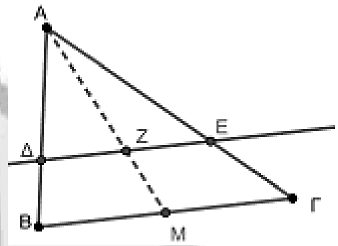
Θεώρημα Θαλή

2ο Θέμα

14534. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6 και ΑΓ=9. ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Ζ εσωτερικό στην ΑΜ ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM}=\frac{2}{3}$. Από το σημείο Ζ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma}=2$. (Μονάδες 15)

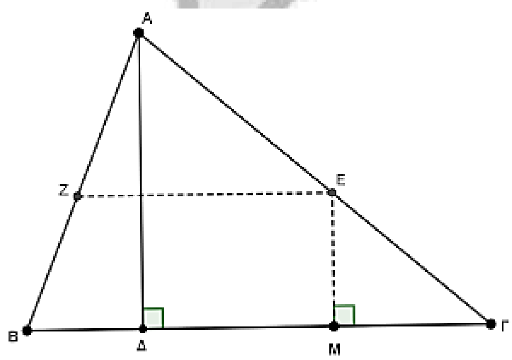
β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΓΕ. (Μονάδες 10)

14579. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΑΓ. Επίσης ΑΒ = 3ΑΔ.

α) Να βρείτε τους λόγους $\frac{B\Delta}{A\Delta}$ και $\frac{BE}{E\Gamma}$. (Μονάδες 15)

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΓ = 3,9 και ΓΖ = 1,3 να αποδείξετε ότι η ΖΕ είναι παράλληλη της ΑΒ. (Μονάδες 10)

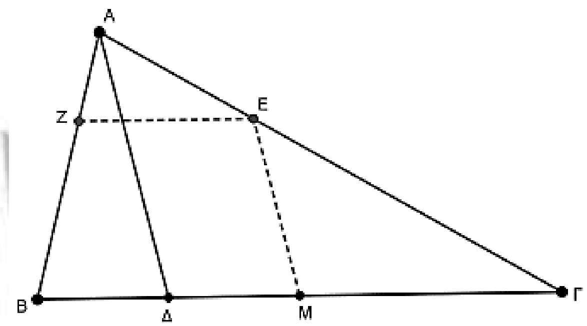
15830. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά ΒΓ σε ένα άλλο σημείο της Μ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{ZA}{ZB}=\frac{EA}{E\Gamma}$ (Μονάδες 10)

β) $\frac{ZA}{ZB}=\frac{M\Delta}{M\Gamma}$ (Μονάδες 15)

15831. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ και το Δ είναι το μέσο του ΜΒ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{EA}{E\Gamma}=\frac{1}{2}$ (Μονάδες 15)

β) $\frac{ZA}{ZB}=\frac{1}{2}$ (Μονάδες 10)

14535. Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: ΑΒ = 9, ΑΓ =15 και $A = 48^\circ$, $Z\Delta = 12$, $ZE = 20$ και $Z = 48^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

14536. Για δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ) γνωρίζουμε ότι: $A = 48^\circ$, $Z = 66^\circ$ και $AB = 3\cdot E\Delta$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΖ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων. (Μονάδες 12)

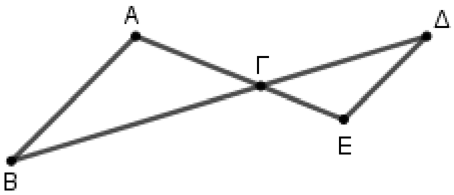
14537. Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: $A = 48^\circ$, $B = 53^\circ$, $E = 79^\circ$ και $Z = 48^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; (Μονάδες 9)

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων. (Μονάδες 6)

14538. Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε ΑΓ= 2ΓΕ.

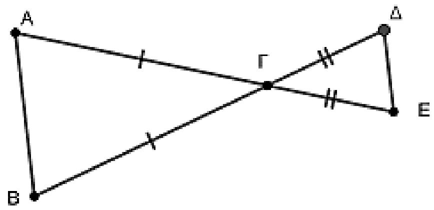


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων; (Μονάδες 12)

14546. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε ΑΒ = 2·ΔΕ.

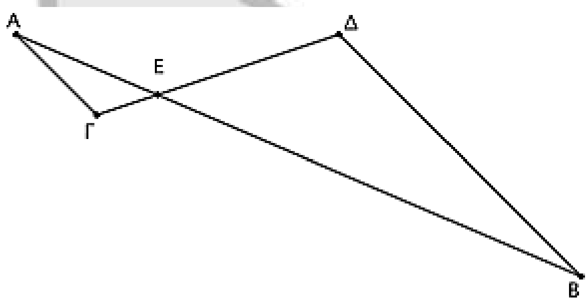


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων; (Μονάδες 12)

16100. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι ΑΕ = 5, ΑΓ = 4, ΕΓ = 2, ΔΕ = 6, ΒΕ = 15 και ΒΔ = 12.



α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{B\Delta}{A\Gamma}, \frac{\Delta E}{E\Gamma}, \frac{BE}{AE}$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια. (Μονάδες 8)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΓ και ΒΕΔ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .

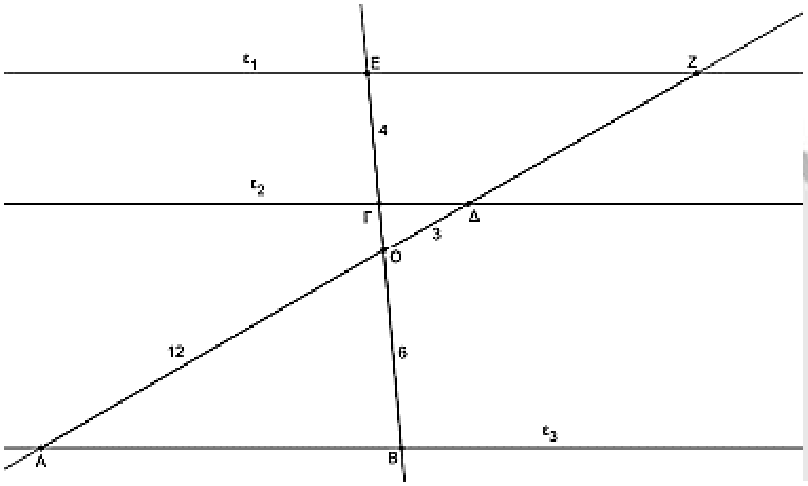
$A = \ldots\ldots\ldots$, $\Gamma = \ldots\ldots\ldots$, $AE\Gamma = \ldots\ldots\ldots$ (Μονάδες 8)

16086. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε1, ε2 και ε3 είναι παράλληλες. Δίνονται ότι ΓΕ = 4, ΟΔ = 3, ΟΑ = 12, ΟΒ = 6.

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΟΓ και ΔΖ. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ είναι όμοια. (Μονάδες 09)

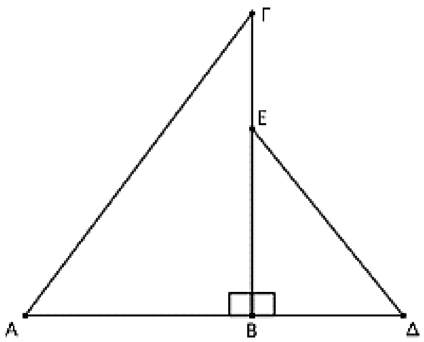
γ) Αν ΟΓ = 1.5 και ΔΖ = 8, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{AB}$. (Μονάδες 06)



16099. Στο διπλανό σχήμα δίνονται Α = Δ ,ΑΓ = 36, ΒΔ = 16 και ΕΔ = 24.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ. (Μονάδες 10)

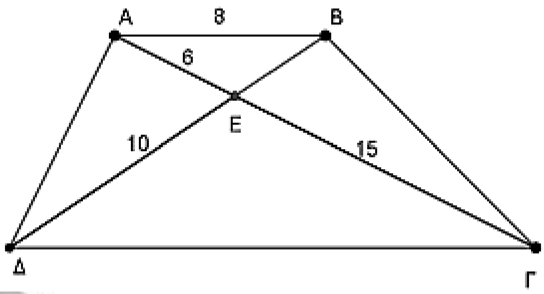


16113. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΔΓ, Ε σημείο τομής των διαγώνιων, ΑΕ = 6, ΑΒ = 8, ΓΕ = 15 και ΔΕ = 10.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ είναι όμοια. (Μονάδες 09)

