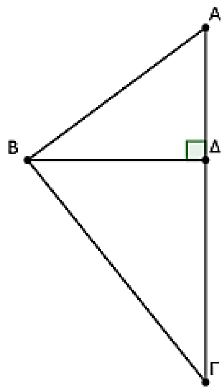
β) Φέρνουμε κάθετη από το Β προς την ΑΓ. Το σημείο τομής Δ της κάθετης και της ΑΓ είναι η προβολή του Β στην ΑΓ, οπότε η ΑΔ είναι η προβολή της ΑΒ στην ΑΓ.
Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow 49 = 25 + 9 + 6A\Delta \Leftrightarrow 49 - 34 = 6A\Delta \Leftrightarrow$$

$$6A\Delta = 15 \Leftrightarrow A\Delta = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

16080.Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5, $B\Gamma = \sqrt{41}$ και ΑΓ = 8.
α) Να σχεδιάσετε την προβολή ΑΔ, της ΑΒ στην ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)
β) Αν ΑΔ = 3, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΒΔ. (Μονάδες 12)

Λύση



α) Φέρουμε το ύψος ΒΔ. Η προβολή της ΑΒ στην ΑΓ είναι η ΑΔ. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την οξεία γωνία Α, έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow \left(\sqrt{41}\right)^2 = 5^2 + 8^2 + 16A\Delta \Leftrightarrow$$

$$16A\Delta = 48 \Leftrightarrow A\Delta = 3$$

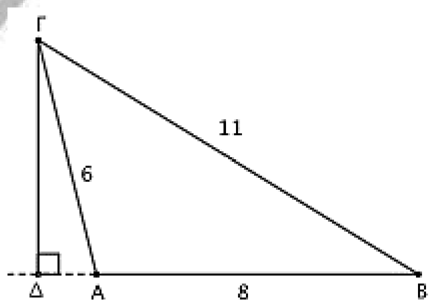
β) Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$AB^2 = B\Delta^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow B\Delta = 4.$$

16101.Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 8, ΑΓ = 6 και ΒΓ = 11.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)
β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $B\Gamma^2 = 11^2 = 121$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$, άρα $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$, οπότε $A > 90^\circ$ και το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.



β) Έστω Δ η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην ΑΒ. Τότε, η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ είναι το τμήμα ΑΔ, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:
Επειδή η γωνία Α είναι αμβλεία, από το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2AB \cdot A\Delta \Leftrightarrow 121 = 64 + 36 + 16A\Delta \Leftrightarrow$$

$$21 = 16A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \frac{21}{16}$$

16804.Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΗ και ΒΘ. α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή την πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα …….

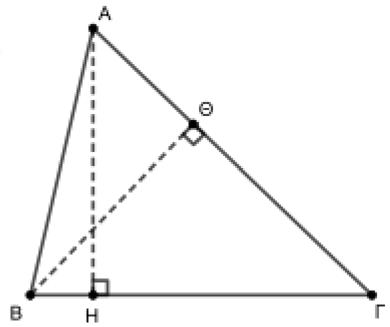
ii. Η προβολή τη πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ......

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….

iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..

v. $A\Gamma^2 = AB^2 + ... - 2B\Gamma \cdot ...$

vi. $B\Gamma^2 = ... + A\Gamma^2 - 2... \cdot A\Theta$



(Μονάδες 15)

β) Αν ΑΒ = 4, ΒΓ=5 και ΑΓ = 6, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ. (Μονάδες 10)

Λύση

α) i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα ΘΓ

ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ΒΗ

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς ΑΓ στην πλευρά ΒΓ

iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ

v. $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma 2 - 2B\Gamma \cdot BH$ **vi.** $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Theta$

β) Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην ΑΓ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΒΓ έχουμε:

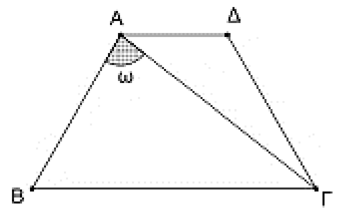
$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot A\Theta \Leftrightarrow 25 = 16 + 36 - 2\cdot 6 \cdot A\Theta \Leftrightarrow 12A\Theta = 27 \Leftrightarrow A\Theta = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}.$$

17343.Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ΑΔ = 3, ΑΒ = ΓΔ = 5, ΒΓ = 8 και $\Delta = 120^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = 7. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\frac{1}{2}$. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 - 2A\Delta \cdot \Gamma\Delta \cdot \sigma\upsilon\nu\Delta = 25 + 9 - 30\sigma\upsilon\nu 120^\circ = 34 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 34 + 15 = 49 \Leftrightarrow A\Gamma = 7.$$

β) Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow 8^2 = 5^2 + 7^2 - 2\cdot 5 \cdot 7\sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow$$

$$64 = 74 - 70\sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow 70\sigma\upsilon\nu\omega = 10 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{7}$$

17354.Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα ύψη του ΔΚ και ΖΙ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….

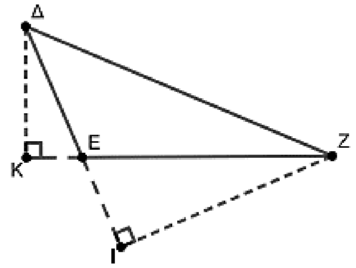
ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..

v. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + ... + 2EZ \cdot ...$

vi. $EZ^2 = ... + \Delta Z^2 - 2... \cdot \Delta I$ **(Μονάδες 15)**



β) Αν ΔΕ = 2, ΕΖ = 4 και ΔΖ = 5, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ. (Μονάδες 10)

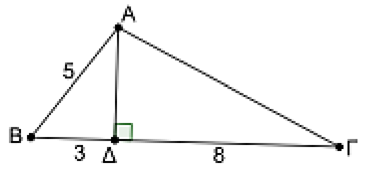
Λύση

α) i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα ΚΕ .
ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα ΚΖ .
iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ.
iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ΕΖ στην πλευρά ΔΕ .
v. $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + EZ^2 + 2EZ \cdot KE$
vi. $EZ^2 = \Delta E^2 + \Delta Z^2 - 2\Delta E \cdot \Delta I$

β) Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΕΖ έχουμε:

$$EZ^2 = \Delta E^2 + \Delta Z^2 - 2\Delta E \cdot \Delta I \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot \Delta I \Leftrightarrow 16 = 29 - 4\Delta I \Leftrightarrow 4\Delta I = 13 \Leftrightarrow \Delta I = \frac{13}{4}$$

21302.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν ΒΔ = 3 και ΓΔ = 8 να αποδείξετε ότι:



α) ΑΔ = 4. **(Μονάδες 07)**
β) $A\Gamma = \sqrt{80}$. **(Μονάδες 08)**
γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. **(Μονάδες 10)**

Λύση

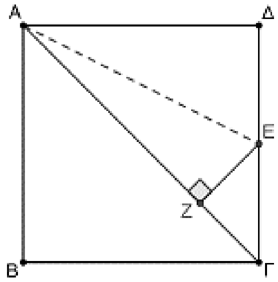
α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:
$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow A\Delta = 4$$

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:
$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = 4^2 + 8 = 16 + 64 = 80 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

γ) Είναι $B\Gamma^2 = (3+8)^2 = 11^2 = 121$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 5^2 + \left(\sqrt{80}\right)^2 = 25 + 80 = 105$.

Είναι $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$ επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

3ο Θέμα



21102.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{A\Gamma} = \alpha\sqrt{2}$. **(Μονάδες 09)**

ii. $\mathrm{AE} = \alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **(Μονάδες 09)**

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ.

(Μονάδες 07)

Λύση

α) i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ:

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + \Delta\Gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} = \alpha\sqrt{2}.$$

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ:

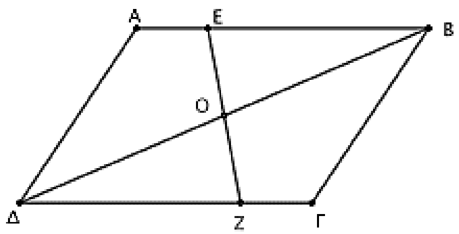
$$\mathrm{AE}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + \Delta\mathrm{E}^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \mathrm{AE} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$$

β) Η προβολή του ΑΕ στην ΑΓ είναι το τμήμα ΑΖ. Η γωνία $\mathrm{Z\hat{A}E}$ είναι οξεία γωνία επειδή οι πλευρές της περιέχονται στην ορθή γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Delta}$ του τετραγώνου.

Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΕΓ:

$$\mathrm{E\Gamma}^2 = \mathrm{AE}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{AZ} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\alpha\sqrt{2}\cdot\mathrm{AZ} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4} + 2\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{2}\cdot\mathrm{AZ} \Leftrightarrow \alpha^2 = 5\alpha^2 + 8\alpha^2 - 8\alpha\sqrt{2}\cdot\mathrm{AZ} \Leftrightarrow 8\alpha\sqrt{2}\cdot\mathrm{AZ} = 12\alpha^2 \Leftrightarrow \mathrm{AZ} = \frac{12\alpha^2}{8\alpha\sqrt{2}} = \frac{3\alpha\sqrt{2}}{4}.$$



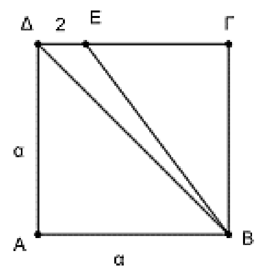
16102.Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το κέντρο Ο φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ όπως φαίνεται στο σχήμα.
Να αποδείξετε ότι:
α) (ΔΟΖ) = (ΒΟΕ). **(Μονάδες 10)**
β) (ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ). **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ είναι ίσα διότι έχουν:
- ΔΟ=ΒΟ (το Ο είναι μέσο της ΔΒ)
- $Z\Delta O = EBO$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ τεμνόμενων από τη ΒΔ)
- $\Delta OZ = BOE$ (ως κατακορυφήν)

Επομένως, τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ θα είναι και ισοδύναμα, δηλαδή (ΔΟΖ) = (ΒΟΕ).

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΒΔ είναι ίσα, οπότε έχουν και το ίδιο εμβαδό, δηλαδή (ΑΔΒ) = (ΓΒΔ)
Από το σχήμα έχουμε ότι
(ΑΔΒ) = (ΔΟΕΑ) + (ΒΟΕ) και (ΓΒΔ) = (ΒΓΖΟ) + (ΔΟΖ)
Οπότε, είναι: (ΔΟΕΑ) + (ΒΟΕ) = (ΒΓΖΟ) + (ΔΟΖ)
Αφού (ΒΟΕ) = (ΔΟΖ), τότε είναι (ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ).



16817.Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε ΔΕ = 2. Αν γνωρίζουμε ότι: $(B E\Delta)=\dfrac{(AB\Gamma\Delta)}{8}$ τότε:
α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8. **(Μονάδες 13)**
β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Είναι $(BE\Delta)=\dfrac{1}{2}\Delta E\cdot B\Gamma=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot \alpha=\alpha$ και $(AB\Gamma\Delta)=\alpha^2$, οπότε:

$$(BE\Delta)=\frac{(AB\Gamma\Delta)}{8}\Leftrightarrow \alpha=\frac{\alpha^2}{8}\Leftrightarrow 8\alpha=\alpha^2\Leftrightarrow 8\alpha-\alpha^2=0\Leftrightarrow \alpha(8-\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha=0 \text{ απορρίπτεται ή } \alpha=8.$$

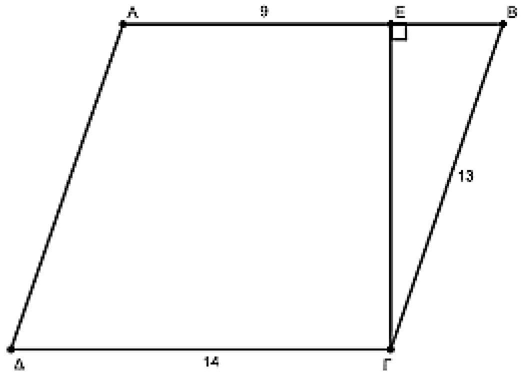
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$BE^2=B\Gamma^2+E\Gamma^2=8^2+6^2=64+36=100\Leftrightarrow BE=10$

18560.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. **(Μονάδες 13)**
β) Να υπολογίσετε το εμβαδό
i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Φέρουμε ΓΕ⊥ΑΒ.

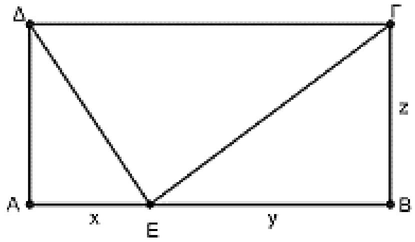
ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Για το τμήμα ΒΕ έχουμε:
$BE = AB - AE = 14 - 9 = 5$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$\Gamma E^2 = \Gamma B^2 - BE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow \Gamma E = 12$



β) i. Το μήκος ΓΕ είναι η απόσταση των απέναντι πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
Άρα $(AB\Gamma\Delta) = A\,B \cdot \Gamma\,E = 14 \cdot 12 = 168$ τ.μ.

ii. Το τραπέζιο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο και οι βάσεις του είναι οι ΑΕ και ΓΔ. Άρα
$$(AE\Gamma\Delta) = \frac{(AE + \Gamma\Delta)\cdot \Gamma E}{2} = \frac{(9+14)\cdot 12}{2} = 23 \cdot 6 = 138 \text{ τ.μ.}$$

18550.Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 36 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι x = 4, y = 8 και z = 6.
(Μονάδες 13)
β) i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ.
ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΕ προς το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. **(Μονάδες 12)**



Λύση

α) Επειδή η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 36, έχουμε:
$36 = 2AB + 2B\Gamma = 2z + 2x + 2y \Leftrightarrow x + y + z = 18 \ (1)$

Επειδή τα μήκη x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, ισχύει ότι $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$.

Όμως $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} \overset{(1)}{=} \frac{18}{9} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \\ \frac{y}{4} = 2 \Leftrightarrow y = 8 \\ \frac{z}{3} = 2 \Leftrightarrow z = 6 \end{cases}$.

β) i. Είναι $(\Gamma E\Delta) = (AB\Gamma\Delta) - (A\Delta E) - (EB\Gamma) = AB \cdot B\Gamma - \frac{1}{2}AE \cdot A\Delta - \frac{1}{2}EB \cdot B\Gamma \Leftrightarrow$

$(\Gamma E\Delta) = 12 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 72 - 12 - 24 = 36$

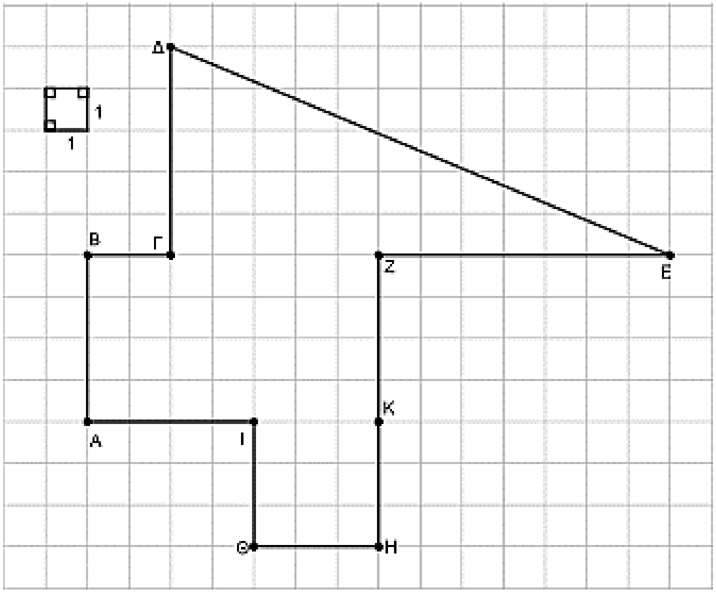
ii. $\frac{(\Gamma E\Delta)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$

18558.Στο παρακάτω σχήμα:

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ. **(Μονάδες 10)**

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΑ.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Φέρουμε το τμήμα ΓΖ, το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο με ΔΓ= 5 και ΓΕ=12. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημά έχουμε:

$\Delta E^2 = \Delta\Gamma^2 + \Gamma E^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Leftrightarrow \Delta E = 13$

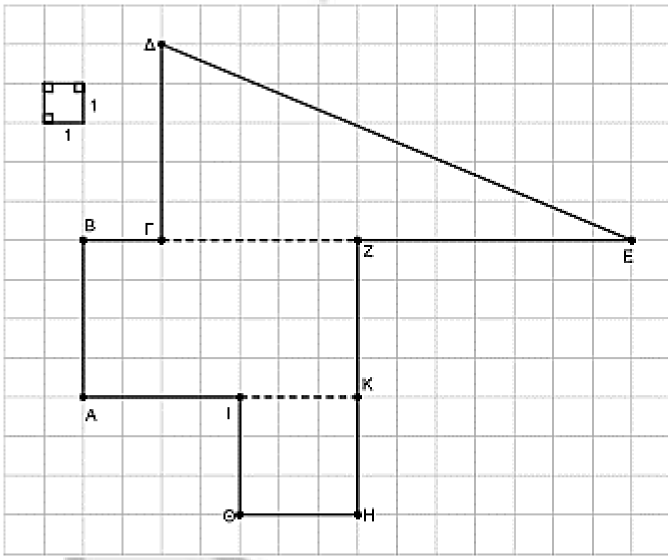
β) Το χωρίο αποτελείται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ, το ορθογώνιο ΒΖΚΑ και το τετράγωνο ΚΗΘΙ. Υπολογίζουμε τα εμβαδά τους ξεχωριστά.

$(\Delta\Gamma E) = \frac{1}{2}\Gamma E \cdot \Delta\Gamma = \frac{1}{2}12 \cdot 5 = 30$

$(BZKA) = BZ \cdot AB = 7 \cdot 4 = 28$

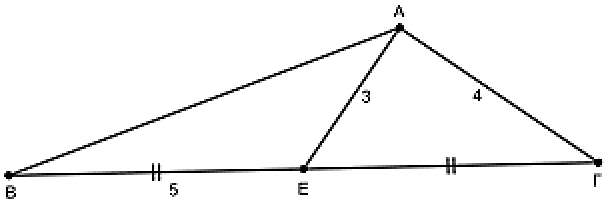
$(KH\Theta I) = 3^2 = 9$

Είναι



$(AB\Gamma\Delta EZH\Theta I) = (\Delta\Gamma E) + (BZKA) + (KH\Theta I) = 30 + 28 + 9 = 67$

18559.Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ έχει μήκος 3 και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με 4. Αν ΒΕ=5, τότε:



α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΕ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΓ. (Μονάδες 10)
β) i. Να δικαιολογήσετε γιατί (ΑΒΕ)=(ΑΓΕ). (Μονάδες 05)
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Το τμήμα ΒΕ είναι το μισό της πλευράς ΒΓ, αφού η ΑΕ είναι διάμεσος στην πλευρά ΒΓ, άρα ΕΓ=5.
Στο τρίγωνο ΑΓΕ μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΓΕ, οπότε
$ΕΓ^2 = ΑΕ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + 16$ ισχύει, άρα το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο με $ΕΑΓ = 90^\circ$, οπότε $ΑΕ \perp ΑΓ$.

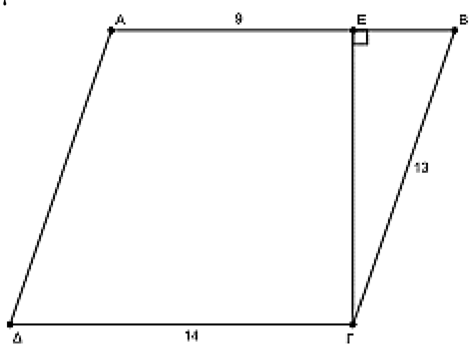
β) i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, άρα (ΑΒΕ) = (ΑΓΕ)

ii. Είναι $(ΑΓΕ) = \frac{1}{2}ΑΓ \cdot ΑΕ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$, οπότε $(ΑΒΓ) = (ΑΓΕ) + (ΑΕΒ) = 2(ΑΓΕ) = 12$.

18560.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 13)
β) Να υπολογίσετε το εμβαδό
i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ. (Μονάδες 12)

Λύση

Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Φέρουμε ΓΕ⊥ΑΒ.



α) Είναι ΒΕ = ΑΒ – ΑΕ = 14 – 9 = 5.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$ΕΓ^2 = ΓΒ^2 - ΒΕ^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow ΕΓ = 12$

β) i. Το μήκος ΓΕ είναι η απόσταση των απέναντι πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
Άρα (ΑΒΓΔ)= Α Β· Γ Ε = 1 4 ·1 =168

ii) $(ΑΕΓΔ) = \frac{(ΑΕ + ΓΔ) \cdot ΓΕ}{2} = \frac{(9 + 14) \cdot 12}{2} = 23 \cdot 6 = 138$

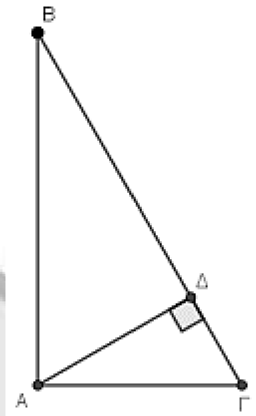
21101.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $ΒΓ = \sqrt{3}$, $ΑΒ = \sqrt{2}$, $ΑΓ = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $Α = 90^\circ$. (Μονάδες 09)
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)
γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 09)

Λύση

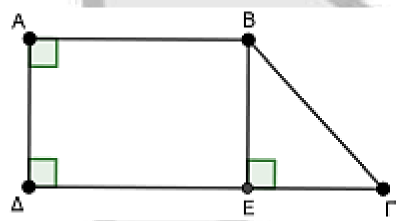
α) Είναι $ΒΓ^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$, δηλαδή $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $Α = 90^\circ$.

β) $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΑΓ=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{2}}{2}$



γ) Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου μπορεί να δοθεί και από τον τύπο $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}ΒΓ\cdot ΑΔ$, άρα $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot ΑΔ \Leftrightarrow ΑΔ=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

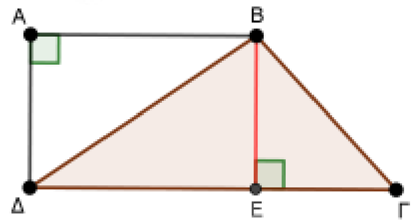
21823.Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, με $Α=Δ=90^\circ$ και ΑΔ = 4, ΑΒ = 5, Δ Γ= 8. Από την κορυφή Β του τραπεζίου, φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην πλευρά ΔΓ.



α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΓ. (Μονάδες 8)
β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ του τραπεζίου. (Μονάδες 9)
γ) Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(ΒΔΓ)}{(ΑΒΓΔ)}$. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο (έχει τρείς γωνίες ορθές), οπότε ΒΕ = ΑΔ = 4 και ΔΕ = ΑΒ = 5. Άρα η ΕΓ = ΔΓ – ΔΕ = 8 – 5 = 3.

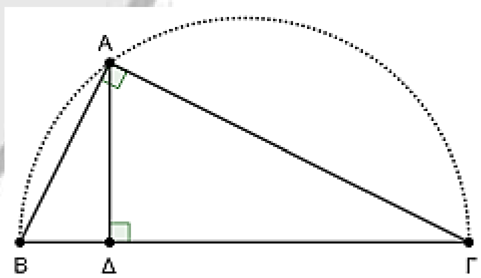


β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$ΒΓ^2=ΒΕ^2+ΕΓ^2=4^2+3^2=16+9=25 \Leftrightarrow ΒΓ=5$

γ) Είναι $(ΒΔΓ)=\frac{1}{2}ΔΓ\cdot ΒΕ=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4=16$ και $(ΑΒΓΔ)=\frac{(ΑΒ+ΓΔ)\cdot ΑΔ}{2}=\frac{(5+8)\cdot 4}{2}=26$, άρα $\frac{(ΒΔΓ)}{(ΑΒΓΔ)}=\frac{16}{26}=\frac{8}{13}$.

4ο Θέμα

16135.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 10 και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής Α στην ΒΓ.
α) Αν ΔΒ = 2 να υπολογίσετε:
i. το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ, (Μονάδες 7)
ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)
β) Υποθέστε ότι το σημείο Α κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ.
i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ) = 5ΑΔ. (Μονάδες 7)
ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για όλες τις θέσεις του Α πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δεν υπερβαίνει το 25».
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

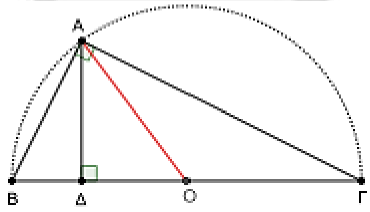


Λύση

α) i. Είναι ΔΒ = 2 οπότε ΔΓ = ΒΓ – ΔΒ = 8. Όμως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. Επομένως $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ = 2 \cdot 8 = 16 \Leftrightarrow ΑΔ = 4$.

ii. $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$

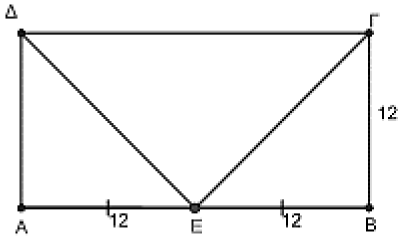
β) i. Καθώς το σημείο Α κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ, η βάση του τριγώνου ΒΓ παραμένει σταθερή και ίση με 10, ενώ το αντίστοιχο ύψος ΑΔ μεταβάλλεται. Επομένως μεταβάλλεται και το εμβαδόν του τριγώνου , το οποίο θα είναι $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot 10ΑΔ = 5ΑΔ$



ii. Έστω Ο το κέντρο του κύκλου με διάμετρο τη ΒΓ.
Είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ =5.
Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το Ο τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΟ είναι $ΑΔ < ΑΟ \Leftrightarrow ΑΔ < 5 \Leftrightarrow 5ΑΔ < 25 \Leftrightarrow (ΑΒΓ) < 25$.
Αν το Δ ταυτίζεται με το Ο τότε ΑΔ=ΟΑ=5 και $5ΑΔ = 25 \Leftrightarrow (ΑΒΓ) = 25$.
Επομένως σε κάθε περίπτωση $(ΑΒΓ) \le 25$ και ο ισχυρισμός είναι αληθής.

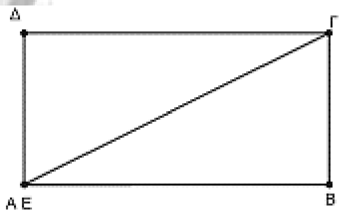
16807.Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ = 24, ΒΓ = 12 και σημείο Ε στην ευθεία ΑΒ.
α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ όταν :
i. Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ.
ii. Το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου. (Μονάδες 16)
β) Αφήνουμε το σημείο Ε να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β.
i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ αυξάνεται ή μειώνεται. (Μονάδες 05)
ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ στο ερώτημα β)i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 04)

Λύση



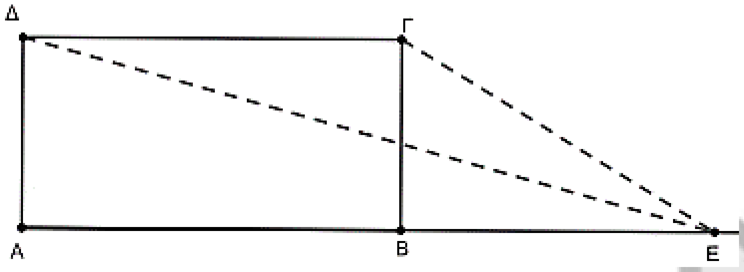
α) i. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια με καθεμιά από τις κάθετες πλευρές τους 12. Οπότε είναι ίσα και ισχύει ΓΕ = ΔΕ.
Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει
$ΓΕ^2 = ΔΕ^2 = 12^2 + 12^2 = 2 \cdot 12^2 \Leftrightarrow ΓΕ = ΔΕ = 12\sqrt{2}$.
Η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ είναι ίση με
$24 + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24 + 2412\sqrt{2} = 24(1+\sqrt{2})$

$(ΓΕΔ) = \frac{1}{2} ΔΓ \cdot ΒΓ = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 = 144$



ii. Αν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου τότε το τρίγωνο ΓΕΔ ταυτίζεται με το τρίγωνο ΓΑΔ. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με ΓΑ + ΑΔ + ΔΓ (1).
Για την πλευρά ΓΑ που είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε
$ΓΑ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 24^2 + 12^2 = (2 \cdot 12)^2 + 12^2 = 4 \cdot 12^2 + 12^2 = 5 \cdot 12^2 \Leftrightarrow$
$ΓΑ = 12\sqrt{5}$
Το εμβαδό του τριγώνου όταν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α ισούται με το εμβαδό του τριγώνου ΓΑΔ που είναι ίσο με $\frac{ΔΓ \cdot ΑΔ}{2} = 144$.

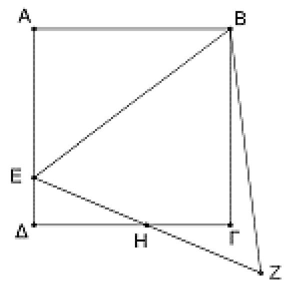
β)



i. Αν το σημείο Ε κινηθεί πάνω στη ευθεία ΑΒ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΓ τότε η πλευρά ΔΓ παραμένει σταθερή αλλά οι δυο άλλες πλευρές του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται. Αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση της ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β, τα πλάγια τμήματα ΓΕ και ΔΕ συνεχώς μεγαλώνουν, αφού το ίχνος τους Ε απέχει ολοένα και περισσότερο από τα ίχνη Β και Α των κάθετων τμημάτων ΓΒ και ΔΑ αντίστοιχα. Οπότε η περίμετρος η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλεται και συνεχώς αυξάνεται.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ, θα πάρουμε ως βάση τη σταθερή πλευρά του ΔΓ, οπότε το ύψος του προς τη ΔΓ ισούται με την απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που είναι σταθερή και ίση με 12. Το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ σε οποιαδήποτε θέση της κορυφής Ε πάνω στην ευθεία ΑΒ είναι ίσο με :
$\frac{24\cdot 12}{2}=144$.
Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: (ΑΒΓΔ) = 24 · 12 = 288, άρα
$(\Gamma E\Delta)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.
Συμπερασματικά αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β απομακρυνόμενο από το σημείο Β, οι πλευρές ΓΕ και ΔΕ του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται, η περίμετρος μεταβάλλεται (αυξάνεται) όπως έχει προκύψει στο βi) αλλά το εμβαδό του τριγώνου μένει σταθερό και ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.

17349.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3 και σημείο Ε της πλευράς ΑΔ, ώστε $AE=4-\sqrt{3}$. το ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία ΒΕ και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΕΖ. Οι ΓΔ και ΕΖ τέμνονται στο σημείο Η και $\Delta H=\sqrt{3}$.



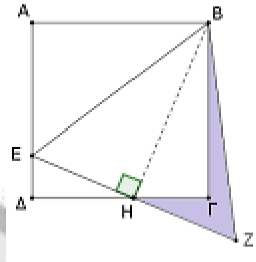
α) Να αποδείξετε ότι $BE=2\sqrt{7-2\sqrt{3}}$. **(Μονάδες 8)**
β) Να αποδείξετε το Η είναι το μέσο της ΕΖ. **(Μονάδες 8)**
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.
(Μονάδες 9)

Λύση

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι
$$BE^2=AB^2+AE^2=3^2+\left(4-\sqrt{3}\right)^2=9+16-8\sqrt{3}+3=28-8\sqrt{3}=4\left(7-2\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow BE=2\sqrt{7-2\sqrt{3}}\quad (1)$$

β) Είναι $\Delta E=A\Delta-AE=3-4+\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$.
Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε ότι
$$EH^2=E\Delta^2+\Delta H^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=3-2\sqrt{3}+1+3=7-2\sqrt{3}\Leftrightarrow EH=\sqrt{7-2\sqrt{3}}\quad (2)$$
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $EH=\frac{EB}{2}$. Όμως ΕΒ=ΕΖ γιατί το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισόπλευρο, άρα

$EH = \frac{EZ}{2}$, οπότε το Η είναι μέσο του ΕΖ.

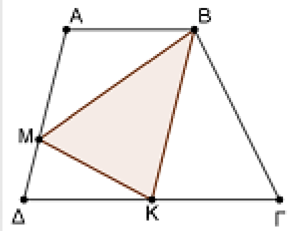


γ) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με τη διαφορά του εμβαδού του τριγώνου ΒΓΗ από το τρίγωνο ΒΖΗ, δηλαδή (ΒΖΗ) − (ΒΓΗ).

Άρα $(BZH)-(B\Gamma H)=\frac{BE^2\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}B\Gamma\cdot BH \Leftrightarrow$

$$(BZH)-(B\Gamma H)=\frac{4\left(7-2\sqrt{3}\right)}{4}-\frac{1}{2}3\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)=...=\frac{10\sqrt{3}-15}{2}$$

18173.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΓΔ = 2ΑΒ. Δίνεται επίσης ότι το σημείο Κ είναι μέσο της ΓΔ και Μ τυχαίο σημείο στην ΑΔ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(BK\Gamma)=\frac{1}{2}(ABK\Delta)$. **(Μονάδες 09)**

ii. (ΒΜΚ) = (ΒΚΓ) **(Μονάδες 09)**

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο Μ κινείται πάνω στο εσωτερικό της ΑΔ, τότε ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓΔ) και (ΜΒΚ) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας. **(Μονάδες 07)**

Λύση

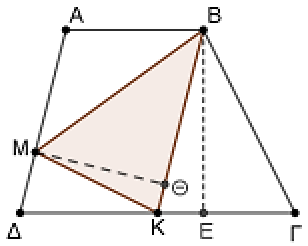
α) Επειδή ΓΔ = 2ΑΒ και Κ μέσο της ΓΔ, θα έχουμε ΑΒ =//ΔΚ, οπότε το ΑΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο και ΒΚ=//ΑΔ.

i. Φέρουμε την ΒΕ κάθετη στην ΓΔ. Τότε το ΒΕ είναι ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΒΚΓ αλλά και του παραλληλογράμμου ΑΒΚΔ.

(ΑΒΚΔ) = ΔΚ·ΒΕ και $(BK\Gamma)=\frac{K\Gamma\cdot BE}{2}$. Όμως επειδή το Κ είναι μέσο της ΔΓ, έχουμε ΔΚ = ΚΓ.

Έτσι έχουμε $(BK\Gamma)=\frac{\Delta K\cdot BE}{2}=\frac{(ABK\Delta)}{2}$.

ii. Φέρουμε το ύψος ΜΘ του τριγώνου ΒΜΚ.



Είναι $(BMK)=\frac{BK\cdot M\Theta}{2}=\frac{(ABK\Delta)}{2}$,άρα (ΒΚΓ) = (ΒΜΚ).

β) Από το α.ii) έχουμε ότι 2(ΒΜΚ) = (ΑΒΚΔ) και (ΒΜΚ) = (ΒΚΓ).
Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε 3(ΒΜΚ)= (ΑΒΚΔ) + (ΒΚΓ) = (ΑΒΓΔ),

δηλαδή $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(BMK)}=3$.Άρα, η πρόταση είναι σωστή.

Ο λόγος των εμβαδών είναι σταθερός και ίσος με 3.