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 09)

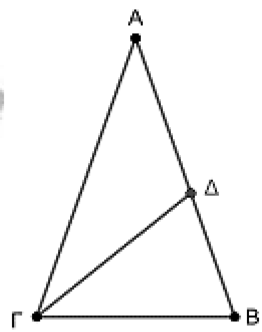
γ) Να υπολογίστε τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ. (Μονάδες 07)



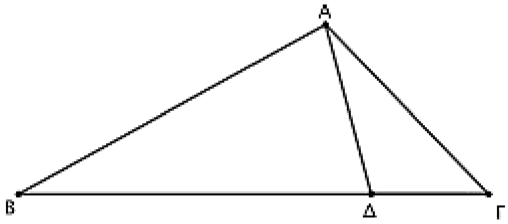
16126. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ = 36 και ΒΓ =24. Το σημείο της Δ πλευράς ΑΒ είναι τέτοιο ώστε ΒΔ = 16.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ. (Μονάδες 12)



16755. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΓ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τέτοιο ώστε ΑΓ = 2ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$ και $\frac{ΑΓ}{ΓΔ}$.

(Μονάδες 8)

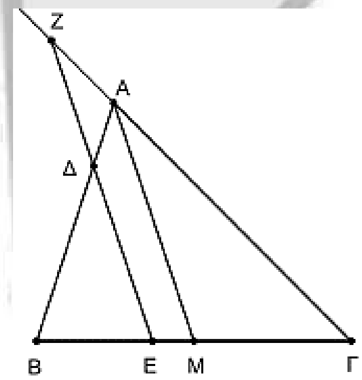
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια. (Μονάδες 9)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΑΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$\hat{ΒΑΓ} = ...$, $\hat{Β} = ...$ (Μονάδες 8)

4ο Θέμα

14499. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{ΔΕ}{...} = \frac{...}{ΒΜ} = \frac{ΒΔ}{...}$

ii. $\frac{...}{ΑΜ} = \frac{ΓΕ}{...} = \frac{...}{ΓΑ}$

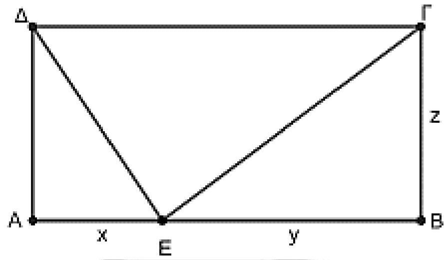
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ + ΕΖ = 2ΑΜ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ. (Μονάδες 13)

Πυθαγόρειο Θεώρημα

$2^{ο}$ Θέμα

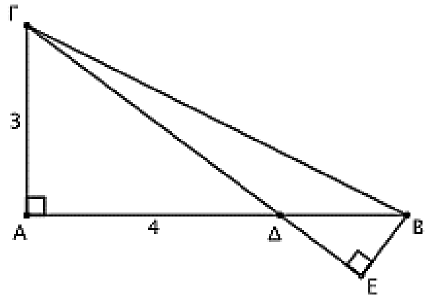
16805. Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι x = 8, y = 16 και z = 12. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ. (Μονάδες 12)

16757. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^{\circ}$, ΑΒ = 6 και ΑΓ = 3.. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε ΑΔ = 4. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

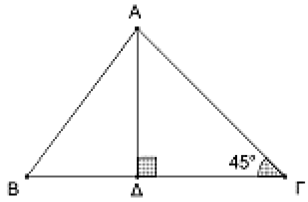


α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 8)

17342. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 7, $\Gamma = 45^{\circ}$ και ύψος ΑΔ = 4.



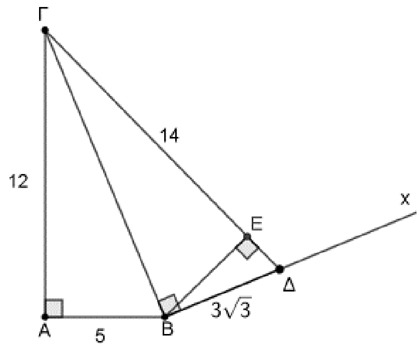
α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΓΔ = 4. (Μονάδες 5)

ii. $A\Gamma = 4\sqrt{2}$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ. (Μονάδες 12)

21067. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^{\circ}$, ΑΓ = 12 και ΑΒ = 5.



α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 13. (Μονάδες 08)

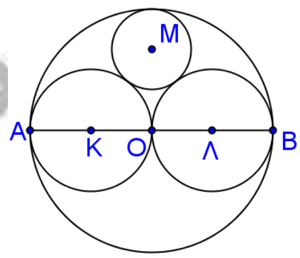
β) Φέρουμε ημιευθεία Βx κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΔΓ = 14, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 3\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ. (Μονάδες 09)

$4^{ο}$ Θέμα

14500. Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ο. Ένας τρίτος κύκλος (Μ, ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων Κ και Λ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

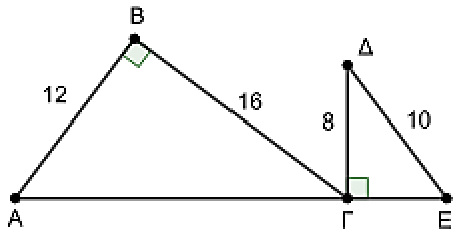


α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των κύκλων με κέντρα Κ, Λ, Μ και Ο και στη στήλη Β τα μήκη των διακέντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στη κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες. (Μονάδες 06)

Στήλη Α	Στήλη Β
Διάκεντρος	Μήκος
1. ΚΛ	i. R
2. ΛΜ	ii. 2R
3. ΟΜ	iii. R+ρ
	iv. 2R-ρ

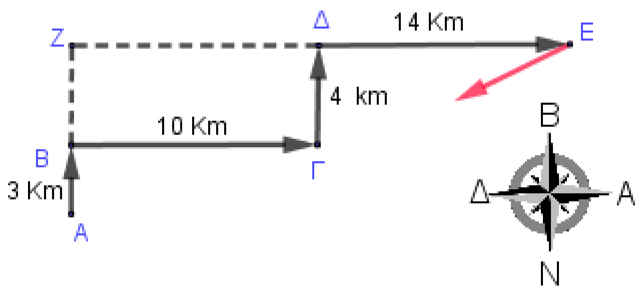
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα ΜΟ είναι το ύψος προς τη βάση του. (Μονάδες 06)
γ) Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου Μ ως συνάρτηση του R όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων Κ και Λ. (Μονάδες 13)

16133. Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα και έχουν μήκη αντίστοιχα και , οι γωνίες και είναι ορθές και τα σημεία και ανήκουν στην ίδια ευθεία.



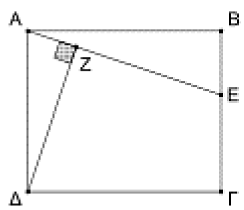
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ. (Μονάδες 7)
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια. (Μονάδες 7)
γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΕΔ είναι το Ζ και ΣΗ είναι το ύψος του τριγώνου ΖΑΕ από την κορυφή του . Να αποδείξετε ότι:
i. ΕΗ = 13, (Μονάδες 6)
ii. $ZH = \frac{52}{3}$ (Μονάδες 5)

14533. Δυο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίσει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



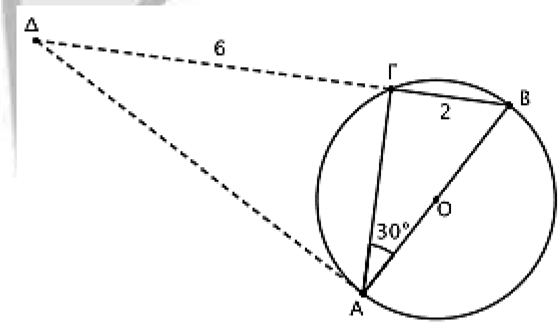
α) i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)
ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)
β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

17348. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με ΑΒ = 6 και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε ΒΕ = 2. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.



α) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)
γ) Αν ΔΖ = ΖΕ, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ. (Μονάδες 8)

21149. Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ΒΓ = 2, τότε:



α) Να υπολογίσετε:
i. Την ακτίνα R.
ii. Το μήκος της πλευράς ΑΓ. (Μονάδες 16)
β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε ΓΔ = 6. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος

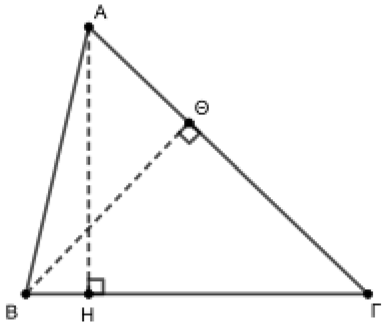
$2^{ο}$ Θέμα

14549. Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι : α=7, β=3 και γ=5.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 12)
β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)

16080. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5, $ΒΓ=\sqrt{41}$ και ΑΓ = 8.
α) Να σχεδιάσετε την προβολή ΑΔ, της ΑΒ στην ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)
β) Αν ΑΔ = 3, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΒΔ. (Μονάδες 12)

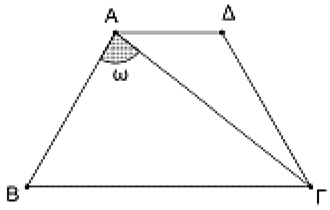
16101. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 8, ΑΓ = 6 και ΒΓ = 11.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)
β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 15)

16804. Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα όψη του ΑΗ και ΒΘ.



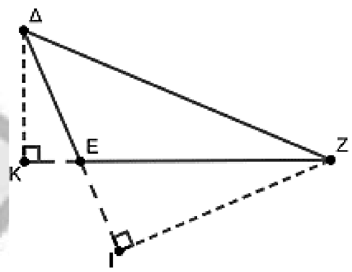
α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
i. Η προβολή την πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα …….
ii. Η προβολή τη πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ......
iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….
iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..
v. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ... - 2ΒΓ \cdot ...$
vi. $ΒΓ^2 = ... + ΑΓ^2 - 2... \cdot ΑΘ$
(Μονάδες 15)
β) Αν ΑΒ = 4, ΒΓ=5 και ΑΓ = 6, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ. (Μονάδες 10)

17343. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι ΑΔ = 3, ΑΒ = ΓΔ = 5, ΒΓ = 8 και $\hat{Δ} = 120^\circ$.



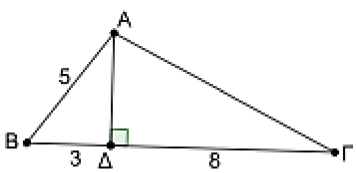
α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = 7. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι $συνω = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία $\hat{ΒΑΓ}$.
Δίνεται ότι $συν120^\circ = -\frac{1}{2}$. (Μονάδες 15)

17354. Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα όψη του ΔΚ και ΖΙ.



α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….
ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….
iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….
iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..
v. $ΔΖ^2 = ΔΕ^2 + ... + 2ΕΖ \cdot ...$
vi. $ΕΖ^2 = ... + ΔΖ^2 - 2... \cdot ΔΙ$ (Μονάδες 15)
β) Αν ΔΕ = 2, ΕΖ = 4 και ΔΖ = 5, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ. (Μονάδες 10)

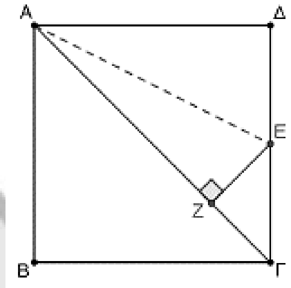
21302. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν ΒΔ = 3 και ΓΔ = 8 να αποδείξετε ότι:



α) ΑΔ = 4. (Μονάδες 07)
β) $ΑΓ = \sqrt{80}$. (Μονάδες 08)
γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)

3ο Θέμα

21102. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΓ = α\sqrt{2}$. (Μονάδες 09)

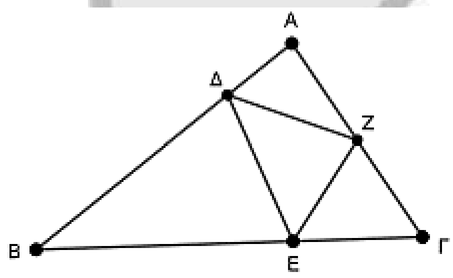
ii. $ΑΕ = α\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ. (Μονάδες 07)

Εμβαδό βασικών σχημάτων

2ο Θέμα

15978. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε:

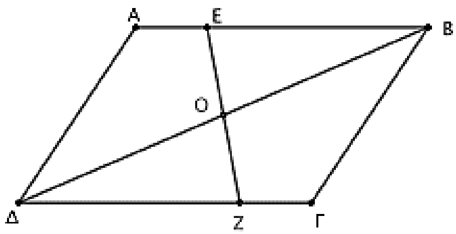


$ΑΔ = \frac{1}{4}ΑΒ$, $ΒΕ = \frac{2}{3}ΒΓ$ και $ΓΖ = \frac{1}{2}ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ΑΔΖ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ)$, $(ΒΕΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$, $(ΓΕΖ) = \frac{1}{6}(ΑΒΓ)$. (Μονάδες 15)

β) $(ΔΕΖ) = \frac{5}{24}(ΑΒΓ)$ (Μονάδες 10)

16102. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το κέντρο Ο φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ όπως φαίνεται στο σχήμα.

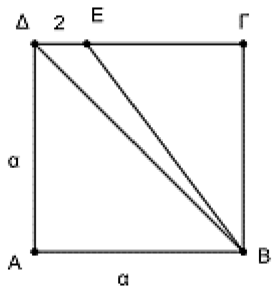


Να αποδείξετε ότι:

α) (ΔΟΖ) = (ΒΟΕ). (Μονάδες 10)

β) (ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ). (Μονάδες 15)

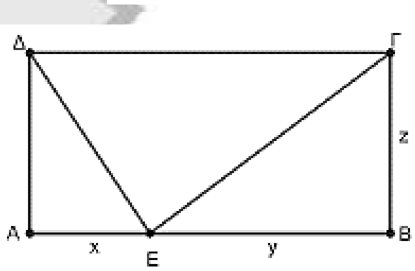
16817. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε ΔΕ = 2. Αν γνωρίζουμε ότι: $(ΒΕΔ) = \frac{(ΑΒΓΔ)}{8}$ τότε:



α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 12)

18550. Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 36 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

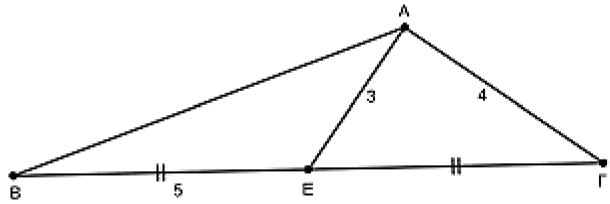


α) Να αποδείξετε ότι x = 4, y = 8 και z = 6. (Μονάδες 13)

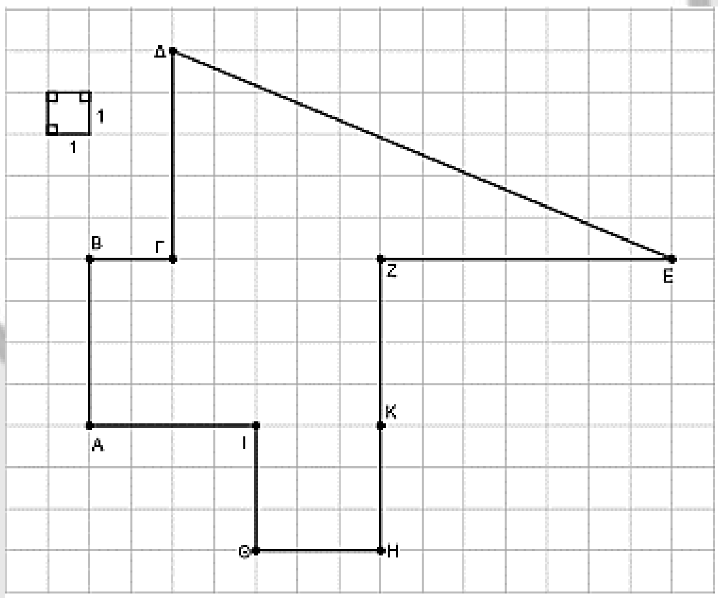
β) i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ.

ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου ΓΔΕ προς το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)

18559. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ έχει μήκος 3 και η πλευρά ΑΓ είναι ίση με 4.
Αν ΒΕ=5, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΑΕ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΓ. (Μονάδες 10)
β) i. Να δικαιολογήσετε γιατί (ΑΒΕ)=(ΑΓΕ). (Μονάδες 05)
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)



18558. Στο παρακάτω σχήμα:
α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ. (Μονάδες 10)
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΑ. (Μονάδες 15)

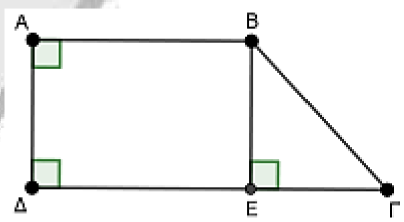


18560. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ. (Μονάδες 13)
β) Να υπολογίσετε το εμβαδό
i. του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
ii. του τραπεζίου ΑΕΓΔ. (Μονάδες 12)

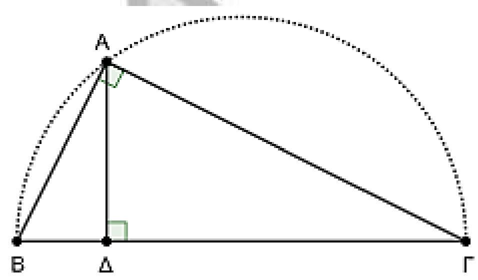
21101. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $ΒΓ=\sqrt{3}$, $ΑΒ=\sqrt{2}$, $ΑΓ=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $Α=90^\circ$. (Μονάδες 09)
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)
γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 09)

21823. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, με $Α=Δ=90^\circ$ και ΑΔ = 4, ΑΒ = 5, ΔΓ= 8. Από την κορυφή Β του τραπεζίου, φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην πλευρά ΔΓ.
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΓ. (Μονάδες 8)
β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ του τραπεζίου. (Μονάδες 9)
γ) Να υπολογίσετε το λόγο: $\dfrac{(ΒΔΓ)}{(ΑΒΓΔ)}$. (Μονάδες 8)

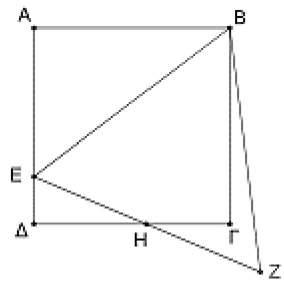


16135. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 10 και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής Α στην ΒΓ.
α) Αν ΔΒ = 2 να υπολογίσετε:
i. το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ, (Μονάδες 7)
ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)
β) Υποθέστε ότι το σημείο Α κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ.
i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ) = 5ΑΔ. (Μονάδες 7)
ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για όλες τις θέσεις του Α πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δεν υπερβαίνει το 25».
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

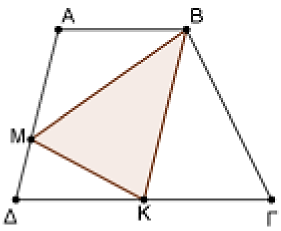


16807. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ = 24, ΒΓ = 12 και σημείο Ε στην ευθεία ΑΒ.
α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ όταν :
i. Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ.
ii. Το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου. (Μονάδες 16)
β) Αφήνουμε το σημείο Ε να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β.
i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ αυξάνεται ή μειώνεται. (Μονάδες 05)
ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ στο ερώτημα β)i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 04)

17349. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3 και σημείο Ε της πλευράς ΑΔ, ώστε $AE = 4-\sqrt{3}$. το ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία ΒΕ και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΕΖ. Οι ΓΔ και ΕΖ τέμνονται στο σημείο Η και $\Delta H = \sqrt{3}$.
α) Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7-2\sqrt{3}}$. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε το Η είναι το μέσο της ΕΖ. (Μονάδες 8)
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.
(Μονάδες 9)



18173. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΓΔ = 2ΑΒ. Δίνεται επίσης ότι το σημείο Κ είναι μέσο της ΓΔ και Μ τυχαίο σημείο στην ΑΔ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $(BK\Gamma) = \frac{1}{2}(AB K\Delta)$. (Μονάδες 09)
ii. (ΒΜΚ) = (ΒΚΓ) (Μονάδες 09)
β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο Μ κινείται πάνω στο εσωτερικό της ΑΔ, τότε ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓΔ) και (ΜΒΚ) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.
(Μονάδες 07)



18553. Δίνεται τετράγωνο με πλευρά α και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ = ΑΒ.
α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α:
i. Το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.
ii. Το μήκος της πλευράς ΣΓ του τριγώνου ΣΔΓ. (Μονάδες 10)
β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ΄ στην προέκταση της πλευράς ΑΒ προς το Β τέτοιο ώστε ΒΣ΄ > ΒΣ.
Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

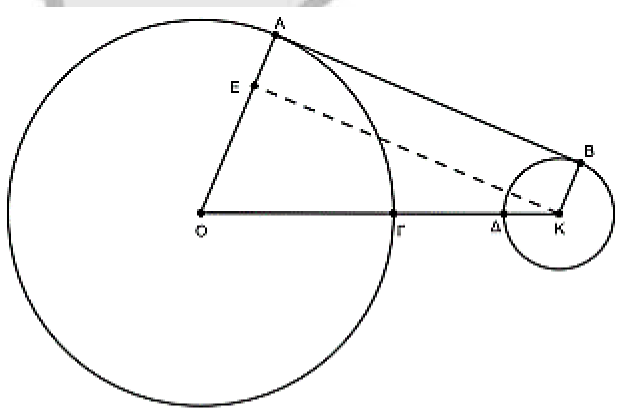
i. Το εμβαδό του τριγώνου Σ΄ΔΓ με το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ.
ii. Το μήκος της πλευράς Σ΄Γ με το μήκος της πλευράς ΣΓ των τριγώνων Σ΄ΔΓ και ΣΔΓ αντίστοιχα.
iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες ΣΓ και Σ΄Γ. (Μονάδες 15)

18557.Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ, ώστε ΑΒ > ΓΔ. Από τις κορυφές Γ κα Δ φέρουμε ΓΕ//ΑΔ και ΔΖ//ΓΒ, με Ε και Ζ σημεία στην πλευρά ΑΒ του τραπεζίου.
α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ. (Μονάδες 9)
β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)
γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά; (Μονάδες 8)

18562.Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.
α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του. (Μονάδες 05)
β) i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ. (Μονάδες 07)
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)
γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιεγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμα πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

18564.Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.
α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας. (Μονάδες 10)
β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που κα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.
i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου. (Μονάδες 08)
ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

18565.Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Κ. Ο κύκλος με κέντρο Ο έχει ακτίνα R=7 ενώ ο κύκλος με κέντρο Κ έχει ακτίνα ρ=2. Το τμήμα ΑΒ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο τμήμα ΑΒ με Ε σημείο του τμήματος ΟΑ. Η διάκεντρος ΟΚ τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (Κ,ρ) στο σημείο Δ.



α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι ΓΔ=4, τότε:
i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΟ. (Μονάδες 07)
β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του ΑΒΚΕ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ. ; (Μονάδες 08)

18566.Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 90^\circ$.
Με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ. Από τα σημεία Γ και Ζ φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Η.
α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου. (Μονάδες 10)
β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:
Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».
Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά». Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

21124.α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α = 40, β = 25, γ = 25 και αντίστοιχα ύψη $\upsilon_\alpha, \upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$.Να αποδείξετε ότι:
i. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 6)
ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι Ε = 300 και τα ύψη του είναι $\upsilon_\alpha = 15$ και $\upsilon_\beta = \upsilon_\gamma = 24$. (Μονάδες 7)
iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη $\upsilon_\alpha, \upsilon_\beta, \upsilon_\gamma$ είναι οξυγώνιο. (Μονάδες 7)
β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

3ο Θέμα

17908.Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι α = 4, $\beta = \sqrt{17}$ και γ = 5.
α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)
β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α, τότε:
i. να υπολογίσετε το ΔΒ. (Μονάδες 9)
ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

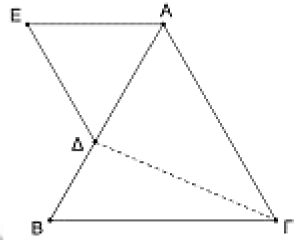
Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

2ο Θέμα

15979.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=5 και $A = 120^\circ$.Να αποδείξετε ότι:
α) $ΒΓ = 5\sqrt{3}$ (Μονάδες 13)
β) $(ΑΒΓ) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ (Μονάδες 12)

17346.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΒΓ = 4 και $B = 60^\circ$.
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 2\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)
Δίνεται ότι $\etaμ60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $συν60^\circ = \frac{1}{2}$.