18553.Δίνεται τετράγωνο με πλευρά α και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ = ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α:

i. Το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς ΣΓ του τριγώνου ΣΔΓ. **(Μονάδες 10)**

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ΄ στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ΄ > ΒΣ. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

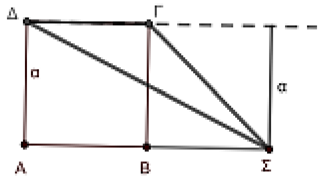
i. Το εμβαδό του τριγώνου Σ΄ΔΓ με το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.

ii. Το μήκος της πλευράς Σ΄Γ με το μήκος της πλευράς ΣΓ των τριγώνων Σ΄ΔΓ και ΣΔΓ αντίστοιχα.

iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες ΣΓ και Σ΄Γ. **(Μονάδες 15)**

Λύση

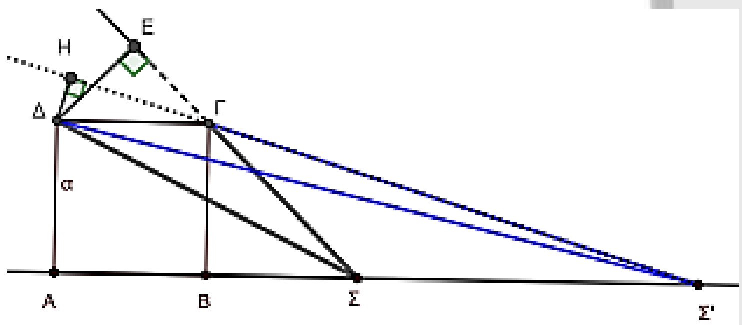
α) i. Για να υπολογίσουμε το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ μπορούμε να πάρουμε ως βάση την πλευρά ΔΓ, οπότε το ύψος είναι η απόσταση της κορυφής Σ από την ευθεία ΔΓ που είναι ίση με α. Άρα $(\Sigma\Delta\Gamma)=\frac{1}{2}\alpha\cdot\alpha=\frac{\alpha^2}{2}$.



ii. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΣΒΓ έχουμε:

$\Sigma\Gamma^2=\Sigma B^2+B\Gamma^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2 \Leftrightarrow \Sigma\Gamma=\alpha\sqrt{2}$

β)



i. Τα τρίγωνα Σ΄ΔΓ και ΣΔΓ έχουν κοινή βάση τη ΔΓ και ύψος ίσο με την απόσταση των παραλλήλων πλευρών ΑΒ και ΔΓ, αφού οι κορυφές τους Σ και Σ΄ βρίσκονται στην ευθεία ΑΒ // ΔΓ. Οπότε τα τρίγωνα αυτά έχουν και ίσα εμβαδά. $(\Sigma'\Delta\Gamma)=(\Sigma\Delta\Gamma)=\frac{\alpha^2}{2}$.

ii. Από το σημείο Γ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΒ προς την ευθεία ΑΒ και τα πλάγια ΓΣ και ΓΣ΄. Τα ίχνη Σ και Σ΄ των πλάγιων τμημάτων ΓΣ και ΓΣ΄ αντίστοιχα είναι τέτοια ώστε οι αποστάσεις τους από το ίχνος Β του κάθετου ΓΒ να είναι άνισες και συγκεκριμένα ΒΣ΄ > ΒΣ, οπότε και τα αντίστοιχα πλάγια είναι ομοίως άνισα δηλαδή ΓΣ΄ > ΓΣ.

iii. Η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΕ και η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ'Γ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΗ.

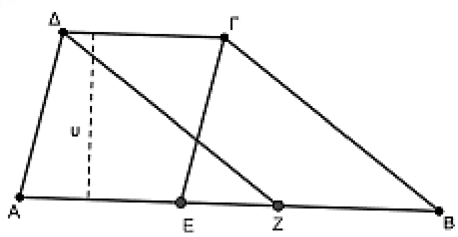
Είναι $(\Sigma'\Delta\Gamma)=\frac{1}{2}\Sigma'\Gamma\cdot\Delta H$ και $(\Sigma\Delta\Gamma)=\frac{1}{2}\Sigma\Gamma\cdot\Delta E$, οπότε:

$(\Sigma'\Delta\Gamma)=(\Sigma\Delta\Gamma)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\Sigma'\Gamma\cdot\Delta H=\frac{1}{2}\Sigma\Gamma\cdot\Delta E \Leftrightarrow \Sigma'\Gamma\cdot\Delta H=\Sigma\Gamma\cdot\Delta E \Leftrightarrow \frac{\Sigma'\Gamma}{\Sigma\Gamma}=\frac{\Delta E}{\Delta H}$ και επειδή Σ΄Γ > ΣΓ θα έχουμε ΔΕ > ΔΗ. Δηλαδή η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ΄Γ είναι μικρότερη από την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ.

18557.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ, ώστε ΑΒ > ΓΔ. Από τις κορυφές Γ κα Δ φέρουμε ΓΕ//ΑΔ και ΔΖ//ΓΒ, με Ε και Ζ σημεία στην πλευρά ΑΒ του τραπεζίου.
α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ. (Μονάδες 9)
β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)
γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά; (Μονάδες 8)

Λύση

α) Τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν τις απέναντι πλευρές τους ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμα.
Για τα εμβαδά τους έχουμε : (ΑΔΓΕ) = ΔΓ · υ (1), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου ή αλλιώς η απόσταση των βάσεων του. (ΒΓΔΖ) = ΔΓ · υ (2), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ είναι ισεμβαδικά.



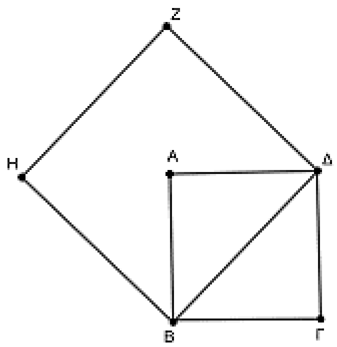
β) Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ έχει περίμετρο
Π_1 = ΑΔ + ΔΓ + ΓΕ + ΕΑ, αλλά οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες αφού είναι παραλληλόγραμμο, οπότε Π_1 = 2 · ΑΔ + 2 · ΔΓ.
Το τετράπλευρο ΒΓΔΖ είναι επίσης παραλληλόγραμμο οπότε έχει περίμετρο
Π_2 = ΒΓ + ΔΓ + ΔΖ + ΖΒ = 2 · ΒΓ + 2 · ΔΓ

γ) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν ίσα εμβαδά ανεξάρτητα από τη μορφή που έχει το αρχικό τραπέζιο. Για να έχουν και ίσες περιμέτρους θα πρέπει ΑΔ = ΒΓ, δηλαδή το αρχικό τραπέζιο να έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες, οπότε το τραπέζιο ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές.

18562.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.
α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του.
(Μονάδες 05)
β) i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ. (Μονάδες 07)
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)
γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιεγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμα πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 05)

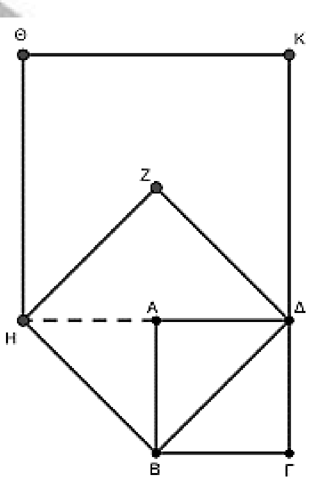
Λύση

α) Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:
$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow B\Delta = \alpha\sqrt{2}$
Για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, έχουμε: $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2$.



β) i. Τα τμήματα ΔΑ και ΒΑ είναι κάθετα μεταξύ τους ως πλευρές του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. Είναι $B\Delta A = 45^\circ$ και $BZ\Delta = 90^\circ$, άρα $A\Delta Z = 45^\circ$. Δηλαδή το τμήμα ΔΑ διχοτομεί τη γωνία Δ του τετραγώνου, άρα το ΔΑ ανήκει στη διαγώνιο του τετραγώνου ΒΔΖΗ.
Ομοίως η ΒΑ διχοτομεί τη γωνία Β του τετραγώνου ΒΔΖΗ και το ΒΑ ανήκει στην άλλη διαγώνιο του.
Οι δύο διαγώνιες του τετραγώνου ΒΔΖΗ τέμνονται στο σημείο Α, δηλαδή το Α είναι το κέντρο του.

ii. Είναι $(B\Delta ZH) = B\Delta^2 = \left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 = 2\alpha^2 = 2(AB\Gamma\Delta)$



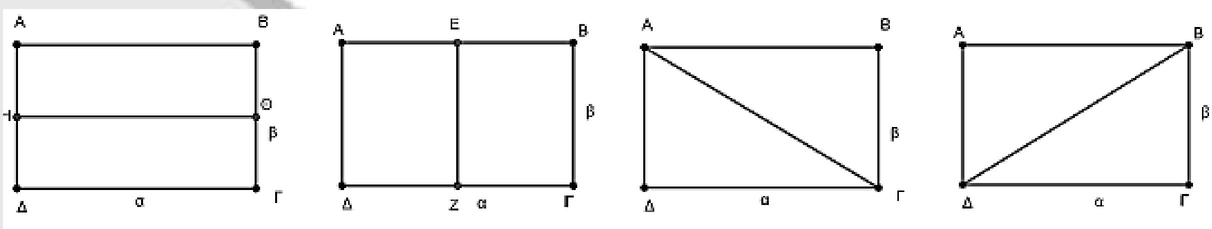
γ) Στο τετράγωνο ΒΔΖΗ η πλευρά του ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ επομένως η διαγώνιός του ΔΗ , σύμφωνα με το α) ερώτημα, κα είναι ίση με $\alpha\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2\alpha$. Επομένως η πλευρά του τετραγώνου ΔΗΘΚ είναι 2α, οπότε $(\Delta H\Theta K) = 4\alpha^2$.
Συγκρίνοντας το εμβαδό του τετραγώνου ΔΗΘΚ με το εμβαδό του ΒΔΖΗ παρατηρούμε ότι (ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ), όπως και (ΒΔΖΗ) = 2(ΑΒΓΔ). Επομένως (ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ) = 4(ΑΒΓΔ).
Δηλαδή, σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, το νέο τετράγωνο έχει διπλάσιο εμβαδό από το προηγούμενο του. Το αρχικό τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με α, έχει εμβαδό α^2, το ΒΔΖΗ έχει

εμβαδό $2\alpha^2$, το ΔΗΘΚ έχει εμβαδό $4\alpha^2$.
Σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο του ΔΗΘΚ θα προκύψει τετράγωνο με εμβαδό $8\alpha^2$. Επομένως για να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, θα πρέπει να κάνουμε τη διαδικασία αυτή συνολικά τέσσερις φορές. Δηλαδή, μετά το τετράγωνο ΔΗΘΚ του σχήματος θα χρειαστεί να φτιάξουμε, όπως περιεγράφηκε, δύο ακόμη τετράγωνα.

18564.Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.
α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας. (Μονάδες 10)
β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που κα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.
i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου. (Μονάδες 08)
ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

Λύση

α)



1η περίπτωση 2η περίπτωση 3η περίπτωση 4η περίπτωση

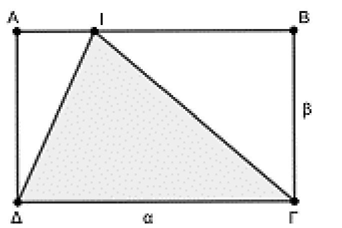
Κάποιοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να χωριστεί ένα ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι είτε φέροντας τις μεσοπαράλληλες των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου είτε τις διαγώνιες του.
Οι δύο πρώτες περιπτώσεις όπως και η 3η και 4η θεωρούνται διαφορετικές αφού το χωρίο είναι κήπος και έχει σημασία ο προσανατολισμός του.
Αν ΑΒ = ΓΔ = α και ΑΔ = ΒΓ = β τότε (ΑΒΓΔ) = α·β.

Στην 1η περίπτωση έχουμε $(\text{ΑΒΘΗ})=(\text{ΗΘΓΔ})=\alpha\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$.

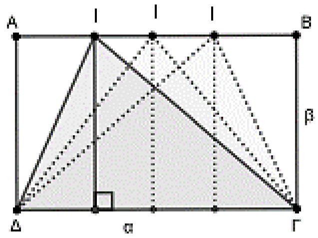
Στην 2η περίπτωση έχουμε $(\text{ΑΕΖΔ})=(\text{ΕΒΓΖ})=\frac{\alpha}{2}\cdot\beta=\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$.

Στην 3η και 4η περίπτωση τα τρίγωνα που δημιουργούνται από κάθε διαγώνιο γνωρίζουμε ότι είναι ίσα, άρα και ισοδύναμα με $(\text{ΑΒΓ})=(\text{ΑΔΓ})=(\text{ΑΒΔ})=(\text{ΒΓΔ})=\frac{1}{2}\alpha\beta=\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$.

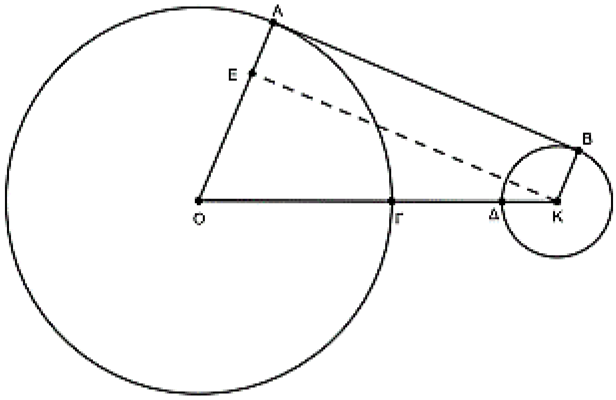
β) i. Έστω ότι το εσωτερικό σημείο μιας πλευράς του ορθογωνίου είναι το σημείο Ι, τότε οι απέναντι κορυφές είναι οι Γ και Δ. Οπότε σχηματίζεται το τρίγωνο ΙΔΓ που η πλευρά του ΔΓ είναι το μήκος α του ορθογωνίου και το ύψος προς αυτή είναι η απόσταση του Ι από τη ΔΓ, δηλαδή η άλλη διάσταση του ορθογωνίου που ισούται με β. Άρα $(\text{ΙΔΓ})=\frac{1}{2}\alpha\beta=\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$.



ii. Έστω ότι η θέση του σημείου Ι μεταβάλλεται και μπορεί να είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΑΒ. Σε κάθε τέτοια μετακίνηση του σημείου Ι, το τρίγωνο που σχηματίζεται έχει εμβαδό το μισό του αρχικού ορθογωνίου όπως αποδείχθηκε στο β) i. ερώτημα. Οι θέσεις του Ι είναι τα άπειρα εσωτερικά σημεία της πλευράς ΑΒ.



18565.Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Κ. Ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα R=7 ενώ ο κύκλος με κέντρο Κ έχει ακτίνα ρ=2. Το τμήμα ΑΒ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο τμήμα ΑΒ με Ε σημείο του τμήματος ΟΑ. Η διάκεντρος ΟΚ τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (Κ,ρ) στο σημείο Δ.



α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι ΓΔ=4, τότε:

i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΟ. (Μονάδες 07)

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του ΑΒΚΕ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ. ; (Μονάδες 08)

Λύση

α) i. Οι ακτίνες ΟΑ και ΚΒ είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ στα σημεία επαφής Α και Β. Το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο ΑΒ και αφού ΑΒ⊥ΟΑ, θα είναι και ΚΕ⊥ΟΑ. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΚΕ έχει 3 ορθές γωνίες και είναι ορθογώνιο. Επομένως ΑΕ=ΚΒ=2 και ΟΕ=ΟΑ-ΕΑ=7-2=5.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΚ η υποτείνουσα του ΟΚ είναι ΟΓ+ΓΔ+ΔΚ=7+4+2=13.
Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$\mathrm{KE}^2 = \mathrm{OK}^2 - \mathrm{OE}^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow \mathrm{KE} = 12$, οπότε και ΑΒ = 12.

ii. Στο τετράπλευρο ΑΒΚΟ είναι ΟΑ⊥ΑΒ και ΚΒ⊥ΑΒ, άρα ΟΑ//ΚΒ. Επίσης ΟΑ=7≠2=ΚΒ, άρα οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες, οπότε το ΑΒΚΟ είναι τραπέζιο, στο οποίο η μικρή του βάση είναι η ΚΒ, η μεγάλη βάση του η ΟΑ και το ύψος του είναι το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΑΒ. Οπότε $(\mathrm{ABKO}) = \dfrac{(\mathrm{KB}+\mathrm{KA})\mathrm{AB}}{2} = \dfrac{(2+7)\cdot 12}{2} = 54$τ.μ.

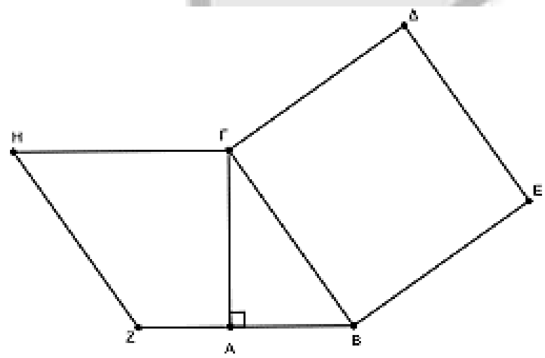
β) Το ΑΒΚΕ είναι ορθογώνιο, άρα (ΑΒΚΕ) = ΑΒ·ΚΒ $\Leftrightarrow 4\sqrt{14} = 2\mathrm{AB} \Leftrightarrow \mathrm{AB} = 2\sqrt{14} = \mathrm{KE}$.
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΕ έχουμε:
$\mathrm{OK}^2 = \mathrm{OE}^2 + \mathrm{KE}^2 = 5^2 + \left(2\sqrt{14}\right)^2 = 25 + 56 = 81 \Leftrightarrow \mathrm{OK} = 9$.

Για το τμήμα ΟΚ ισχύει ότι $\mathrm{OK} = \mathrm{O\Gamma} + \Gamma\Delta + \Delta\mathrm{K} \Leftrightarrow 9 = 7 + \Gamma\Delta + 2 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 0$. Δηλαδή η διάκεντρος ΟΚ των δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους. Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

18566.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$.
Με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ. Από τα σημεία Γ και Ζ φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Η.
α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου. (Μονάδες 10)
β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:
Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».
Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά». Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.
(Μονάδες 15)

Λύση

α) Το τετράπλευρο ΒΓΘΗ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.
Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΒΓ και ΒΗ είναι ίσες από την κατασκευή, οπότε το ΒΓΘΗ είναι ρόμβος με πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Άρα η περίμετρος του ρόμβου είναι ίση με 4·ΒΓ. Επίσης το τετράγωνο ΒΓΔΕ έχει πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου, άρα η περίμετρός του είναι ίση με 4·ΒΓ.
Δηλαδή ο ρόμβος και το τετράγωνο έχουν ίσες περιμέτρους.



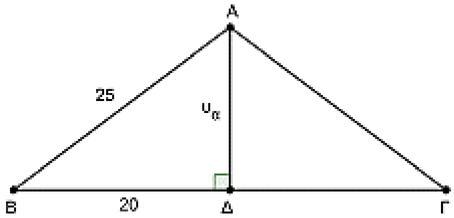
β) Είναι $(ΒΓΔΕ) = ΒΓ^2$ και $(ΒΓΗΖ) = ΒΖ \cdot ΓΑ$.
Συγκρίνοντας τα δύο εμβαδά παρατηρούμε ότι, για το εμβαδό του τετραγώνου το τμήμα ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΒΓ και για το εμβαδό του ρόμβου, το ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΑΓ.
Το τμήμα ΑΓ είναι κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και το τμήμα ΒΓ είναι υποτείνουσα. Όμως η κάθετη πλευρά είναι πάντα μικρότερη την υποτείνουσα, επομένως το εμβαδό του ρόμβου είναι μικρότερο από το εμβαδό του τετραγώνου και δεν γίνεται ποτέ τα δύο σχήματα να είναι ισεμβαδικά.
Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι σωστός.