17347. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.



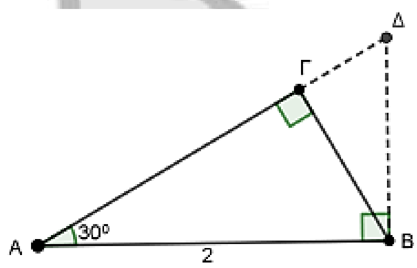
α) Να αποδείξετε ότι $(\text{ΑΓΔ}) = 15\sqrt{3}$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ. (Μονάδες 13)

Δίνεται ότι $\etaμ60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3ο Θέμα

21783. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\Gamma = 90^\circ$, $A = 30^\circ$ και $AB = 2$.



α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = \sqrt{3}$. (Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ, στο σημείο Β, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Δ.

Να αποδείξετε ότι $A\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)

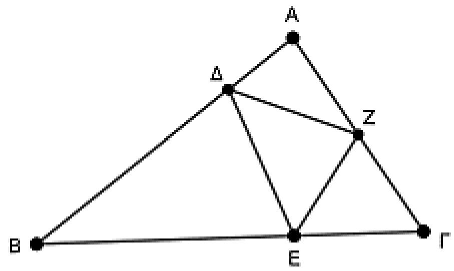
γ) Αν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι $(\text{ΚΑΒ}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 8)

Λόγος Εμβαδών

2ο Θέμα

15978. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε:

$A\Delta = \frac{1}{4}AB$, $BE = \frac{2}{3}B\Gamma$ και $\Gamma Z = \frac{1}{2}A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



α) $(\text{ΑΔΖ}) = \frac{1}{8}(\text{ΑΒΓ})$, $(\text{ΒΕΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ})$, $(\text{ΓΕΖ}) = \frac{1}{6}(\text{ΑΒΓ})$. (Μονάδες 15)

β) $(\text{ΔΕΖ}) = \frac{5}{24}(\text{ΑΒΓ})$ (Μονάδες 10)

16127. Ένα τρίγωνο έχει πλευρά $B\Gamma = 9$ και αντίστοιχο ύψος $A\Delta = 8$.

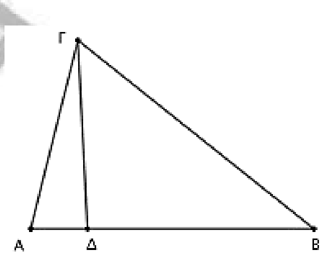
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

β) Ένα άλλο τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ και η ομόλογη πλευρά της ΒΓ είναι η Β΄Γ΄= 6. Να υπολογίσετε:

i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄, (Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄. (Μονάδες 9)

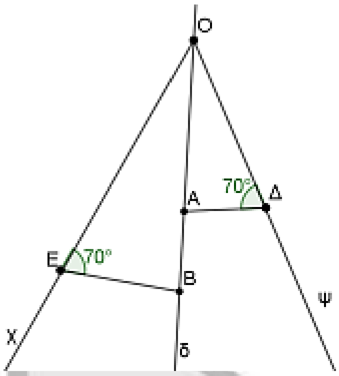
16756. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ.



α) Να αποδείξετε ότι $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΒΓ})} = \frac{AB}{\Delta B}$. (Μονάδες 15)

β) Αν $(\text{ΑΒΓ}) = 25$ και $AB = 5A\Delta$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ. (Μονάδες 10)

16770. Δίνεται γωνία $\chi O\psi$ και η διχοτόμος της Οδ. Πάνω στην Οδ παίρνουμε τυχαία σημεία Α και Β. Θεωρούμε σημείο Ε στην πλευρά Οχ τέτοιο ώστε $\widehat{OEB} = 70^\circ$ και σημείο Δ στην Οψ τέτοιο ώστε $\widehat{O\Delta A} = 70^\circ$.

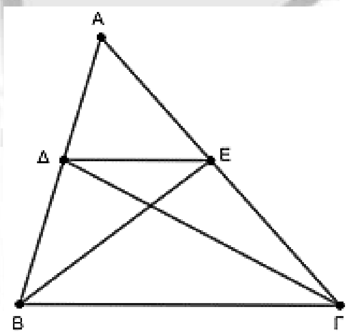


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Αν $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων. (Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΕΒ. (Μονάδες 09)

16806. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

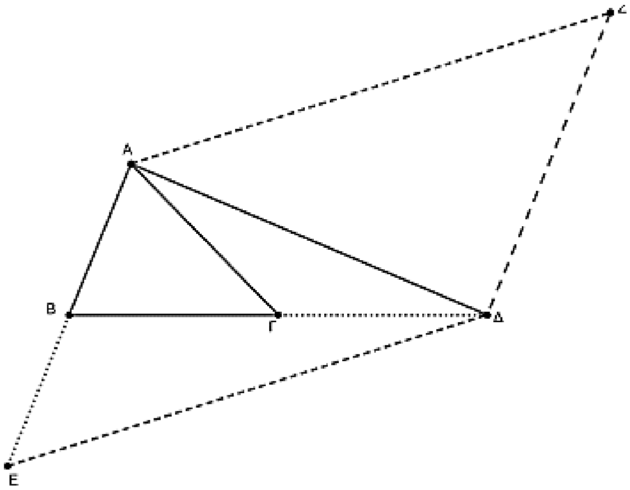


α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\dfrac{(A\Delta E)}{(\Delta EB)} = \dfrac{A\Delta}{\Delta B}$ και $\dfrac{(A\Delta E)}{(\Delta E\Gamma)} = \dfrac{AE}{E\Gamma}$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι (ΔΕΒ) = (ΔΕΓ). (Μονάδες 12)

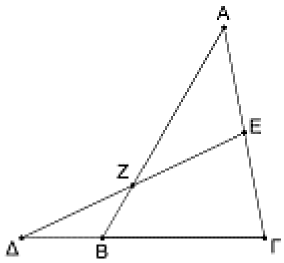
18561. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΒΓ και την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΑΒ.

α) Αν (ΑΒΓ)= 25 m^2 , να αποδείξετε ότι (ΒΔΕ)=50 m^2 . (Μονάδες 10)



β) Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΕΔ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην ΕΑ που τέμνονται στο σημείο Ζ.
Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΔ είναι 4-πλάσιο του εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

20667. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 8. Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β παίρνουμε σημείο Δ, ώστε ΔΒ = 4 και Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

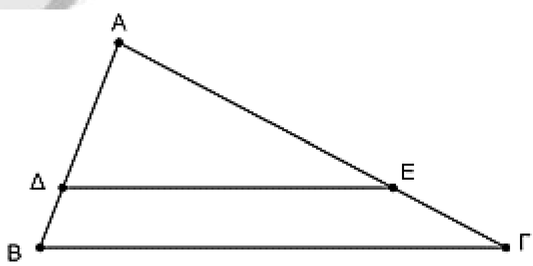


α) Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $(\Gamma\Delta E) = 3A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΔΕ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, αν το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ είναι 12 τ.μ. (Μονάδες 8)

21120. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = \sqrt{2}$.Από σημείο Δ της πλευράς ΑΒ ώστε ΑΔ = 1, φέρνουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

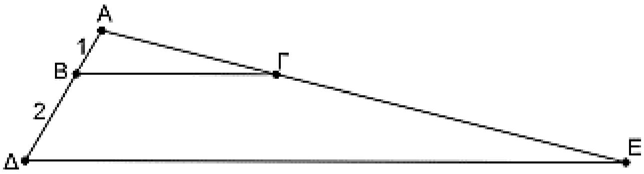


α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας ,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)
β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου ΑΔΕ και του τραπεζίου ΒΓΕΔ. (Μονάδες 7)

21304. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στη ΒΓ και ΒΔ = 2.