21124.α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α = 40, β = 25, γ = 25 και αντίστοιχα ύψη $υ_α, υ_β, υ_γ$. Να αποδείξετε ότι:
i. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 6)
ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι Ε = 300 και τα ύψη του είναι $υ_α = 15$ και $υ_β = υ_γ = 24$.
(Μονάδες 7)
iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη $υ_α, υ_β, υ_γ$ είναι οξυγώνιο.
(Μονάδες 7)
β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Είναι $α^2 = 40^2 = 1600$ και $β^2 + γ^2 = 25^2 + 25^2 = 625 + 625 = 1250$.

Είναι $α^2 > β^2 + γ^2$ οπότε $A > 90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.



ii. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, το ύψος του $ΑΔ = υ_α$ είναι και διάμεσος του τριγώνου, άρα $ΒΔ = ΔΓ = 20$.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:
$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225 \Leftrightarrow ΑΔ = 15$

Είναι $Ε = (ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 15 = 300$.

Είναι $Ε = (ΑΒΓ) = \frac{1}{2}β \cdot υ_β \Leftrightarrow 300 = \frac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot υ_β \Leftrightarrow 600 = 25υ_β \Leftrightarrow υ_β = \frac{600}{25} = 24$.

iii. Είναι $υ_γ = υ_β = 24$ και $ΑΔ = υ_α = 15$. Είναι $υ_γ^2 = 24^2 = 576$ και $υ_α^2 + υ_β^2 = 225 + 576 = 801$.
Επειδή $υ_γ^2 < υ_α^2 + υ_β^2$ το τρίγωνο με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, είναι οξυγώνιο

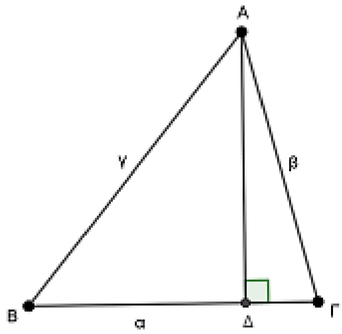
β) Έστω α, β, γ οι πλευρές οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ με $β = γ$ και $υ_α, υ_β, υ_γ$ τα αντίστοιχα ύψη. Είναι $α^2 > β^2 + γ^2 \Leftrightarrow α^2 > 2β^2 \Leftrightarrow \frac{α^2}{β^2} > 2 \Leftrightarrow \frac{α}{β} > \sqrt{2} > 1$

Είναι $Ε = \frac{1}{2}α \cdot υ_α = \frac{1}{2}β \cdot υ_β = \frac{1}{2}γ \cdot υ_γ$ και επειδή $β = γ$, είναι και $υ_γ = υ_β$. Επομένως το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου , είναι ισοσκελές.
Επίσης είναι $\frac{1}{2}α \cdot υ_α = \frac{1}{2}β \cdot υ_β \Leftrightarrow \frac{α}{β} = \frac{υ_β}{υ_α}$ και επειδή $\frac{α}{β} > 1$, είναι $\frac{υ_β}{υ_α} > 1 \Leftrightarrow υ_β > υ_α$.
Είναι $υ_γ^2 < υ_γ^2 + υ_α^2 = υ_β^2 + υ_α^2$ άρα το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ , είναι οξυγώνιο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

3ο Θέμα

17908.Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι α = 4, β = $\sqrt{17}$ και γ = 5.
α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις γωνίες του. **(Μονάδες 9)**
β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α, τότε:
i. να υπολογίσετε το ΔΒ. **(Μονάδες 9)**
ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 7)**

Λύση



α) Είναι $γ^2 = 25$ και $α^2 + β^2 = 4^2 + \left(\sqrt{17}\right)^2 = 16 + 17 = 33$, δηλαδή $γ^2 < α^2 + β^2$ οπότε $Γ < 90^\circ$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, εφόσον απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του.

β) i. Από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:
$γ^2 = α^2 + β^2 - 2α \cdot ΔΓ \Leftrightarrow 25 = 33 - 2 \cdot 4 \cdot ΔΓ \Leftrightarrow 8ΔΓ = 8 \Leftrightarrow ΔΓ = 1$, οπότε $ΔΒ = ΒΓ - ΔΓ = 3$.
ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$ΑΔ^2 = β^2 - ΔΓ^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 - 1^2 = 17 \Leftrightarrow ΑΔ = 4$.

Είναι $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

2ο Θέμα

15979.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=5 και $\mathrm{A}=120^\circ$.Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{B\Gamma}=5\sqrt{3}$ **(Μονάδες 13)**

β) $(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$ **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το νόμο των συνημιτόνων είναι:

$$\mathrm{B\Gamma}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\text{συν}\mathrm{A}=5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cdot\text{συν}120^\circ=25+25-50\left(-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{B\Gamma}^2=50+25=75\Leftrightarrow\mathrm{B\Gamma}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$$

β) Είναι $(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\text{ημ}\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$

17346.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΒΓ = 4 και $\mathrm{B}=60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Gamma}=2\sqrt{7}$. **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. **(Μονάδες 9)**

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 8)**

Δίνεται ότι $\text{ημ}60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\text{συν}60^\circ=\dfrac{1}{2}$.

Λύση

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{B\Gamma}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}\cdot\text{συν}\mathrm{B}=6^2+4^2-2\cdot6\cdot4\cdot\text{συν}60^\circ=36+16-48\cdot\frac{1}{2}=52-24=28\Leftrightarrow$$

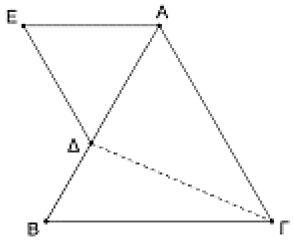
$$\mathrm{A\Gamma}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}.$$

β) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΑΒ, άρα η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου είναι η Γ, γιατί βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

Είναι $\mathrm{AB}^2=6^2=36$ και $\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{B\Gamma}^2=28+16=44$, άρα $\mathrm{AB}^2<\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{B\Gamma}^2\Leftrightarrow\Gamma<90^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

γ) Είναι $(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}\cdot\text{ημ}\mathrm{B}=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\text{ημ}60^\circ=12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

17347.Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.



α) Να αποδείξετε ότι $(\mathrm{A\Gamma\Delta})=15\sqrt{3}$. **(Μονάδες 12)**

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ. **(Μονάδες 13)**

Δίνεται ότι $\text{ημ}60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Λύση

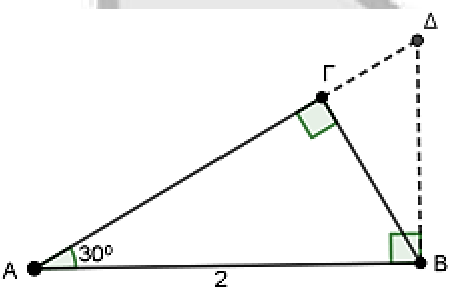
α) $(\mathrm{A\Gamma\Delta})=\frac{1}{2}\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\etaμ\mathrm{A}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot \etaμ60^\circ=30\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$.

β) Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α ισούται με $\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$, άρα το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ που έχει πλευρά 6 είναι $\frac{6^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$.

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ είναι $(\mathrm{A\Gamma\Delta E})=(\mathrm{A\Gamma\Delta})+(\mathrm{A\Delta E})=15\sqrt{3}+9\sqrt{3}=24\sqrt{3}$.

3ο Θέμα

21783.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\Gamma=90^\circ$, $\mathrm{A}=30^\circ$ και ΑΒ = 2.



α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Gamma}=\sqrt{3}$. (Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ, στο σημείο Β, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ.

Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Delta}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)

γ) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι $(\mathrm{KAB})=\frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 8)

Λύση

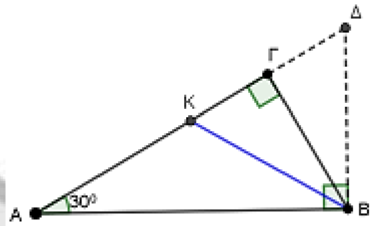
α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mathrm{A}=30^\circ$ άρα $\mathrm{B\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}}{2}=1$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{B\Gamma}^2=2^2-1^2=4-1=3\Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}=\sqrt{3}$

β) Από τα δεδομένα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι ορθογώνια. Επίσης, έχουν τη γωνία Α κοινή, οπότε θα είναι όμοια. Επομένως θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Άρα

$\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{A\Delta}}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sqrt{3}\mathrm{A\Delta}=4\Leftrightarrow\mathrm{A\Delta}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$



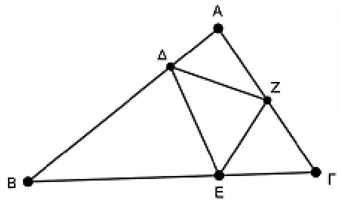
γ) Το Κ είναι μέσο του ΑΔ επομένως $\mathrm{AK}=\frac{\mathrm{A\Delta}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Είναι $(\mathrm{KAB})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AK}\cdot\etaμ30^\circ=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Λόγος Εμβαδών

2ο Θέμα

15978.Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε:
$ΑΔ=\frac{1}{4}ΑΒ,\ ΒΕ=\frac{2}{3}ΒΓ$ **και** $ΓΖ=\frac{1}{2}ΑΓ$**.Να αποδείξετε ότι:**



α) $(ΑΔΖ)=\frac{1}{8}(ΑΒΓ),\ (ΒΕΔ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓ),\ (ΓΕΖ)=\frac{1}{6}(ΑΒΓ)$. **(Μονάδες 15)**

β) $(ΔΕΖ)=\frac{5}{24}(ΑΒΓ)$ **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Α, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Δηλαδή: $\frac{(ΑΔΖ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΑΔ\cdot ΑΖ}{ΑΒ\cdot ΑΓ}=\frac{\frac{1}{4}ΑΒ\cdot\frac{1}{2}ΑΓ}{ΑΒ\cdot ΑΓ}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow (ΑΔΖ)=\frac{1}{8}(ΑΒΓ)$,

$\frac{(ΒΕΔ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΒΔ\cdot ΒΕ}{ΒΑ\cdot ΒΓ}=\frac{\frac{3}{4}ΒΑ\cdot\frac{2}{3}ΒΓ}{ΒΑ\cdot ΒΓ}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow (ΒΕΔ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓ)$ και

$\frac{(ΓΕΖ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{ΓΖ\cdot ΓΕ}{ΓΑ\cdot ΓΒ}=\frac{\frac{1}{2}ΓΑ\cdot\frac{1}{3}ΒΓ}{ΓΑ\cdot ΒΓ}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow (ΓΕΖ)=\frac{1}{6}(ΑΒΓ)$

β) $(ΔΕΖ)=(ΑΒΓ)-(ΑΔΖ)-(ΒΕΔ)-(ΓΕΖ)=\frac{1}{8}(ΑΒΓ)-\frac{1}{2}(ΑΒΓ)-\frac{1}{6}(ΑΒΓ)=\frac{5}{24}(ΑΒΓ)$

16127.Ένα τρίγωνο έχει πλευρά $ΒΓ=9$ και αντίστοιχο ύψος $ΑΔ=8$.
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)
β) Ένα άλλο τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ και η ομόλογη πλευρά της ΒΓ είναι η Β΄Γ΄= 6. Να υπολογίσετε:
i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄, (Μονάδες 7)
ii. το εμβαδόν του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}ΒΓ\cdot ΑΔ=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8=36$

β) i) Ο λόγος ομοιότητας των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι $λ=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

ii. Είναι $\frac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')}=λ^2\Leftrightarrow\frac{36}{(Α'Β'Γ')}=\left(\frac{3}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{36}{(Α'Β'Γ')}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow$

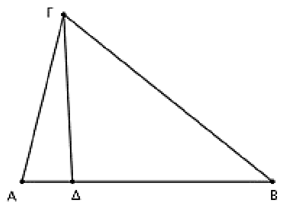
$9(Α'Β'Γ')=36\cdot 4\Leftrightarrow(Α'Β'Γ')=\frac{\cancel{36}^{4}\cdot 4}{\cancel{9}}=16$

16756.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΒΓ)}=\frac{ΑΒ}{ΔΒ}$.

(Μονάδες 15)

β) Αν (ΑΒΓ) = 25 και ΑΒ = 5ΑΔ, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Β. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία Β σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΒΓ)}=\frac{ΑΒ\cdot ΒΓ}{ΔΒ\cdot ΒΓ}=\frac{ΑΒ}{ΔΒ}$$

β) Αφού είναι ΑΒ = 5ΑΔ, τότε: ΔΒ = ΑΒ − ΑΔ = 5ΑΔ − ΑΔ = 4ΑΔ Οπότε, είναι:

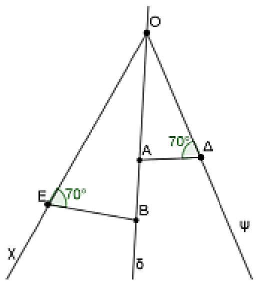
$$\frac{25}{(ΔΒΓ)}=\frac{5ΑΔ}{4ΑΔ}\Leftrightarrow\frac{25}{(ΔΒΓ)}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 5(ΔΒΓ)=100\Leftrightarrow(ΔΒΓ)=20$$

16770.Δίνεται γωνία $χ\hat{Ο}ψ$ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην Οδ παίρνουμε τυχαία σημεία Α και Β. Θεωρούμε σημείο Ε στην πλευρά Οχ τέτοιο ώστε $Ο\hat{Ε}Β=70^\circ$ και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε $Ο\hat{Δ}Α=70^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Αν $\frac{ΟΑ}{ΟΒ}=\frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων. (Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΕΒ.



(Μονάδες 09)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ έχουν:

- $Ε\hat{Ο}Β=Δ\hat{Ο}Α$ επειδή η ΟΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $Ε\hat{Ο}Δ$.
- $\hat{Ε}=\hat{Δ}=70^\circ$

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μια προς μια αντίστοιχα.

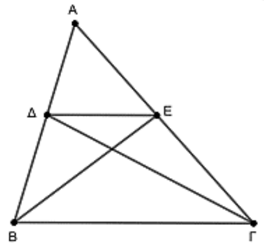
β) Αφού τα δύο τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{Ε}=\hat{Δ}$	$Ε\hat{Ο}Β=Δ\hat{Ο}Α$	$\hat{Β}=\hat{Α}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΕΒ	ΟΒ	ΕΒ	ΟΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΔΑ	ΟΑ	ΑΔ	ΟΔ

Επομένως, θα είναι: $\frac{ΟΒ}{ΟΑ}=\frac{ΕΒ}{ΑΔ}=\frac{ΟΕ}{ΟΔ}$.

γ) Τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή $\frac{(OEB)}{(O\Delta A)}=\left(\frac{OB}{OA}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(OEB)}{28}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\Leftrightarrow 4(OEB)=252\Leftrightarrow (OEB)=63$

16806.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.



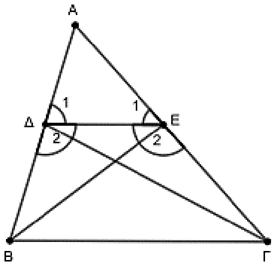
α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta EB)}=\frac{A\Delta}{\Delta B}$ **και** $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E\Gamma)}=\frac{AE}{E\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ).

(Μονάδες 12)

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΒ έχουν τις γωνίες Δ_1 και Δ_2 παραπληρωματικές, άρα

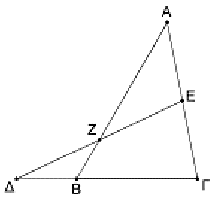
$$\frac{(A\Delta E)}{(\Delta EB)}=\frac{A\Delta\cdot\Delta E}{\Delta B\cdot\Delta E}=\frac{A\Delta}{\Delta B}$$

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν παραπληρωματικές τις γωνίες E_1 και E_2, άρα $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E\Gamma)}=\frac{AE\cdot E\Delta}{E\Gamma\cdot E\Delta}=\frac{AE}{E\Gamma}$.

β) Το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή, έχουμε ότι $\frac{A\Delta}{\Delta B}=\frac{AE}{E\Gamma}$.

Επομένως από το α) ερώτημα ισχύει ότι $\frac{(A\Delta E)}{(\Delta EB)}=\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E\Gamma)}\Leftrightarrow(\Delta EB)=(\Delta E\Gamma)$.

20667.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 8. Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β παίρνουμε σημείο Δ, ώστε ΔΒ = 4 και Ε είναι το μέσο της ΑΓ.



α) Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma)=4A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma$. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι $(\Gamma\Delta E)=3A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma$. **(Μονάδες 9)**

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΔΕ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, αν το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ είναι 12 τ.μ. **(Μονάδες 8)**

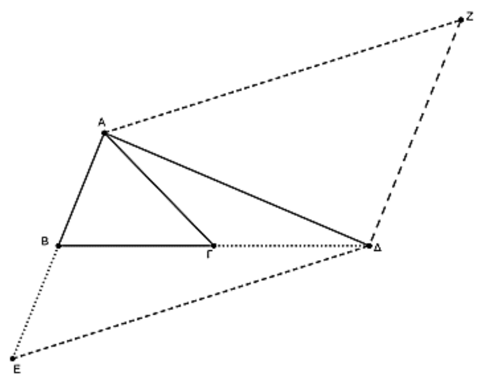
Λύση

α) Είναι $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}B\Gamma\cdot A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma=\frac{1}{2}4\cdot A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma=4A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma$.

β) $(\Gamma\Delta E)=\frac{1}{2}\Gamma\Delta\cdot\Gamma E\cdot\eta\mu\Gamma=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot\frac{A\Gamma}{2}\cdot\eta\mu\Gamma=3A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma$

γ) $\frac{(AB\Gamma)}{(\Gamma\Delta E)}=\frac{4A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma}{3A\Gamma\cdot\eta\mu\Gamma}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{(AB\Gamma)}{12}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3(AB\Gamma)=48\Leftrightarrow(AB\Gamma)=16$

18561.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΒΓ και την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΑΒ.
α) Αν (ΑΒΓ)= 25 m^2 , να αποδείξετε ότι (ΒΔΕ)=50 m^2 .
(Μονάδες 10)
β) Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΕΔ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην ΕΑ που τέμνονται στο σημείο Ζ.
Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΔ είναι 4-πλάσιο του εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.
(Μονάδες 15)



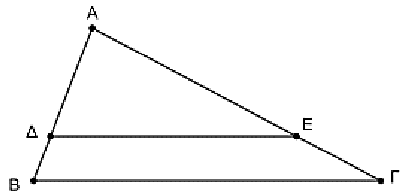
Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ έχουν $B + B_{εξ} = 180^\circ$, οπότε

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΒΔΕ)} = \frac{ΑΒ \cdot ΒΓ}{ΒΔ \cdot ΒΕ} = \frac{ΑΒ \cdot ΒΓ}{2ΒΓ \cdot ΑΒ} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{25}{(ΒΔΕ)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (ΒΔΕ) = 50m^2$$

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το τμήμα ΑΓ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΑΓΔ) = (ΑΒΓ).
Η διαγώνιος ΑΔ χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα τρίγωνα, τα ΑΗΔ και ΑΕΔ, οπότε αυτά είναι ισοδύναμα, δηλαδή $(ΑΔΖ) = (ΑΕΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΒΔΕ) = 4(ΑΒΓ)$.

21120.Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = \sqrt{2}$.Από σημείο Δ της πλευράς ΑΒ ώστε ΑΔ = 1, φέρνουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας ,
ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)



β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου ΑΔΕ και του τραπεζίου ΒΓΕΔ. (Μονάδες 7)

Λύση

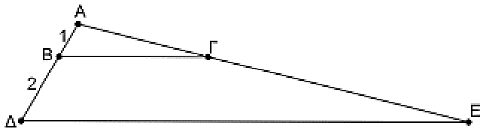
α) i) Γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Επίσης, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια. Επομένως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $λ = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ii) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = λ^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ).$$

β) Είναι $(ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ και $(ΒΓΕΔ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΕ) = 2 - 1 = 1$.

21304. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στη ΒΓ και ΒΔ = 2. α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο ομοιότητα 1/3. (Μονάδες 10)



β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΔΕ.

(Μονάδες 08)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 07)

Λύση

α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, οι πλευρές του τριγώνου ΑΔΕ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, εφόσον το ΑΔΕ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη στην ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΔΕ}}$.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ}+\text{ΒΔ}}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$

β) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους, άρα οι περίμετροι των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν λόγο $\frac{1}{3}$. Επομένως η περίμετρος του ΑΔΕ είναι τριπλάσια της περιμέτρου του ΑΒΓ, δηλαδή είναι ίση με $3\cdot 8,5=25,5$.

γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΔΕ) των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ, αντίστοιχα είναι $\frac{1}{9}$,

δηλαδή: $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΔΕ})}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\frac{(\text{ΑΒΓ})}{15}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow(\text{ΑΒΓ})=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$.

21636. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με μήκη πλευρών ΑΒ=6, ΑΓ=8, και ΒΓ=10.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

β) Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε:

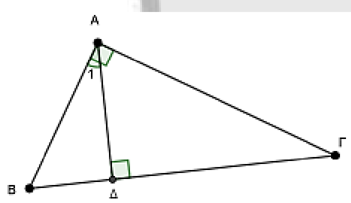
i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda=\frac{3}{4}$.

(Μονάδες 10)

ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΓΔ})}$. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Είναι $\text{ΒΓ}^2=10^2=100$ και $\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2=36+64=100$, άρα $\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2=\text{ΒΓ}^2$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ, είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ και ορθή γωνία την Α.



β) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι:

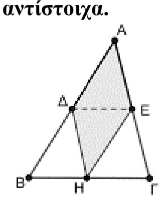
$\text{Α}_1+\text{Β}=90^\circ\Leftrightarrow\text{Α}_1=90^\circ-\text{Β}$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Gamma+\text{Β}=90^\circ\Leftrightarrow\Gamma=90^\circ-\text{Β}$, άρα $\text{Α}_1=\Gamma$.

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

ii. Γνωρίζουμε ότι ο λόγος των εμβαδών ομοίων τριγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Οπότε λόγω του ερωτήματος (β, i) είναι $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)} = \lambda^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

4ο Θέμα

16582.Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.



α) Έστω ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

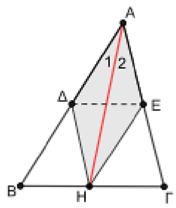
ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου ΑΒΓ; (Μονάδες 06)

Λύση

α) i. Επειδή $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$ τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία ίση (είναι η κοινή η γωνία Α), οπότε

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB} \cdot \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (A\Delta E) = \frac{1}{4}(AB\Gamma).$$



ii. Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία τη A_1 επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή, δηλαδή

$$\frac{(AH\Delta)}{(AHB)} = \frac{A\Delta \cdot AH}{AB \cdot AH} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (AH\Delta) = \frac{1}{2}(AHB) \ (1).$$

Τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουν κοινή γωνία τη A_2 επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή, δηλαδή

$$\frac{(AHE)}{(AH\Gamma)} = \frac{AE \cdot AH}{A\Gamma \cdot AH} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (AHE) = \frac{1}{2}(AH\Gamma) \ (2)$$

Είναι $(A\Delta HE) = (AH\Delta) + (AHE) \overset{(1),(2)}{=} \frac{1}{2}(AHB) + \frac{1}{2}(AH\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$

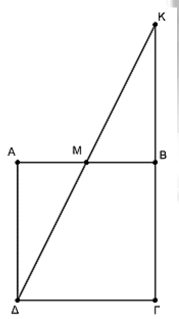
β) Επειδή $A\Delta < AB$ και $AE < A\Gamma$, τότε αν $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda$ θα είναι $0 < \lambda < 1$.

Από το προηγούμενο σκέλος είναι

$\frac{(AH\Delta)}{(AHB)} = \frac{A\Delta}{AB} = \lambda \Leftrightarrow (AH\Delta) = \lambda(AHB)$ και $\frac{(AHE)}{(AH\Gamma)} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda \Leftrightarrow (AHE) = \lambda(AH\Gamma)$, οπότε

$(A\Delta HE) = (AH\Delta) + (AHE) = \lambda(AHB) + \lambda(AH\Gamma) = \lambda(AB\Gamma)$

16732.Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια.

(5 μονάδες)

β) $(\text{ΜΚΒ})=\frac{1}{4}(\text{ΔΚΓ})$.

(5 μονάδες)

γ) $(\text{ΜΒΓΔ})=\frac{3}{4}(\text{ΑΒΓΔ})$.

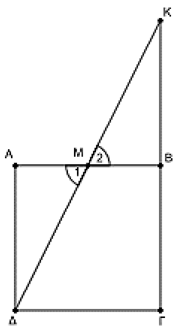
(10 μονάδες)

δ) Αν (ΜΒΓΔ) = 75 m^2 **να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.**

(5 μονάδες)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι ορθογώνια και έχουν κοινή τη γωνία Κ, οπότε έχουν δυο γωνίες τους ίσες μια προς μια, άρα είναι όμοια.



β) Τα όμοια τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΒ έχουν λόγο ομοιότητας

$\lambda=\dfrac{\frac{1}{2}\text{ΜΒ}}{\text{ΔΓ}}=\dfrac{\frac{1}{2}\text{ΑΒ}}{\text{ΑΒ}}=\dfrac{1}{2}$, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή:

$\dfrac{(\text{ΜΚΒ})}{(\text{ΔΚΓ})}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow(\text{ΜΚΒ})=\dfrac{1}{4}(\text{ΔΚΓ})$.

γ) Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΚΒ είναι ίσα αφού έχουν:

- ΑΜ = ΜΒ, το Μ είναι μέσο του ΑΒ
- $\hat{\text{ΔΑΜ}}=\hat{\text{ΜΒΚ}}=90^\circ$
- $\text{Μ}_1=\text{Μ}_2$ ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα, είναι και ισεμβαδικά, δηλαδή (ΑΜΔ) = (ΜΚΒ) (1)

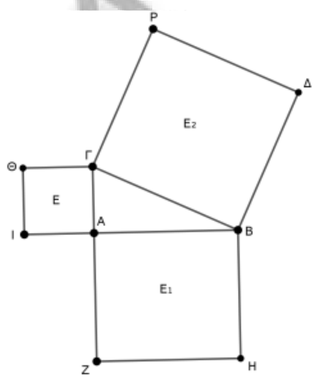
Είναι (ΔΚΓ) = (ΔΜΒΓ) + (ΜΚΒ) = (ΔΜΒΓ) + (ΑΜΔ) = (ΑΒΓΔ), λόγω της σχέσης (1) .

$(\text{ΜΒΓΔ})=(\text{ΔΚΓ})-(\text{ΜΚΒ})=(\text{ΔΚΓ})-\frac{1}{4}(\text{ΔΚΓ})=\frac{3}{4}(\text{ΔΚΓ})=\frac{3}{4}(\text{ΑΒΓΔ})$

δ) Έστω ότι το τετράγωνο έχει πλευρά α. Τότε $(\text{ΑΒΓΔ})=\alpha^2$ και (ΜΒΓΔ) = 75.

Από το ερώτημα γ) έχουμε ότι: $75=\frac{3}{4}\alpha^2\Leftrightarrow 300=3\alpha^2\Leftrightarrow\alpha^2=100\Leftrightarrow\alpha=10\,\text{m}$

17907.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ, τα τετράγωνα ΑΒΗΖ, ΑΓΘΙ, ΒΓΡΔ. Έστω Ε, Ε_1, Ε_2, τα εμβαδά των τετραγώνων ΑΓΘΙ, ΑΒΗΖ, ΒΓΡΔ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες Ε_1 = 4Ε, Ε_2 = 5Ε τότε:



α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. (Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΙΖ, ΒΗΔ, ΓΡΘ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

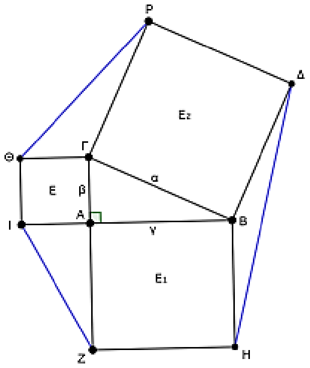
γ) αν η ΑΓ=1 να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου ΖΗΔΡΘΙ.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $E_1 = 4E \Leftrightarrow AB^2 = 4A\Gamma^2$ και $E_2 = 5E \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 5A\Gamma^2$

Επειδή $B\Gamma^2 = 5A\Gamma^2 = 4A\Gamma^2 + A\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$,λόγω του πυθαγορείου θεωρήματος, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.



β) Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma$,

$(AIZ) = \frac{1}{2}AI \cdot AZ = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma = (AB\Gamma)$.

Είναι $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{\Gamma B\Delta} + \widehat{\Delta BH} + \widehat{HBA} = 360^\circ \Leftrightarrow$

$\widehat{AB\Gamma} + 90^\circ + 90^\circ + \widehat{HBA} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{AB\Gamma} + \widehat{HBA} = 180^\circ$, οπότε

$\frac{(BH\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{BH \cdot B\Delta}{B\Gamma \cdot BA} = \frac{\gamma \cdot \alpha}{\alpha \cdot \gamma} = 1 \Leftrightarrow (BH\Delta) = (AB\Gamma)$

Είναι $\widehat{\Theta\Gamma P} + \widehat{P\Gamma B} + \widehat{A\Gamma B} + \widehat{\Theta\Gamma A} = 360^\circ \Leftrightarrow$

$\widehat{\Theta\Gamma P} + 90^\circ + \widehat{A\Gamma B} + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Theta\Gamma P} + \widehat{A\Gamma B} + = 180^\circ$, οπότε

$\frac{(\Theta\Gamma P)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Gamma\Theta \cdot \Gamma P}{\Gamma A \cdot \Gamma B} = \frac{\beta \cdot \alpha}{\beta \cdot \alpha} = 1 \Leftrightarrow (\Theta\Gamma P) = (AB\Gamma)$. Επομένως

$(AIZ) = (BH\Delta) = (\Theta\Gamma P) = (AB\Gamma)$.

γ) Αν ΑΓ =β =1, τότε $AB^2 = 4A\Gamma^2 = 4 \Leftrightarrow AB = 2$ και $B\Gamma^2 = 5A\Gamma^2 = 5 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{5}$.

Τότε $(AIZ) = (BH\Delta) = (\Theta\Gamma P) = (AB\Gamma) = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Ακόμη $E_1 = 4E = 4$, $E_2 = 5E = 5$, οπότε

$(Z H \Delta P \Theta I) = E + E_1 + E_2 + (AIZ) + (BH\Delta) + (\Gamma P\Theta) + (AB\Gamma) = 1 + 4 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14$

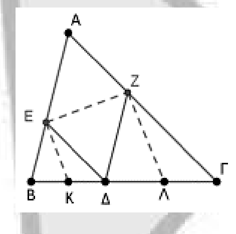
17956.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος ΒΓ. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2}$. **(Μονάδες 09)**

β) $(EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2}$. **(Μονάδες 09)**

γ) Το εμβαδόν του ΚΕΖΛ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ. **(Μονάδες 07)**

Λύση



α) Στο τρίγωνο ΒΕΔ, η ΕΚ είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΕΚΔ έχουν ίσες βάσεις ΒΚ και ΚΔ και κοινό ύψος από το Ε. Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή (ΒΕΚ) = (ΕΚΔ). Άρα $(EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2}$ (1).

β) Το ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, αφού ΔΖ//ΑΕ και ΔΕ//ΑΖ.
Η διαγώνιος ΕΖ του παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ το χωρίζει σε δύο ίσα άρα και ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή (ΕΖΔ) = (ΑΕΖ). Επομένως $(EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2}$ (2)

γ) Στο τρίγωνο ΔΖΓ, η ΖΛ είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα ΔΖΛ και ΓΖΛ έχουν ίσες βάσεις ΔΛ και ΓΛ και κοινό ύψος από το Ζ. Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή (ΔΖΛ) = (ΓΖΛ).

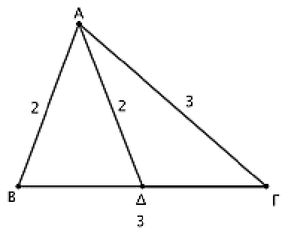
Άρα $(\Delta Z\Lambda)=\frac{(\Delta\Gamma Z)}{2}$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) ,(3) έχουμε:

$$(EK\Delta)+(EZ\Delta)+(\Delta Z\Lambda)=\frac{(BE\Delta)}{2}+\frac{(AE\Delta Z)}{2}+\frac{(\Delta\Gamma Z)}{2}=\frac{(BE\Delta)+(AE\Delta Z)+(\Delta\Gamma Z)}{2}=\frac{(AB\Gamma)}{2}$$

Επομένως, το εμβαδόν του ΚΕΖΛ θα ισούται με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου Δ πάνω στη ΒΓ.

18101.Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή με ΑΓ = ΒΓ = 3 και ΑΒ = ΑΔ = 2.



α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{B}$ και $B\hat{A}\Gamma$ είναι ίσες. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι όμοια. **(Μονάδες 9)**

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων. **(Μονάδες 8)**

Λύση

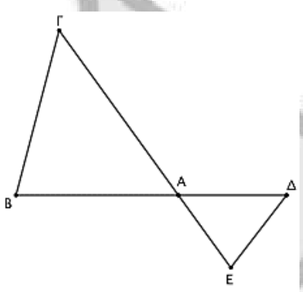
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΒΓ. Άρα, οι γωνίες $\hat{B}$ και $B\hat{A}\Gamma$ θα είναι ίσες, ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι ισοσκελή και έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, αφού $\hat{B}=B\hat{A}\Gamma$
Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Ο λόγος ομοιότητας λ των δύο τριγώνων ισούται με τον λόγο των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{A}\Gamma$ και $\hat{B}$ αντίστοιχα, δηλαδή είναι $\frac{B\Gamma}{A\Delta}=\frac{3}{2}$,

οπότε $\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)}=\left(\frac{B\Gamma}{A\Delta}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

18301.Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. α) Αν είναι $A\Delta=\frac{1}{2}AB$ και $AE=\frac{2}{5}A\Gamma$,να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$. **(Μονάδες 10)**



β) Αν είναι $A\Delta=\frac{1}{\lambda}AB$ και $AE=\frac{\lambda}{\mu}A\Gamma$ όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ. **(Μονάδες 10)**

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ)». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\Delta\hat{A}E = B\hat{A}\Gamma$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \frac{2}{5}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{5}$$

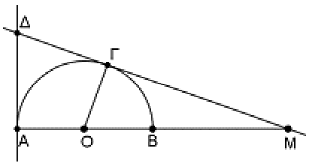
β) Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε σε αυτή την περίπτωση:

$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{1}{\lambda}AB \cdot \frac{\lambda}{\mu}A\Gamma}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{1}{\mu}$, επομένως ο ζητούμενος λόγος είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ.

γ) Αφού είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ), τότε $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow \mu = 1$.

Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ισεμβαδικά για μ = 1 και για οποιαδήποτε τιμή του λ, αφού, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (β), ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ. Επομένως, υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ, για τα οποία είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ). Τα ζεύγη αυτά είναι της μορφής $(\lambda, 1)$ με $\lambda \in \mathbb{N}^*$.Άρα, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

18370.Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2ρ. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Μ. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση της ΜΓ στο Δ τότε:



α) Αν ΒΜ = 2ρ να αποδείξετε ότι $M\Gamma = 2\sqrt{2}\rho$. (Μονάδες 09)

β) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{MO}{M\Gamma} = \frac{M\Delta}{MA}$. (Μονάδες 09)

ii. Αν για το Μ ισχύει ότι $BM = \lambda \cdot \rho$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, τέτοια ώστε (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ). (Μονάδες 07)

Λύση

α) Το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ είναι κάθετο στην ακτίνα ΟΓ. Είναι ΜΟ = ΜΒ+ΒΟ = 2ρ+ρ = 3ρ.
Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$$OM^2 = O\Gamma^2 + M\Gamma^2 \Leftrightarrow M\Gamma^2 = OM^2 - O\Gamma^2 = (3\rho)^2 - \rho^2 = 8\rho^2 \Leftrightarrow M\Gamma = 2\sqrt{2}\rho$$

β) i. Τα τρίγωνα ΟΜΓ και ΑΔΜ είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία αντίστοιχα: $A = \Gamma = 90^\circ$ και την γωνία Μ κοινή. Επομένως οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{\Gamma}$	Μ κοινή	$\hat{O} = \hat{\Delta}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΜΓ	ΜΟ	ΟΓ	ΜΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΜ	ΜΔ	ΔΑ	ΜΑ

$$\frac{M\Delta}{MO} = \frac{MA}{M\Gamma} \Leftrightarrow \frac{M\Delta}{MA} = \frac{MO}{M\Gamma}$$

ii. Δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΟΜΓ είναι όμοια, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή $\frac{(\text{ΑΜΔ})}{(\text{ΟΜΓ})}=\left(\frac{\text{ΑΜ}}{\text{ΓΜ}}\right)^2=\frac{\text{ΑΜ}^2}{\text{ΓΜ}^2}$ (1)

ΟΜ = ΜΒ+ΒΟ = λρ+ρ = (λ+1)ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

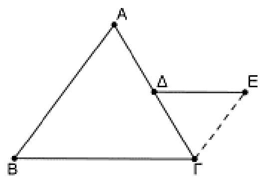
$\text{ΓΜ}^2=\text{ΟΜ}^2-\text{ΟΓ}^2=\left((\lambda+1)\rho\right)^2-\rho^2=\left(\lambda^2+2\lambda+1-1\right)\rho^2=\left(\lambda^2+2\lambda\right)\rho^2$

Είναι ΑΜ = 2ρ+λρ= (λ+2)ρ.