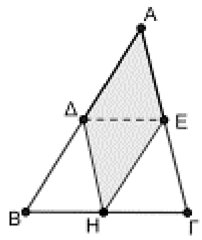


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο ομοιότητα 1/3. (Μονάδες 10)
β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)
γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

21636. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με μήκη πλευρών ΑΒ=6, ΑΓ=8, και ΒΓ=10.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)
β) Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε:
i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$. (Μονάδες 10)
ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΓΔ})}$. (Μονάδες 5)

4ο Θέμα

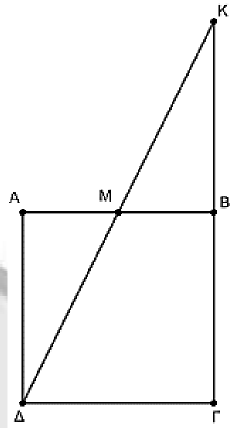
16582. Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.



α) Έστω ότι $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{1}{2}$.
i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)
ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)
β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου ΑΒΓ; (Μονάδες 06)

17956. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος ΒΓ. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Η παράλληλη στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη στην ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Θεωρούμε Κ και Λ τα μέσα των ΒΔ και ΔΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $(\text{ΕΚΔ}) = \frac{(\text{ΒΕΔ})}{2}$. (Μονάδες 09)
β) $(\text{ΕΖΔ}) = \frac{(\text{ΑΕΔΖ})}{2}$. (Μονάδες 09)
γ) Το εμβαδόν του ΚΕΖΛ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ. (Μονάδες 07)

16732. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια.

(5 μονάδες)

β) $(\text{ΜΚΒ}) = \frac{1}{4}(\text{ΔΚΓ})$.

(5 μονάδες)

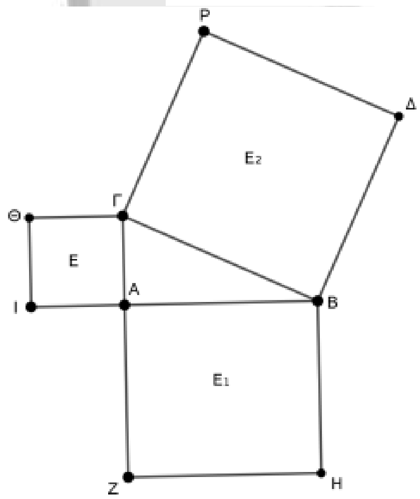
γ) $(\text{ΜΒΓΔ}) = \frac{3}{4}(\text{ΑΒΓΔ})$.

(10 μονάδες)

δ) Αν (ΜΒΓΔ) = 75 m^2 να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

(5 μονάδες)

17907. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Με πλευρές τις ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ, τα τετράγωνα ΑΒΗΖ, ΑΓΘΙ, ΒΓΡΔ. Έστω Ε, E_1, E_2, τα εμβαδά των τετραγώνων ΑΓΘΙ, ΑΒΗΖ, ΒΓΡΔ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:



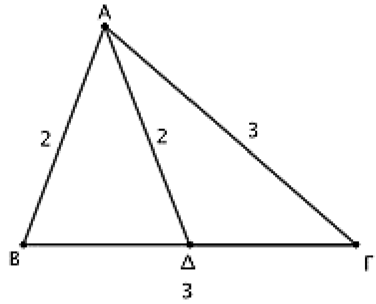
α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. (Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΙΖ, ΒΗΔ, ΓΡΘ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) αν η ΑΓ=1 να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου ΖΗΔΡΘΙ.

(Μονάδες 7)

18101. Στο σχήμα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι ισοσκελή με ΑΓ = ΒΓ = 3 και ΑΒ = ΑΔ = 2.



α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες Β και ΒΑΓ είναι ίσες.

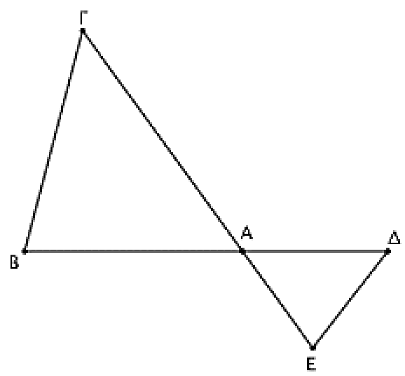
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΒΔΑ})}$ των εμβαδών των δύο τριγώνων. (Μονάδες 8)

18301. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

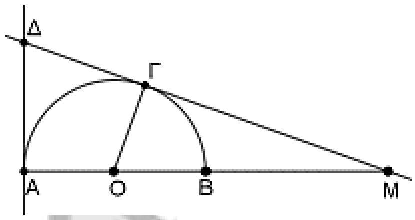


α) Αν είναι $\text{ΑΔ} = \frac{1}{2}\text{ΑΒ}$ και $\text{ΑΕ} = \frac{2}{5}\text{ΑΓ}$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}$. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι $\text{ΑΔ} = \frac{1}{\lambda}\text{ΑΒ}$ και $\text{ΑΕ} = \frac{\lambda}{\mu}\text{ΑΓ}$ όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ)». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

18370. Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ = 2ρ. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Μ. Από το Μ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση της ΜΓ στο Δ τότε:

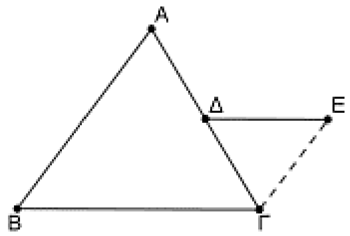


α) Αν ΒΜ = 2ρ να αποδείξετε ότι $ΜΓ = 2\sqrt{2}ρ$. (Μονάδες 09)

β) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{ΜΟ}{ΜΓ} = \frac{ΜΔ}{ΜΑ}$. (Μονάδες 09)

ii. Αν για το Μ ισχύει ότι $ΒΜ = λ \cdot ρ$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, τέτοια ώστε (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ). (Μονάδες 07)

18371. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσο της ΑΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ παράλληλη στην ΒΓ και ίση με το μισό της ΑΒ όπως στο σχήμα.



α) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΔΕ}{2ΒΓ}$. (Μονάδες 10)

ii. Αν το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι (ΔΕΓ) = (ΑΒΔ). (Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ έχουν $\hat{Δ} = \hat{Γ}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{ΔΓ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΑΒ} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους $\hat{Δ}, \hat{Γ}$ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \left(\frac{ΔΕ}{ΑΒ}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$». Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος.

Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος; (Μονάδες 05)

21189. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ΑΒΓ) = (ΑΓΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ)$. (Μονάδες 8)

β) $\frac{(ΒΜΝ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{4}$. (Μονάδες 12)

γ) $(ΒΜΝ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓΔ)$. (Μονάδες 5)

21194. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ η διάμεσός του και Ε το μέσο της ΑΜ. Από το σημείο Ε φέρουμε παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ οι οποίες τέμνουν την ΒΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ) (Μονάδες 5)

β) $(ΜΕΔ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ)$. (Μονάδες 12)

γ) (ΑΒΔΕ) = (ΑΓΖΕ) (Μονάδες 8)

3ο Θέμα

19037. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\Delta B = \frac{1}{5}AB$, $E\Gamma = \frac{1}{4}B\Gamma$, $Z\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}, \frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)}, \frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)}$. (Μονάδες 15)

β) Αν είναι (ΑΒΓ) = 120, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ. (Μονάδες 10)

Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

2ο Θέμα

20638. Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών ν_1 και ν_2, κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2, αντίστοιχα. Αν ο λόγος του ν_1 προς το ν_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$,τότε:

α) Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων.