Η (1) γίνεται $\frac{(\text{ΑΜΔ})}{(\text{ΟΜΓ})}=\frac{\text{ΑΜ}^2}{\text{ΓΜ}^2}=\frac{(\lambda+2)^2\rho^2}{(\lambda^2+2\lambda)\rho^2}=\frac{(\lambda+2)^2}{\lambda(\lambda+2)}=\frac{\lambda+2}{\lambda}$.

Αφού (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ) έχουμε $\frac{(\text{ΑΜΔ})}{(\text{ΟΜΓ})}=\frac{9(\text{ΟΜΓ})}{(\text{ΟΜΓ})}=9\Leftrightarrow\frac{\lambda+2}{\lambda}=9\Leftrightarrow\lambda+2=9\lambda\Leftrightarrow 8\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{4}$.

18371.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσο της ΑΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ παράλληλη στην ΒΓ και ίση με το μισό της ΑΒ όπως στο σχήμα.



α) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{(\text{ΔΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΔΕ}}{2\text{ΒΓ}}$. (Μονάδες 10)

ii. Αν το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι (ΔΕΓ) = (ΑΒΔ). (Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(\text{ΔΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν $\Delta=\Gamma$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{1}{2}$.Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους Δ,Γ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους $\frac{(\text{ΔΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\left(\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΑΒ}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$». Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

(Μονάδες 05)

Με σχόλια [Σ1]:

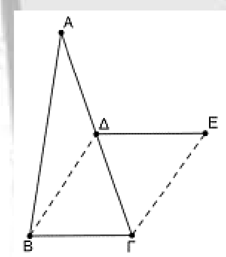
Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΑΒΓ έχουν τις γωνίες τους $\Gamma=\Delta$,γιατί είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές:

$\frac{(\text{ΔΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΔΕ}\cdot\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΔΕ}\cdot\text{ΔΓ}}{2\text{ΔΓ}\cdot\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΔΕ}}{2\text{ΒΓ}}$ (1), γιατί από υπόθεση ΑΓ = 2ΔΓ.

ii. Αν ΔΕΓΒ παραλληλόγραμμο, τότε ΔΕ = ΒΓ. Επομένως η (1) γίνεται

$\frac{(\text{ΔΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΔΕ}}{2\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{2\text{ΒΓ}}=\frac{1}{2}$.



Στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΒΔ χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τα ΑΒΔ και ΒΔΓ. Επομένως το καθένα από αυτά θα έχει το μισό εμβαδόν του ΑΒΓ. $\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{1}{2}$ (3)

Από τις (2), (3) προκύπτει ότι $(\text{ΔΕΓ})=(\text{ΑΒΔ})$.

β) Ο μαθητής για να αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια χρησιμοποιεί το επιχείρημα ότι έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μια και τις γωνίες Δ και Γ ίσες. Για να εξασφαλίσουμε όμως την ομοιότητα από το κριτήριο θα έπρεπε οι γωνίες να είναι οι περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών, πράγμα το οποίο εδώ δεν συμβαίνει. Οι περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές ΔΕ, ΔΓ και ΑΒ, ΑΓ είναι οι Δ και Α.

21189.Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(AB\Gamma)=(A\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$. **(Μονάδες 8)**

β) $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{4}$. **(Μονάδες 12)**

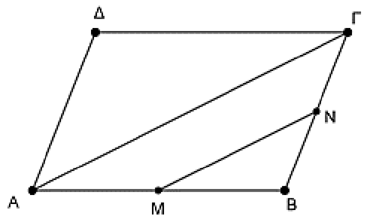
γ) $(BMN)=\frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουμε
- ΑΓ είναι κοινή πλευρά.
- ΑΒ = ΓΔ αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
- ΒΓ = ΑΔ αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή
(ΑΒΓ) = (ΑΓΔ) τότε (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΒΓ) = 2(ΑΒΓ) δηλαδή

$$(AB\Gamma)=(A\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$$



β) Αφού τα Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τότε $MA=MB=\frac{AB}{2}$ και $BN=N\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$.
Τα τρίγωνα ΒΜΝ και ΑΒΓ έχουν την γωνία Β κοινή,
επομένως $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)}=\frac{MB\cdot BN}{AB\cdot B\Gamma}=\frac{\frac{AB}{2}\cdot\frac{B\Gamma}{2}}{AB\cdot B\Gamma}=\frac{1}{4}$

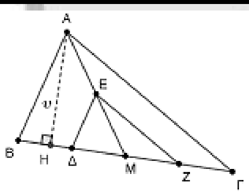
γ) Είναι $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow(BMN)=\frac{1}{4}(AB\Gamma)$. Επειδή από το (α) ερώτημα έχουμε $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$, ισχύει ότι $(BMN)=\frac{1}{4}(AB\Gamma)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)=\frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$.

21194.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ η διάμεσός του και Ε το μέσο της ΑΜ. Από το σημείο Ε φέρουμε παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ οι οποίες τέμνουν την ΒΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: α) (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ) **(Μονάδες 5)**

β) $(ME\Delta)=\frac{1}{8}(AB\Gamma)$. **(Μονάδες 12)**

γ) (ΑΒΔΕ) = (ΑΓΖΕ) **(Μονάδες 8)**

Λύση



α) Έστω ΑΗ = υ το κοινό ύψος των τριγώνων ΑΜΒ και ΑΜΓ. Έχουμε
$(AMB)=\frac{1}{2}BM\cdot\upsilon$ και $(AM\Gamma)=\frac{1}{2}\Gamma M\cdot\upsilon$.
Η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως ΒΜ = ΜΓ και από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ).

β) Στο τρίγωνο ΑΜΒ το Ε είναι το μέσο της ΑΜ και ΕΔ // ΑΒ, επομένως και το Δ είναι το μέσο της ΒΜ, άρα $ΜΔ = \frac{1}{2}ΒΜ$ και $ΜΕ = \frac{1}{2}ΑΜ$

Από το (α) ερώτημα έχουμε · $(ΑΜΒ) = (ΑΜΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$.

Τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΑΜΒ έχουν την γωνία $\widehat{ΑΜΒ}$ κοινή, επομένως

$$\frac{(ΜΕΔ)}{(ΑΜΒ)} = \frac{ΜΕ \cdot ΜΔ}{ΑΜ \cdot ΒΜ} = \frac{\frac{1}{2}ΑΜ \cdot \frac{1}{2}ΒΜ}{ΑΜ \cdot ΒΜ} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (ΜΕΔ) = \frac{1}{4}(ΑΜΒ) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(ΑΒΓ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ).$$

γ) Από το (α) ερώτημα είναι (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ) (1), επιπλέον στο τρίγωνο ΔΕΖ είναι $ΜΔ = \frac{1}{2}ΒΜ = \frac{1}{2}ΜΓ = ΜΖ$ συνεπώς η ΕΜ είναι διάμεσος του, άρα (ΜΕΔ) = (ΜΕΖ) (2).

Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) – (2) έχουμε: $(ΑΜΒ) - (ΜΕΔ) = (ΑΜΓ) - (ΜΕΖ) \Leftrightarrow (ΑΒΓΔ) = (ΑΓΖΕ)$

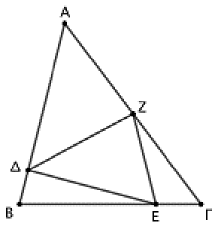
3ο Θέμα

19037.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $ΔΒ = \frac{1}{5}ΑΒ$, $ΕΓ = \frac{1}{4}ΒΓ$, $ΖΓ = \frac{1}{2}ΑΓ$.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{(ΔΒΕ)}{(ΑΒΓ)}, \frac{(ΕΓΖ)}{(ΑΒΓ)}, \frac{(ΖΑΔ)}{(ΑΒΓ)}$. (Μονάδες 15)

β) Αν είναι (ΑΒΓ) = 120, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ. (Μονάδες 10)

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Β$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία Β σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(ΔΒΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΒΔ \cdot ΒΕ}{ΒΑ \cdot ΒΓ} = \frac{\frac{1}{5}ΑΒ \cdot \frac{3}{4}ΒΓ}{ΒΑ \cdot ΒΓ} = \frac{3}{20} \Leftrightarrow (ΔΒΕ) = \frac{3}{20}(ΑΒΓ)\ (1).$$

Τα τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Γ. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία Γ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι: $\frac{(ΕΓΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΕΓ \cdot ΓΖ}{ΒΓ \cdot ΑΓ} = \frac{\frac{1}{4}ΒΓ \cdot \frac{1}{2}ΑΓ}{ΒΓ \cdot ΑΓ} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow (ΕΓΖ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ)\ (2)$.

Τα τρίγωνα ΖΑΔ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Α. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία Α σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(ΖΑΔ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΖ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{\frac{4}{5}ΑΒ \cdot \frac{1}{2}ΑΓ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow (ΖΑΔ) = \frac{2}{5}(ΑΒΓ)\ (3)$$

β) Από το σχήμα έχουμε ότι:

$$(ΑΒΓ) = (ΔΒΕ) + (ΕΓΖ) + (ΖΑΔ) + (ΔΕΖ) \overset{(1),(2),(3)}{=} \frac{3}{20}(ΑΒΓ) + \frac{1}{8}(ΑΒΓ) + \frac{2}{5}(ΑΒΓ) + (ΔΕΖ) \Leftrightarrow$$

$$120 = \frac{3}{20}120 + \frac{1}{8}120 + \frac{2}{5}120 \Leftrightarrow 120 = 18 + 15 + 48 + (ΔΕΖ) \Leftrightarrow (ΔΕΖ) = 39$$

Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

2ο Θέμα

20638.Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών ν_1 και ν_2, κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2, αντίστοιχα. Αν ο λόγος του ν_1 προς το ν_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$,τότε:

α) Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων.

(Μονάδες 10)

β) Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $\nu_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$. **(Μονάδες 15)**

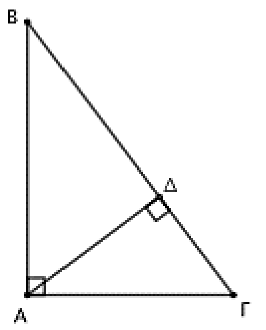
Λύση

α) Είναι $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \nu_2 = 2\nu_1$ και $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{360^\circ}{\nu_1}}{\frac{360^\circ}{\nu_2}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = 2$

β) $\nu_1 = 5$ και $\nu_2 = 2\cdot 5 = 10$, οπότε $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{5}}{180^\circ - \frac{360^\circ}{10}} = \frac{108^\circ}{144^\circ} = \frac{3}{4}$

1ο Θέμα

16097.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.
ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



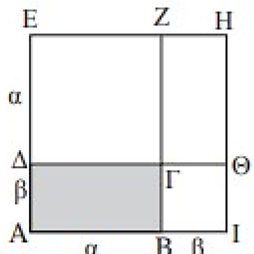
iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.
v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Λ v. Σ



β) Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ = α και ΑΔ = β . Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=α, την ΑΒ κατά ΒΙ=β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά α+β και επομένως είναι:

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\alpha+\beta)^2 \ (1)$$

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Έτσι έχουμε (ΔΓΖΕ)=α^2, (ΒΙΘΓ) = β^2 και (ΓΘΗΖ) = (ΑΒΓΔ) (2)

Είναι φανερό όμως ότι

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) + (\text{ΓΘΗΖ}) + (\text{ΒΙΘΓ}) + (\text{ΔΓΖΕ}),$$

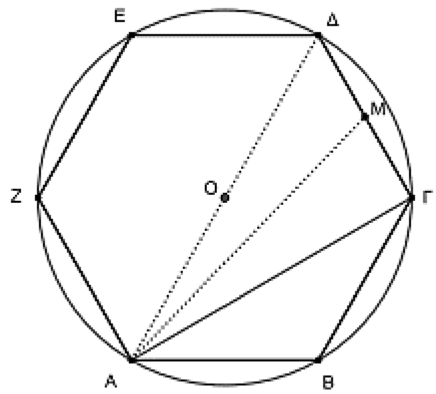
από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(\text{ΑΒΓΔ}) + \alpha^2 + \beta^2.$$

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση (ΑΒΓΔ) = α • β.

Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

4ο Θέμα



17600.Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\text{ΑΒΓΔΕΖ}) = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. **(Μονάδες 7)**

β) $(\text{ΑΜΓ}) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. **(Μονάδες 6)**

γ) $(\text{ΑΜΔΕΖ}) = R^2\sqrt{3}$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) $(\text{ΑΒΓΔΕΖ}) = E_6 = \dfrac{1}{2}P_6\alpha_6 = \dfrac{1}{2}\cdot 6\lambda_6\cdot\alpha_6 = 3R\cdot\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

β) Η γωνία ΑΓΔ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$$\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΔ}^2 - \text{ΓΔ}^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow \text{ΑΓ} = R\sqrt{3}$$

Το τρίγωνο ΑΓΔ έχει εμβαδό $(\text{ΑΓΔ}) = \dfrac{1}{2}(\text{ΑΓ})(\text{ΓΔ}) = \dfrac{1}{2}R\sqrt{3}\cdot R = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$

Η ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΓΔ συνεπώς ξέρουμε ότι χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή: $(\text{ΑΜΓ}) = (\text{ΑΜΔ}) = \dfrac{1}{2}(\text{ΑΓΔ}) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

γ) Είναι $(\text{ΑΜΔΕΖ}) = (\text{ΑΖΕΔ}) + (\text{ΑΜΔ}) = \dfrac{1}{2}E_6 + (\text{ΑΜΓ}) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$

Μήκος κύκλου

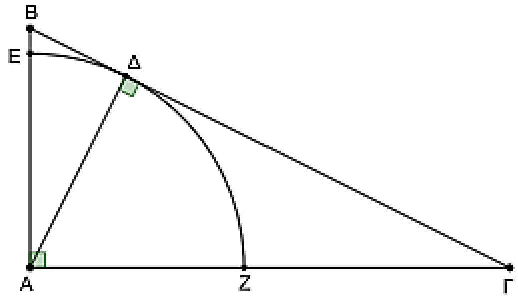
2ο Θέμα

21122.Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, το Δ είναι η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ και είναι ΒΔ = 1 και ΔΓ = 4.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = 2. (Μονάδες 12)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΕΔΖ}$. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Επομένως είναι $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ = 1 \cdot 4 = 4 \Leftrightarrow ΑΔ = 2$.

β) Το μήκος του τόξου είναι $\ell = \frac{πρμ}{180^\circ} = \frac{π \cdot 2 \cdot 90^\circ}{180^\circ} = π$

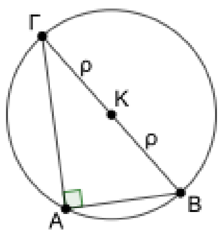
21298.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{Α}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ρ. Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5. (Μονάδες 08)

β) Αν η χορδή ΑΒ έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου, (Μονάδες 10)

ii. το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)



Λύση

α) Το μήκος του κύκλου (Κ,ρ) είναι $L = 2πρ$, άρα $ρ = \frac{L}{2π} = \frac{10π}{2π} = 5$

β) i. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει κάθετες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ και υποτείνουσα τη ΒΓ, που είναι διάμετρος του κύκλου. Για τη διάμετρο ΒΓ ισχύει ότι ΒΓ = 2ρ = 10 .

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow ΑΓ = 8$.

ii. $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου - τομέα

2ο Θέμα

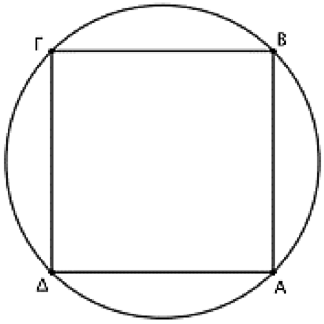
18097.Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με 2π − 4.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Είναι $E_4 = 4 \Leftrightarrow \lambda_4^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda_4 = 2 \Leftrightarrow R\sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow R = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}$.

β) Το εμβαδόν του κύκλου είναι: $E_\kappa = \pi R^2 = 2\pi$

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι: $E = E_\kappa - E_\tau = 2\pi - 4$

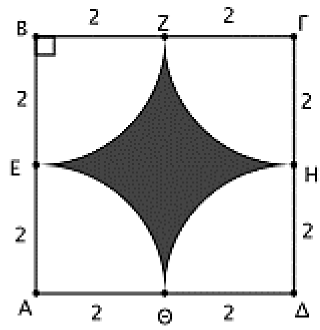
18098.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α = 4.
Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα ρ = 2 σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E = 4(4 - \pi)$.

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα τόξα ΘΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας ρ = 2 και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90°. Επομένως, οι κυκλικοί τομείς Α.ΘΕ, Β.ΕΖ, Γ.ΖΗ, Δ.ΗΘ έχουν καθένας εμβαδόν ίσο με

$$\left(A.\Theta E\right) = \left(B.EZ\right) = \left(\Gamma.ZH\right) = \left(\Delta.H\Theta\right) = \frac{\pi\rho^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_\tau = 4^2 = 16$, οπότε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι: $E = E_\tau - 4\left(A.\Theta E\right) = 16 - 4\pi = 4\left(4 - \pi\right)$.

18099.Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R=2\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

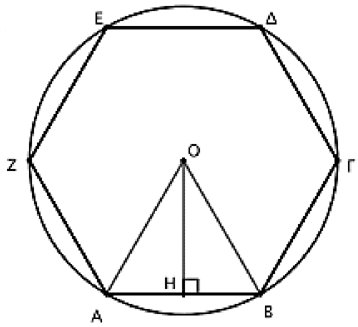
α) Να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημα του κανονικού εξαγώνου.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του ισούται με $E=6\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$. (Μονάδες 7)



Λύση

α) Είναι $\lambda_6=R=2\sqrt{3}$ και $\alpha_6=\frac{R\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=3$.

β) $E_6=\frac{1}{2}P_6\alpha_6=\frac{1}{2}6\lambda_6\alpha_6=3\cdot2\sqrt{3}\cdot3=18\sqrt{3}$

γ) Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E_\kappa=\pi R^2=\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2=12\pi$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι:
$E=E_\kappa-E_6=12\pi-18\sqrt{3}=6\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$.

20363.Δίνεται ο κύκλος (O,R) και τα σημεία του Α, Β, Γ όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, ώστε ΑΒ= R και $B\Gamma=R\sqrt{2}$.

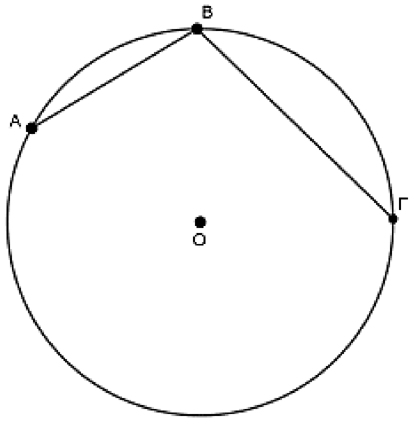
α) Να αποδείξετε ότι $AB=60^\circ$ και $B\Gamma=90^\circ$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, τα μήκη των τόξων AB, $B\Gamma$.

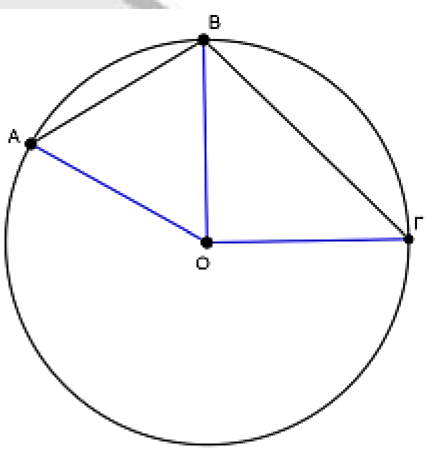
(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\left(O.A\Gamma\right)$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $AO\Gamma$. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η πλευρά κανονικού 6-γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. Επομένως έχουμε: ΑΒ = R και το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρα (κάθε πλευρά του είναι ίση με R), οπότε η γωνία ΑΟΒ ισούται με 60° όσο και το τόξο ΑΒ. Δηλαδή $AB=60^\circ$.



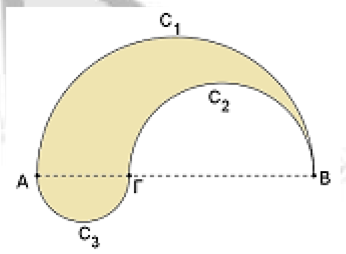
Επίσης γνωρίζουμε ότι η πλευρά 4-γώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι ίση με $R\sqrt{2}$, οπότε $B\Gamma=R\sqrt{2}$. Όμως $\lambda_4=R\sqrt{2}$, άρα $B\Gamma=\lambda_4$, οπότε το τόξο ΒΓ είναι $\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$.

β) Το μήκος του τόξου ΑΒ είναι: $\ell_{AB}=\frac{\pi R\mu}{180^\circ}=\frac{\pi R\cdot60^\circ}{180^\circ}=\frac{\pi R}{3}$.

Το μήκος του τόξου ΒΓ είναι: $\ell_{ΒΓ} = \frac{\pi R \mu}{180^\circ} = \frac{\pi R \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{2}$.

γ) Είναι $ΑΒΓ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$, οπότε και $ΑΟΓ = 150^\circ$.

$\left(Ο.ΑΓ\right) = \frac{\pi R^2 \cdot 150^\circ}{360^\circ} = \frac{5\pi R^2}{12}$.



20672.Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6, και σημείο του Γ, ώστε ΒΓ = 4. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1, C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου. (Μονάδες 10)

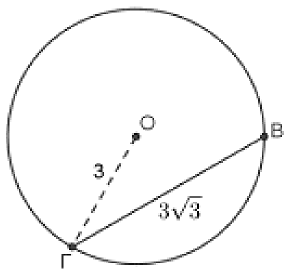
Λύση

α) Η ακτίνα του ημικυκλίου C_1 είναι $\rho_1 = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{6}{2} = 3$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_1 = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$.

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_2 είναι $\rho_2 = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{4}{2} = 2$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_2 = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 2\pi$.

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_3 είναι $\rho_3 = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{2}{2} = 1$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_3 = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

β) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ισούται με $E_1 - E_2 + E_3 = \frac{9\pi}{2} - 2\pi + \frac{\pi}{2} = 3\pi$



21069.Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 3. Θεωρούμε την χορδή $ΒΓ = 3\sqrt{3}$,όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου ΒΓ είναι 120°. (Μονάδες 08)

β) Να υπολογισθεί το μήκος του κυρτογώνιου τόξου ΒΓ. (Μονάδες 08)

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΒΓ. (Μονάδες 09)

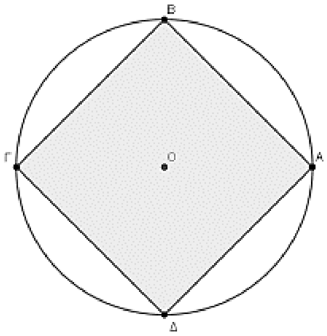
Λύση

α) Το μήκος της χορδής ΒΓ είναι $ΒΓ = 3\sqrt{3} = \rho\sqrt{3}$ επομένως πρόκειται για πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Άρα, το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου ΒΓ είναι 120°.

β) $\ell_{ΒΓ} = \frac{\pi\rho\mu}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = 2\pi$

γ) $\left(Ο.ΒΓ\right) = \frac{\pi\rho^2\mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = 3\pi$

21075.Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π.



α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.

(Μονάδες 07)

β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο.

(Μονάδες 09)

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.

(Μονάδες 09)

Λύση

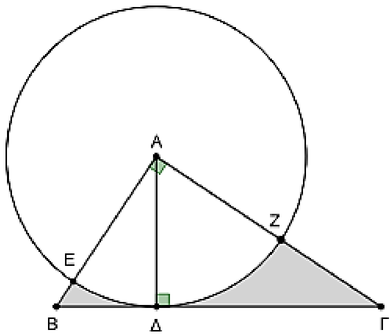
α) Είναι $Ε = πρ^2 \Leftrightarrow 16π = πρ^2 \Leftrightarrow ρ^2 = 16 \Leftrightarrow ρ = 4$.

β) i. Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα ρ ισούται με $ρ\sqrt{2}$. Επομένως για ρ = 4 έχουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι $ΑΒ = 4\sqrt{2}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι 16π, ενώ το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $Ε = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$.

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το τετράγωνο είναι ίσο με 16π – 32.

21121.Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει υποτείνουσα ΒΓ = 13 και αντίστοιχο ύψος ΑΔ = 6. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου , στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.



α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

i. του κυκλικού τομέα ΑΕΔΖ, (Μονάδες 9)

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

(Μονάδες 8)

Λύση

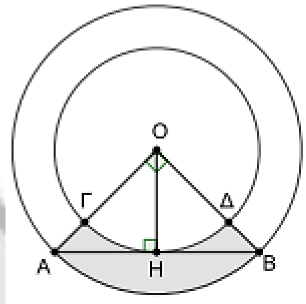
α) $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$

β) i) $\left(ΑΕΔΖ\right) = \frac{πR^2μ}{360^\circ} = \frac{π \cdot 6^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 9π$

ii) Το εμβαδόν του χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου ΑΒΓ και του κυκλικού τομέα ΑΕΔΖ, οπότε

$Ε = (ΑΒΓ) - \left(ΑΕΔΖ\right) = 39 - 9π$

21123.Στο τρίγωνο ΟΑΒ του σχήματος είναι $\widehat{AOB} = 90^\circ$, ΟΑ = ΟΒ = 2 και το ΟΗ είναι το ύψος του από την κορυφή Ο. Με κέντρο το Ο και ακτίνα R = ΟΑ και ρ = ΟΗ γράφουμε δύο ομόκεντρους κύκλους. Ο κύκλος (Ο,ρ) τέμνει τις ΟΑ και ΟΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $OH = \sqrt{2}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων ΟΑΒ και ΟΓΔ. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους που περικλείεται από τα τόξα ΑΒ και ΓΔ και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ. (Μονάδες 5)

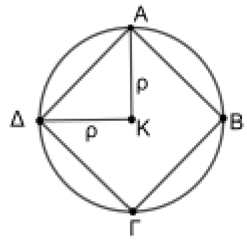
Λύση

α) Επειδή $\widehat{AOB} = 90^\circ$, το ΟΗ είναι το απόστημα τετραγώνου πλευράς ΑΒ, εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο,R), οπότε $OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Όμως R= ΟΑ = 2, άρα $OH = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

β) $\left(OAB\right) = \frac{\pi\rho^2\mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \pi$, $\left(O\Gamma\Delta\right) = \frac{\pi\rho^2\mu}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{2}$

γ) Το εμβαδόν Ε του σκιασμένου μέρους, είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων ΟΑΒ και ΟΓΔ, δηλαδή $E = \left(OAB\right) - \left(O\Gamma\Delta\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

21300.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ, ρ), όπως στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 08)

β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$. (Μονάδες 07)

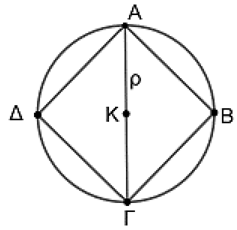
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (Κ, ρ). (Μονάδες 10)

Λύση

α) Η γωνία ΑΚΔ είναι η κεντρική γωνία ω_4 του τετραγώνου ΑΒΓΔ, άρα $\widehat{AK\Delta} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Επομένως το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την ΑΚΔ και υποτείνουσα την ΑΔ.

β) $\left(AK\Delta\right) = \frac{1}{2}K\Delta \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \rho = \frac{1}{2}\rho^2 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{2}\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 8 \Leftrightarrow \rho = 2\sqrt{2}$

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = \pi\rho^2 = \pi\left(\sqrt{8}\right)^2 = 8\pi$



21301.Σε κύκλο (Κ, ρ) εμβαδού Ε = 4π είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ, όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα ρ του κύκλου (Κ, ρ). **(Μονάδες 07)**

β) το μήκος της διαμέτρου ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) και της πλευράς ΑΒ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. **(Μονάδες 10)**

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ. **(Μονάδες 08)**

Λύση

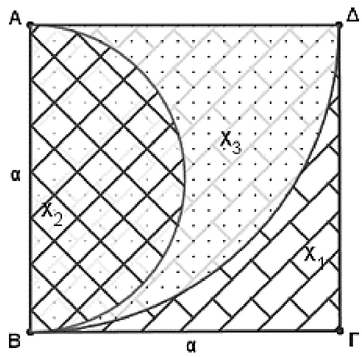
α) Για το εμβαδόν Ε του κύκλου (Κ, ρ) ισχύει ότι $E=\pi\rho^2 \Leftrightarrow 4\pi=\pi\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=4 \Leftrightarrow \rho=2$

β) Είναι ΑΓ= 2ρ = 4 και από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$AB^2+B\Gamma^2=A\Gamma^2 \overset{AB=B\Gamma}{\Leftrightarrow} 2AB^2=4^2 \Leftrightarrow 2AB^2=16 \Leftrightarrow AB^2=8 \Leftrightarrow AB=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

γ) $(AB\Gamma\Delta)=AB^2=8$

4ο Θέμα



17599.Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.

α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με: $(X_1)=\frac{\alpha^2}{4}\cdot(4-\pi)$. **(Μονάδες 5)**

β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3. **(Μονάδες 11)**

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 θα υπολογιστεί, αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ. Έχουμε

$$(X_1)=(AB\Gamma\Delta)-(A.B\Delta)=\alpha^2-\frac{\pi\alpha^2}{4}=\frac{\alpha^2}{4}\cdot(4-\pi)$$

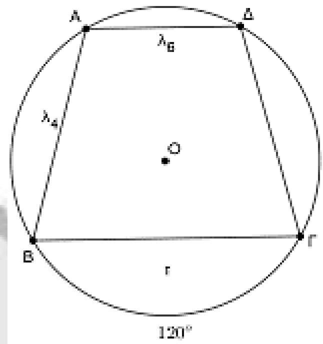
β) Το X_2 είναι ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ , οπότε: $(X_2)=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{8}$.

Το εμβαδόν X_3 θα υπολογισθεί αν από το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου αφαιρέσουμε το X_2 και θα έχουμε:

$$(X_3)=(AB\Delta)-(X_2)=\frac{\pi\alpha^2}{4}-\frac{\pi\alpha^2}{8}=\frac{\pi\alpha^2}{8}$$

γ) $(X_2)-(X_1)=\frac{\pi\alpha^2}{8}-\frac{\alpha^2(4-\pi)}{4}=\frac{\pi\alpha^2-2\alpha^2(4-\pi)}{8}=\frac{\pi\alpha^2-8\alpha^2+2\pi\alpha^2}{8}=\frac{\alpha^2}{8}(3\pi-8)>0 \Leftrightarrow (X_2)>(X_1)$

18043.Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Η πλευρά ΑΔ είναι ίση με την πλευρά λ_6 κανονικού εξάγωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.



α) Αν η πλευρά ΑΒ ισούται με την πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο $ΒΓ = 120^\circ$:

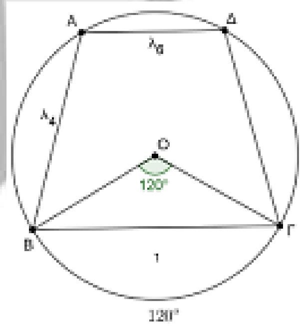
i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας.
(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία $ΒΟΓ$.
(Μονάδες 10)

β) Κρατάμε τα σημεία Α και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή ΒΓ παράλληλα προς την ΑΔ ώστε να διέρχεται από το Ο. Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου ΑΒ;
(Μονάδες 07)

Λύση

α) i. ΑΒ = λ_4, επομένως $ΑΒ = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο τετραγώνου.



Είναι ΑΔ = λ_6, επομένως $ΑΔ = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο κανονικού εξάγωνου.

Επομένως $ΔΓ = 360^\circ - ΑΒ - ΒΓ - ΑΔ = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.

Επειδή το τόξο ΔΓ είναι 90°, είναι $ΔΓ = \lambda_4 = \rho\sqrt{2}$.

ii. Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος (τ) θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΒΓ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου (ΟΒΓ).

Είναι $\left(\overset{\frown}{ΟΒΓ}\right) = \frac{\pi\rho^2 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\rho^2}{3}$ και

$(ΟΒΓ) = \frac{1}{2} ΟΒ \cdot ΟΓ \cdot ημ120^\circ = \frac{1}{2}\rho \cdot \rho \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$, άρα $(\tau) = \frac{\pi\rho^2}{3} - \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$

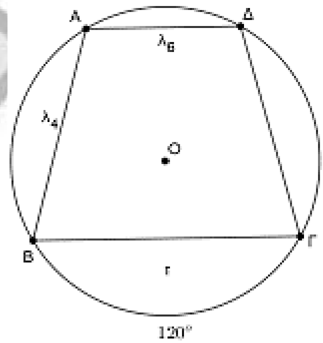
β) Αφού η ΒΓ διέρχεται από το Ο, τότε θα είναι διάμετρος παράλληλη στην ΑΔ.

Τα τόξα ΑΒ, ΓΔ είναι ίσα γιατί περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών.

Είναι $ΒΑ + ΑΔ + ΔΓ = 180^\circ \Leftrightarrow 2ΒΑ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2ΒΑ = 120^\circ \Leftrightarrow ΒΑ = 60^\circ$

Άρα το μήκος του τόξου ΑΒ είναι: $\ell_{ΑΒ} = \frac{\pi\rho \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi\rho}{3}$.

18043.Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Η πλευρά ΑΔ είναι ίση με την πλευρά λ_6 κανονικού εξάγωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.



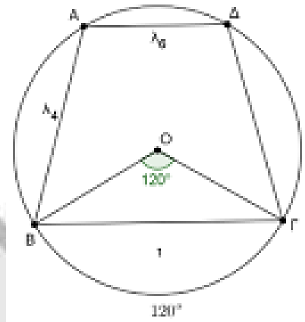
α) Αν η πλευρά ΑΒ ισούται με την πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο $ΒΓ = 120^\circ$:

i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας.
(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία $ΒΟΓ$. (Μονάδες 10)

β) Κρατάμε τα σημεία Α και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή ΒΓ παράλληλα προς την ΑΔ ώστε να διέρχεται από το Ο. Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου ΑΒ;
(Μονάδες 07)

Λύση



α) i. Είναι ΑΒ = λ_4, επομένως $AB = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο τετραγώνου.

Είναι ΑΔ = λ_6, επομένως $A\Delta = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ γιατί αντιστοιχεί σε τόξο κανονικού εξάγωνου.

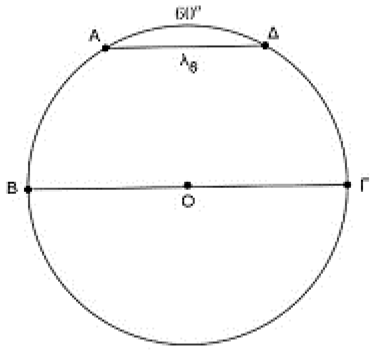
Επομένως $\Delta\Gamma = 360^\circ - AB - A\Delta = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 60^\circ = 90^\circ$

Επειδή το τόξο ΔΓ είναι 90°, η χορδή ΔΓ = λ_4, δηλαδή ισούται με $\rho\sqrt{2}$.

ii. Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος (τ) θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O.B\Gamma$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου (ΟΒΓ).