(Μονάδες 10)

β) Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $\nu_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$. (Μονάδες 15)

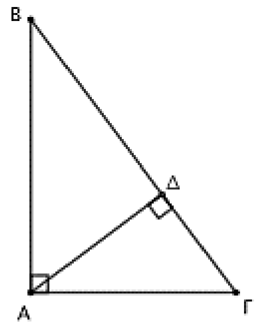
1ο Θέμα

16097.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.

iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του. (Μονάδες 15)

Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

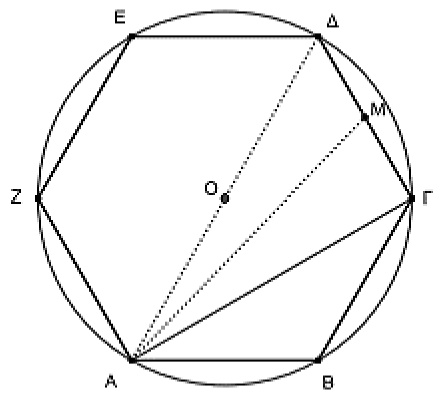
4ο Θέμα

17600. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\text{ΑΒΓΔΕΖ}\right)=\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 7)

β) $\left(\text{ΑΜΓ}\right)=\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. (Μονάδες 6)

γ) $\left(\text{ΑΜΔΕΖ}\right)=R^2\sqrt{3}$. (Μονάδες 12)



Μήκος κύκλου - τόξου

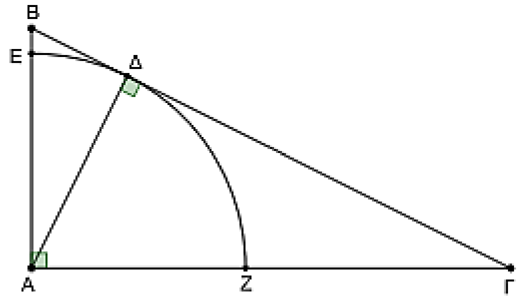
2ο Θέμα

21122. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, το Δ είναι η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ και είναι ΒΔ = 1 και ΔΓ = 4.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ = 2. (Μονάδες 12)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΕΔΖ}}$. (Μονάδες 13)



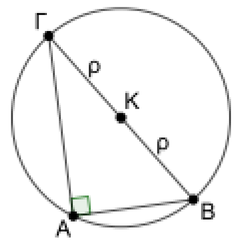
21298. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{\text{Α}}$ ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ρ. Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5. (Μονάδες 08)

β) Αν η χορδή ΑΒ έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής ΑΓ του κύκλου, (Μονάδες 10)

ii. το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)



Εμβαδόν κυκλικού δίσκου - τομέα

2ο Θέμα

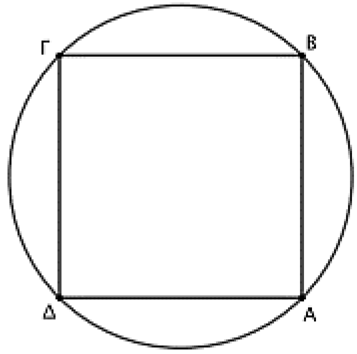
18097. Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με $2\pi - 4$.

(Μονάδες 12)



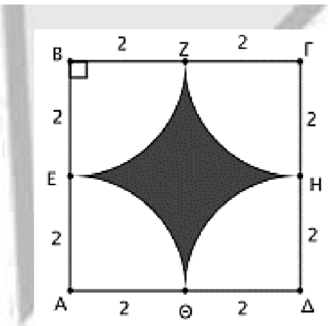
18098. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha = 4$.
Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E = 4(4 - \pi)$.

(Μονάδες 12)



18099. Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 2\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

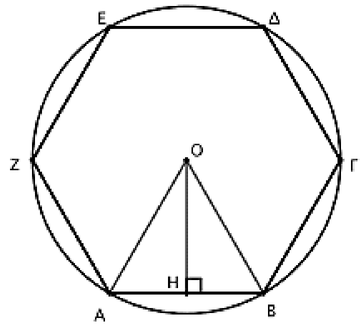
α) Να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημα του κανονικού εξαγώνου.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του ισούται με $E = 6\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$. (Μονάδες 7)



20363. Δίνεται ο κύκλος (O,R) και τα σημεία του Α, Β, Γ όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, ώστε AB= R και $B\Gamma = R\sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = 60^\circ$ και $B\Gamma = 90^\circ$.

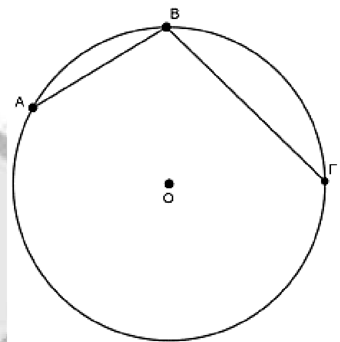
(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, τα μήκη των τόξων AB, ΒΓ.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\left(O.A\Gamma\right)$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία ΑΟΓ.

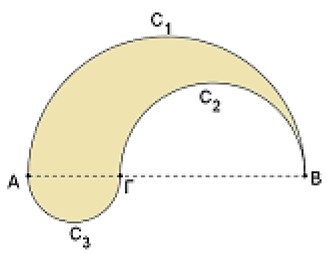
(Μονάδες 10)



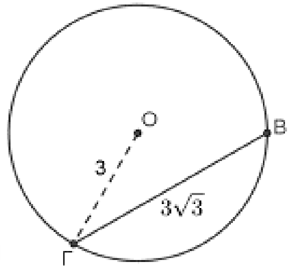
20672. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 6, και σημείο του Γ, ώστε ΒΓ = 4. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1, C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}, 2\pi$ και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου. (Μονάδες 10)



21069. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 3. Θεωρούμε την χορδή $ΒΓ = 3\sqrt{3}$,όπως φαίνεται στο σχήμα.

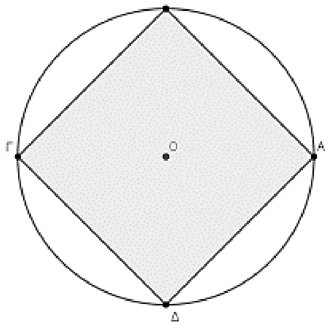


α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ είναι 120° . (Μονάδες 08)

β) Να υπολογισθεί το μήκος του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$. (Μονάδες 08)

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα Ο ΒΓ . (Μονάδες 09)

21075. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π.



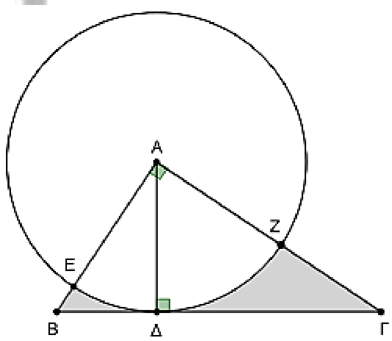
α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου. (Μονάδες 07)

β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο. (Μονάδες 09)

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο. (Μονάδες 09)

21121. Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει υποτείνουσα ΒΓ = 13 και αντίστοιχο ύψος ΑΔ = 6. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου , στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.



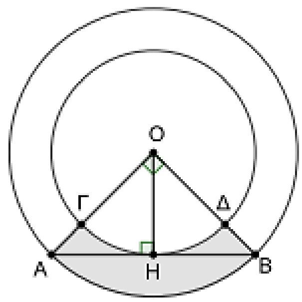
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

i. του κυκλικού τομέα $\overset{\frown}{ΑΕΔΖ}$, (Μονάδες 9)

ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. (Μονάδες 8)

21123. Στο τρίγωνο ΟΑΒ του σχήματος είναι $\widehat{ΑΟΒ} = 90^\circ$, ΟΑ = ΟΒ = 2 και το ΟΗ είναι το ύψος του από την κορυφή Ο. Με κέντρο το Ο και ακτίνα R = ΟΑ και ρ = ΟΗ γράφουμε δύο ομόκεντρους κύκλους. Ο κύκλος (Ο,ρ) τέμνει τις ΟΑ και ΟΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

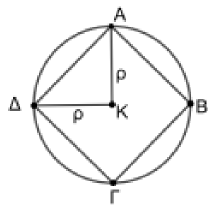


α) Να αποδείξετε ότι $ΟΗ = \sqrt{2}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων $\overset{\frown}{ΟΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΟΓΔ}$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους που περικλείεται από τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ. (Μονάδες 5)

21300. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ, ρ), όπως στο παρακάτω σχήμα.



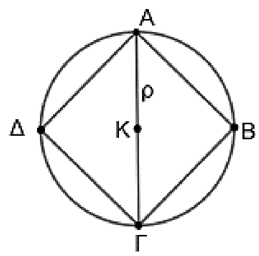
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 08)

β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι $ρ = \sqrt{8}$. (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (Κ, ρ). (Μονάδες 10)

21301. Σε κύκλο (Κ, ρ) εμβαδού Ε = 4π είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ, όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:



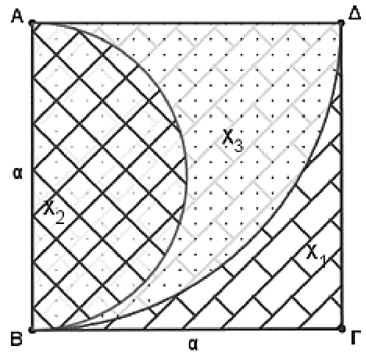
α) την ακτίνα ρ του κύκλου (Κ, ρ). (Μονάδες 07)

β) το μήκος της διαμέτρου ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) και της πλευράς ΑΒ του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 10)

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)

4ο Θέμα

17599. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.



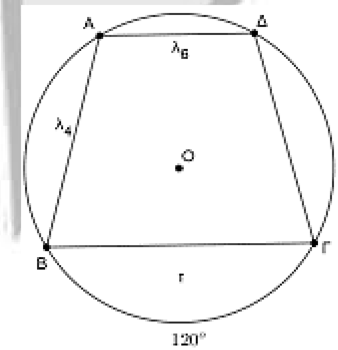
α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με:

$\left(X_1\right)=\dfrac{\alpha^2}{4}\cdot\left(4-\pi\right)$. (Μονάδες 5)

β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3. (Μονάδες 11)

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

18043. Σε κύκλο (Ο,ρ) θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Η πλευρά ΑΔ είναι ίση με την πλευρά λ_6 κανονικού εξάγωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.



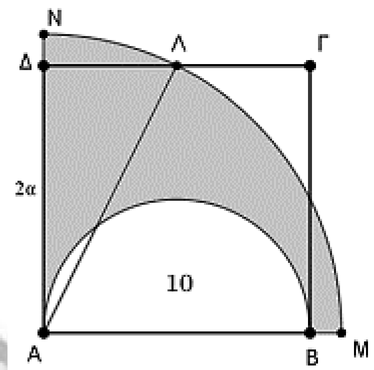
α) Αν η πλευρά ΑΒ ισούται με την πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο $\text{ΒΓ}=120^\circ$:

i. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας. (Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία ΒΟΓ. (Μονάδες 10)

β) Κρατάμε τα σημεία Α και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή ΒΓ παράλληλα προς την ΑΔ ώστε να διέρχεται από το Ο. Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου ΑΒ; (Μονάδες 07)

21197. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2α και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:



α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $\left(\text{ΑΒΓΔ}\right)=\dfrac{80}{\pi}$. (Μονάδες 6)

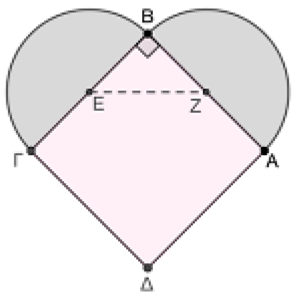
ii. $\text{ΑΛ}^2=\dfrac{100}{\pi}$. (Μονάδες 6)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο ΑΜΝ, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ. (Μονάδες 8)

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου ΑΜΝ προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 5)

21103. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και με διαμέτρους τις ΒΓ και ΒΑ φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με $\pi-\alpha$. (Μονάδες 07)

β) i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι 2π +4, να υπολογίσετε το α. (Μονάδες 06)

ii. Αν α = 1 να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων. (Μονάδες 06)

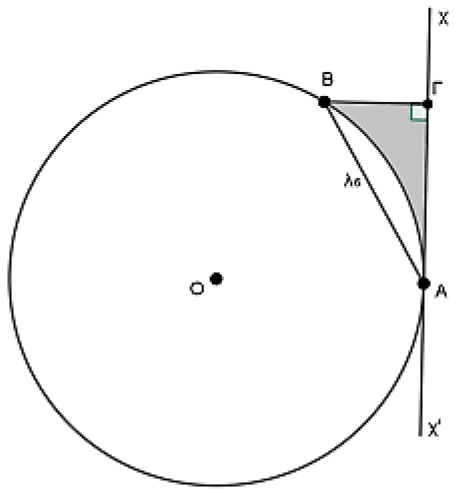
γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο $\frac{(\tau)}{(\text{ΑΒΓΔ})}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)

20361. Δίνεται κύκλος (O,R) και η χορδή του ΑΒ ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.
Στο σημείο Α φέρνουμε την εφαπτομένη x΄x του κύκλου και από το Β την κάθετη στην x'x που την τέμνει στο Γ.
Να αποδείξετε ότι:

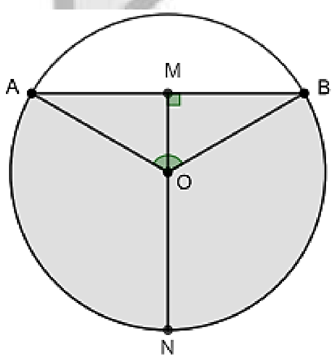
α) $\text{ΑΓ} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 8)

β) $(\text{ΟΑΓΒ}) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$. (Μονάδες 7)

γ) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι: $E = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}$.
(Μονάδες 10)



21127. Ο κυκλικός δίσκος του διπλανού σχήματος έχει κέντρο Ο και ακτίνα R. Έστω ΑΒ μια χορδή του κύκλου και Μ η προβολή του Ο στην ΑΒ. Αν η ΜΟ προεκταθεί προς το Ο, τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ν. Δίνεται ότι $\text{ΜΝ} = \frac{3R}{2}$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\text{ΑΒ} = R\sqrt{3}$, (Μονάδες 6)

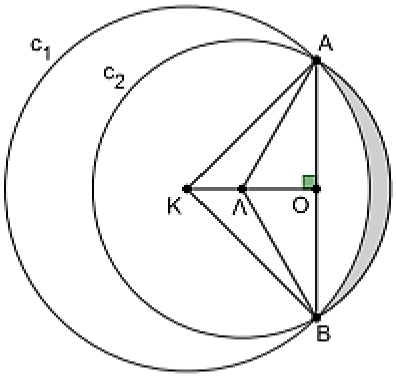
ii. $\text{ΑΟΒ} = 120^\circ$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέστε ότι η διατομή ενός αγωγού μεταφοράς νερού είναι ο κυκλικός δίσκος του σχήματος που έχει δοθεί με R = 10 cm.
Η στάθμη του νερού που ρέει στον αγωγό είναι στη χορδή ΑΒ και το ΜΝ = 15cm. Να βρείτε:

i. το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος που περικλείεται από την χορδή ΑΒ και το τόξο $\overset{\frown}{\text{ΑΝΒ}}$. (Μονάδες 7)

ii. το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΝΒ}}$. (Μονάδες 6)

21138. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος C_1 έχει κέντρο Κ και ακτίνα R και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο Λ και ακτίνα ρ = 2.
Οι αποστάσεις των Κ και Λ από την κοινή χορδή ΑΒ των δύο κύκλων είναι $\text{ΚΟ} = \sqrt{3}$ και $\text{ΛΟ} = 1$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\text{ΟΑ} = \sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

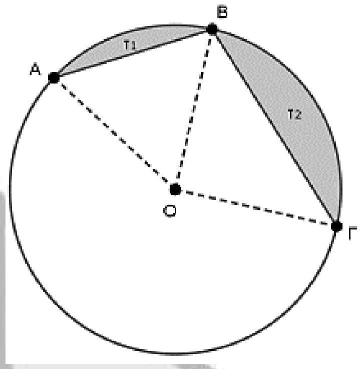
ii. $R = \sqrt{6}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα εμβαδά:

i. των κυκλικών τομέων ΚΑΒ και ΛΑΒ. (Μονάδες 8)

ii. του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος. (Μονάδες 5)

21659. Για τα σημεία Α, Β και Γ του κύκλου (O,R) στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι ΑΒ = R και $ΒΓ = R\sqrt{2}$.



Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R:

α) τα μήκη των τόξων ΑΒ, ΒΓ. (Μονάδες 8)

β) το μήκος του μη κυρτογώνιου τόξου ΑΓ και το εμβαδό του κυκλικού τομέα $\left(ΟΑΓ\right)$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία ΑΟΓ.

(Μονάδες 8)

γ) το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων ($τ_1$) και ($τ_2$), όπως αυτά σημειώνονται στο σχήμα.

(Μονάδες 9)