Είναι $\left(O.B\Gamma\right) = \frac{\pi\rho^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\rho^2}{3}$ και $\left(OB\Gamma\right) = \frac{1}{2}OB \cdot O\Gamma \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2}\rho \cdot \rho \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$,

οπότε $\left(\tau\right) = \frac{\pi\rho^2}{3} - \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$



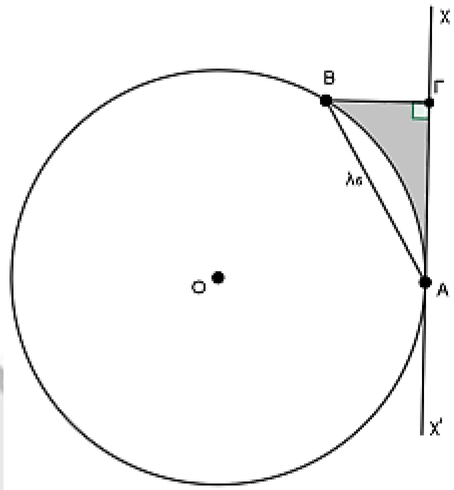
β) Αφού η ΒΓ διέρχεται από το Ο, τότε θα είναι διάμετρος παράλληλη στην ΑΔ.

Τα τόξα ΑΒ, ΓΔ είναι ίσα γιατί περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών.

Είναι $BA + A\Delta + \Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2BA + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$2BA = 120^\circ \Leftrightarrow BA = 60^\circ$ άρα το μήκος του τόξου ΑΒ είναι:

$\ell_{AB} = \frac{\pi\rho\mu}{180^\circ} = \frac{\pi\rho \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi\rho}{3}$.



21197.Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2α και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $\left(AB\Gamma\Delta\right) = \frac{80}{\pi}$. **(Μονάδες 6)**

ii. $A\Lambda^2 = \frac{100}{\pi}$. **(Μονάδες 6)**

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο AMN, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ. **(Μονάδες 8)**

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου AMN προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) i. Το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ = 2α έχει ακτίνα α και εμβαδόν $E_{AB} = \frac{\pi\alpha^2}{2}$.Αφού το εμβαδό του ημικυκλίου είναι 10 τότε: $10 = \frac{\pi\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 20 = \pi\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{20}{\pi}$.

Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ με πλευρά 2α είναι: $(\text{ΑΒΓΔ})=(2\alpha)^2=4\alpha^2=4\cdot\frac{20}{\pi}=\frac{80}{\pi}$.

ii. Το σημείο Λ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ του τετραγώνου, επομένως $\text{ΔΛ}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΛ εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\text{ΑΛ}^2=\text{ΑΔ}^2+\text{ΔΛ}^2=(2\alpha)^2+\alpha^2=4\alpha^2+\alpha^2=5\alpha^2=5\cdot\frac{20}{\pi}=\frac{100}{\pi}$$

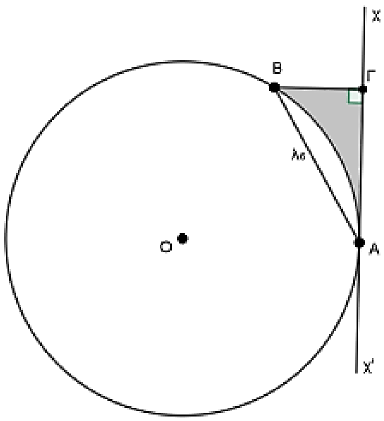
β) i. Το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος, υπολογίζεται αν από το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου Α.ΜΝ αφαιρέσουμε το εμβαδό $E_{AB}=\frac{\pi\cdot\frac{20}{\pi}}{2}=10$ του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ.

Είναι $(\text{Α.ΜΝ})=\frac{\pi\cdot\text{ΑΔ}^2}{4}=\frac{\pi\cdot\frac{100}{\pi}}{4}=25$ επομένως το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος είναι:

$E=(\text{Α.ΜΝ})-E_{AB}=25-10=15$.

ii. Είναι $\frac{(\text{Α.ΜΝ})}{(\text{ΑΒΓΔ})}=\frac{25}{\frac{80}{\pi}}=\frac{25\pi}{80}=\frac{5\pi}{16}$

20361.Δίνεται κύκλος (Ο,R) και η χορδή του ΑΒ ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.
Στο σημείο Α φέρνουμε την εφαπτομένη x΄x του κύκλου και από το Β την κάθετη στην x'x που την τέμνει στο Γ.
Να αποδείξετε ότι:



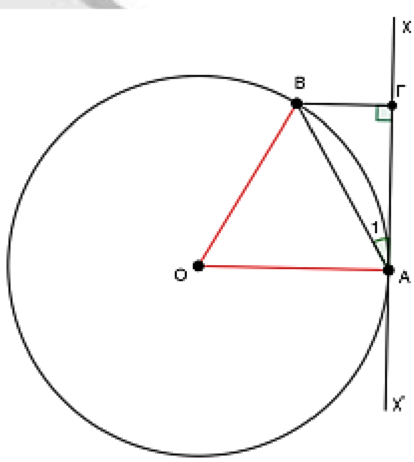
α) $\text{ΑΓ}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **(Μονάδες 8)**

β) $(\text{ΟΑΓΒ})=\frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$. **(Μονάδες 7)**

γ) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι: $E=\frac{(9\sqrt{3}-4\pi)R^2}{24}$.

(Μονάδες 10)

Λύση



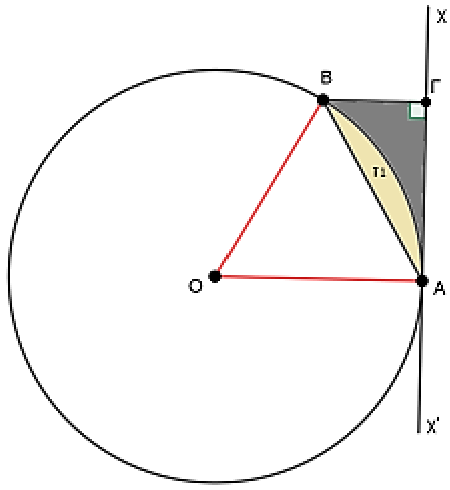
α) Από τα δεδομένα, η ΑΒ είναι πλευρά κανονικού 6-γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο οπότε το τόξο ΑΒ θα ισούται με $\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$. Άρα και η επίκεντρη γωνία ΑΟΒ θα ισούται με 60° επομένως το τρίγωνο ΟΑΒ θα είναι ισόπλευρο πλευράς R.
Δηλαδή ΑΒ = R = ΟΑ = ΟΒ και επιπλέον θα έχει όλες του τις γωνίες ίσες με 60°.
Η ΟΑ ως ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη x΄x, επομένως η γωνία ΟΑΓ είναι ορθή.
Άρα η γωνία A_1 θα ισούται με 30°, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\text{ΒΓ}=\frac{\text{ΑΒ}}{2}=\frac{R}{2}$.

Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 - ΒΓ^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow ΑΓ = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

β) Λόγω του ερωτήματος (α), οι ΟΑ, ΒΓ ως κάθετες στην x΄x, θα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι τραπέζιο με βάσεις ΟΑ, ΒΓ και ύψος ΑΓ. Οπότε

$$(ΟΑΓΒ) = \frac{(ΟΑ + ΒΓ)ΑΓ}{2} = \frac{\left(R + \frac{R}{2}\right)\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{3R}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$$



γ) Το ζητούμενο εμβαδό θα βρεθεί αν από το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ, αφαιρέσουμε το εμβαδό του κυκλικού τμήματος $τ_1$. Δηλαδή Ε = (ΑΒΓ) – $(τ_1)$(1).

Είναι $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΒΓ\cdot ΑΓ = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$ και

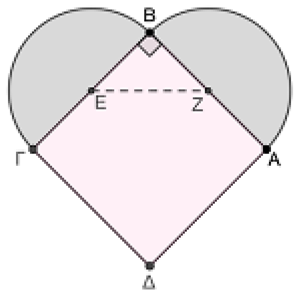
$$(τ_1) = (Ο.ΑΒ) - (ΟΑΒ) = \frac{πR^2\cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$(τ_1) = \frac{πR^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2πR^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12}$$

Οπότε η (1) γίνεται:

$$Ε = \frac{R^2\sqrt{3}}{8} - \frac{2πR^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12} = ... = \frac{\left(9\sqrt{3} - 4π\right)R^2}{24}$$

21103.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και με διαμέτρους τις ΒΓ και ΒΑ φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με $πα$. (Μονάδες 07)

β) i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι 2π +4, να υπολογίσετε το α. (Μονάδες 06)

ii. Αν α = 1 να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων. (Μονάδες 06)

γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο $\frac{(τ)}{(ΑΒΓΔ)}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)

Λύση

α) Το κάθε ημικύκλιο έχει ακτίνα ρ ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή $ρ = \frac{2α}{2} = α$.

Το μήκος του κάθε ημικυκλίου είναι $\frac{1}{2}\cdot 2πρ = πα$.

β) i. Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ. Από το α) ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος πα οπότε η περίμετρος θα ισούται με $πα + πα + 2α + 2α = 2πα + 4α$. Από υπόθεση έχουμε ότι η περίμετρος είναι 2π + 4, οπότε $2πα + 4α = 2π + 4 \Leftrightarrow (2π + 4)α = 2π + 4$, άρα α = 1.

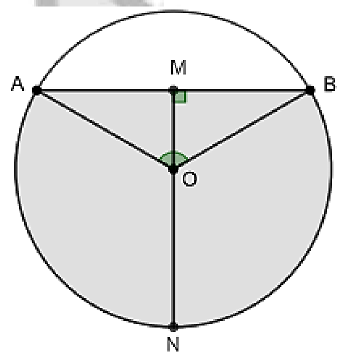
ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ έχουμε ΒΕ = ΒΖ = α. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$ΕΖ^2 = ΒΕ^2 + ΒΖ^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Leftrightarrow ΕΖ = \sqrt{2}$$

γ) Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα α, οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α. Το εμβαδόν του θα είναι $(\tau)=\pi\rho^2=\pi\alpha^2$.

Είναι $(ΑΒΓΔ)=ΑΒ^2=4\alpha^2$, οπότε $\frac{(\tau)}{(ΑΒΓΔ)}=\frac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{4}<1$

21127.Ο κυκλικός δίσκος του διπλανού σχήματος έχει κέντρο Ο και ακτίνα R. Έστω ΑΒ μια χορδή του κύκλου και Μ η προβολή του Ο στην ΑΒ. Αν η ΜΟ προεκταθεί προς το Ο, τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ν. Δίνεται ότι $ΜΝ=\frac{3R}{2}$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΒ=R\sqrt{3}$, (Μονάδες 6)

ii. $ΑΟΒ=120^\circ$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέστε ότι η διατομή ενός αγωγού μεταφοράς νερού είναι ο κυκλικός δίσκος του σχήματος που έχει δοθεί με R = 10 cm.
Η στάθμη του νερού που ρέει στον αγωγό είναι στη χορδή ΑΒ και το ΜΝ = 15cm. Να βρείτε:
i. το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος που περικλείεται από την χορδή ΑΒ και το τόξο $ΑΝΒ$. (Μονάδες 7)
ii. το μήκος του τόξου $ΑΝΒ$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) i) Είναι $ΜΝ=\frac{3R}{2}$ και ΟΝ=R, άρα $ΟΜ=\frac{R}{2}$. Όμως $\alpha_3=\frac{R}{2}$, οπότε η έχει απόστημα ίσο με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (O,R) οπότε $ΑΒ=\lambda_3=R\sqrt{3}$.

ii) Η γωνία ΑΟΒ είναι ίση με την κεντρική γωνία ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο , άρα $ΑΟΒ=\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$.

β) i) Είναι R=10 cm, οπότε $ΑΒ=10\sqrt{3}$ cm και $ΟΜ=\frac{10}{2}=5$ cm

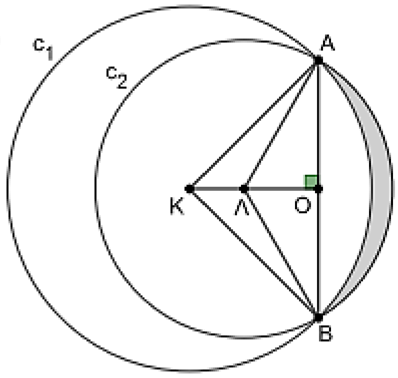
Είναι $(ΑΟΒ)=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΟΜ=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{3}\cdot 5=25\sqrt{3}\,cm^2$ και $(ΟΑΝΒ)=\frac{\pi R^2\mu}{360^\circ}=\frac{\pi 10^2\cdot 240^\circ}{360^\circ}=\frac{200\pi}{3}\,cm^2$

Επομένως το εμβαδόν που περικλείεται από την χορδή και το τόξο $ΑΝΒ$ είναι

$$Ε=(ΑΟΒ)+(ΟΑΝΒ)=\left(25\sqrt{3}+\frac{200\pi}{3}\right)cm^2$$

ii. $\ell_{ΑΝΒ}=\frac{\pi\cdot 10\cdot 240^\circ}{180^\circ}=\frac{40\pi}{3}$ cm

21138.Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος C_1 έχει κέντρο Κ και ακτίνα R και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο Λ και ακτίνα ρ = 2.
Οι αποστάσεις των Κ και Λ από την κοινή χορδή ΑΒ των δύο κύκλων είναι $KO=\sqrt{3}$ και $\Lambda O=1$.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. $OA=\sqrt{3}$. (Μονάδες 6)
ii. $R=\sqrt{6}$. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε τα εμβαδά:
i. των κυκλικών τομέων ΚΑΒ και ΛΑΒ. (Μονάδες 8)
ii. του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος. (Μονάδες 5)

Λύση

α) i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΛΟΑ η υποτείνουσα ΑΛ=ρ=2 και η ΛΟ=1, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι $OA^2=A\Lambda^2-\Lambda O^2=2^2-1^2=4-1=3\Leftrightarrow OA=\sqrt{3}$

ii. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ είναι:
$AK^2=KO^2+OA^2\Leftrightarrow R^2=2\left(\sqrt{3}\right)^2=6\Leftrightarrow R=\sqrt{6}$

β) Η ευθεία ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής, άρα το Ο είναι το μέσο της ΑΒ, οπότε $AB=2OA=2\sqrt{3}$.

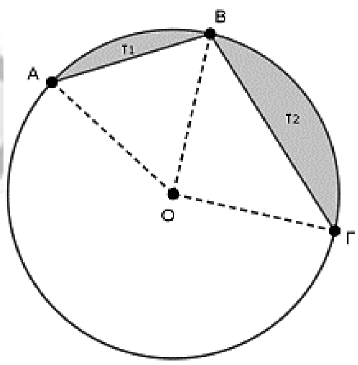
i) Είναι $AB=2\sqrt{3}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{12}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=R\sqrt{2}=\lambda_4$, άρα η ΑΒ είναι πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο C_1, άρα η κεντρική του γωνία είναι $AKB=90^\circ$.

$$\left(KAB\right)=\frac{\pi R^2\mu}{360^\circ}=\frac{\pi\left(\sqrt{6}\right)^2\cdot 90^\circ}{360^\circ}=\frac{3\pi}{2}.$$

Είναι $AB=2\sqrt{3}=\rho\sqrt{3}=\lambda_3$, δηλαδή η ΑΒ είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο C_2, άρα η κεντρική του γωνία είναι $A\Lambda B=120^\circ$. $\left(\Lambda AB\right)=\frac{\pi R^2\mu}{360^\circ}=\frac{\pi\cdot 2^2\cdot 120^\circ}{360^\circ}=\frac{4\pi}{3}$.

ii) $E=\left(\Lambda AB\right)-\left(KAB\right)+(KAB)-(\Lambda AB)=\frac{4\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}-\frac{1}{2}2\cdot\sqrt{3}=-\frac{\pi}{6}+3-\sqrt{3}$

21659.Για τα σημεία Α, Β και Γ του κύκλου (Ο,R) στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι ΑΒ = R και $B\Gamma=R\sqrt{2}$.
Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R:



α) τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ. (Μονάδες 8)
β) το μήκος του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΓ και το εμβαδό του κυκλικού τομέα $\left(O A\Gamma\right)$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία ΑΟΓ. (Μονάδες 8)
γ) το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων (τ_1) και (τ_2), όπως αυτά σημειώνονται στο σχήμα. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε: ΑΒ = R = λ_6, οπότε το τόξο ΑΒ αντιστοιχεί στην κεντρική γωνία κανονικού 6-γώνου, άρα $AOB=60^\circ$, επομένως το μέτρο του τόξου ΑΒ ισούται με μ = 60° (1).
Είναι $B\Gamma=R\sqrt{2}=\lambda_4$ οπότε το τόξο ΒΓ αντιστοιχεί στην κεντρική γωνία κανονικού 4-γώνου, άρα

$\text{ΒΟΓ} = 90^\circ$ επομένως το μέτρο του τόξου ΒΓ ισούται με μ = 90º (2).

Είναι $\ell_{\text{ΑΒ}} = \dfrac{\pi R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \dfrac{\pi R}{3}$ και $\ell_{\text{ΒΓ}} = \dfrac{\pi R \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \dfrac{\pi R}{2}$

β) Λόγω των (1), (2) για την κυρτή γωνία ΑΟΓ έχουμε: $\text{ΑΟΓ} = \text{ΑΟΒ} + \text{ΒΟΓ} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

Το μήκος ℓ_3, του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΓ, θα βρεθεί αν από το μήκος του κύκλου αφαιρέσουμε τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ, που υπολογίσαμε στο ερώτημα (α). Δηλαδή:

$\ell_2 = 2\pi R - \ell_{\text{ΑΒ}} - \ell_{\text{ΒΓ}} = 2\pi R - \dfrac{\pi R}{3} - \dfrac{\pi R}{2} = \dfrac{7\pi R}{6}$. Ακόμη $\left(\text{ΟΑΓ}\right) = \dfrac{\pi R^2 \cdot 150^\circ}{360^\circ} = \dfrac{5\pi R^2}{12}$

γ) Για το εμβαδό τ_1, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΑΒ έχουμε:

$$\left(\tau_1\right) = \left(\text{ΟΑΒ}\right) - \left(\text{ΟΑΒ}\right) = \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)R^2}{12}$$

Για το εμβαδό τ_2, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΒΓ έχουμε:

$$\left(\tau_2\right) = \left(\text{ΟΒΓ}\right) - \left(\text{ΟΒΓ}\right) = \frac{\pi R^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2}R \cdot R = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{\left(\pi - 2\right)R^2}{4}.$$

Οπότε $\left(\tau_1\right) + \left(\tau_2\right) = \dfrac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)R^2}{12} + \dfrac{\left(\pi - 2\right)R^2}{4} = \dfrac{\left(5\pi - 6 - 3\sqrt{3}\right)R^2}{12}$