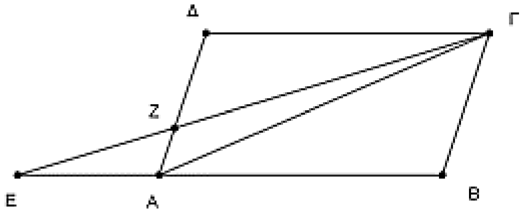
Διανύσματα

Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

Θέμα 2ο

21165.Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω $\vec{AB}=\vec{\alpha}$ και $\vec{A\Delta}=\vec{\beta}$. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τέτοια ώστε $\vec{AE}=-\frac{1}{2}\vec{AB}$ και $\vec{AZ}=\frac{1}{3}\vec{A\Delta}$.



α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{EZ}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\vec{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\vec{\beta}$. **(Μονάδες 10)**

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{Z\Gamma}=2\vec{EZ}$. **(Μονάδες 9)**

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) $\vec{EZ}=\vec{AZ}-\vec{AE}=\frac{1}{3}\vec{A\Delta}-\frac{1}{2}\vec{AB}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}$

$\vec{Z\Gamma}=\vec{A\Gamma}-\vec{AZ}=\vec{AB}+\vec{A\Delta}-\vec{AZ}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\frac{1}{3}\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\vec{\beta}$

β) Είναι $\vec{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\vec{\beta}=2\left(\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}\right)=2\vec{EZ}$.

γ) Επειδή $\vec{Z\Gamma}=2\vec{EZ}$ είναι $\vec{Z\Gamma}//\vec{EZ}$ και τα διανύσματα έχουν κοινό άκρο το σημείο Ζ έχουμε το συμπέρασμα ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά.

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Θέμα 2ο

15010.Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου Α, Β, Γ και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{\Gamma E}$ τέτοια ώστε $\vec{B\Delta}=\vec{BA}+\vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma E}=\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B}$.

α) i. Να δείξετε ότι $\vec{A\Delta}=\vec{B\Gamma}$ και $\vec{AE}=\vec{\Gamma B}$. **(Μονάδες 8)**

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα. **(Μονάδες 8)**

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία Α Δ, και Ε είναι συνευθειακά. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) i. Είναι $\vec{A\Delta}=\vec{B\Delta}-\vec{BA}=\vec{BA}+\vec{B\Gamma}-\vec{BA}=\vec{B\Gamma}$ και $\vec{AE}=\vec{\Gamma E}-\vec{\Gamma A}=\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B}-\vec{\Gamma A}=\vec{\Gamma B}$.

ii. Είναι $\vec{A\Delta}=\vec{B\Gamma}=-\vec{\Gamma B}=-\vec{AE}$

β) Είναι $\vec{A\Delta}=-\vec{AE}\Leftrightarrow\vec{A\Delta}//\vec{AE}$ και επειδή τα διανύσματα αυτά έχουν κοινό σημείο το Α, τα σημεία Α, Δ και Ε είναι συνευθειακά.

Συντεταγμένες διανύσματος

Θέμα 2ο

14666.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-3)$ και $\vec{\beta}=(-2,-1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$ και $\vec{v}=5\vec{\alpha}-9\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

γ) Αν τα $\vec{\beta},\vec{w},\vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $\vec{u}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}=3(1,-3)-5(-2,-1)=(3,-9)+(10,5)=(13,-4)$ και
$\vec{v}=5\vec{\alpha}-9\vec{\beta}=5(1,-3)-9(-2,-1)=(5,-15)+(18,9)=(23,-6)$

β) $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}=2(3\vec{\alpha}-5\vec{\beta})-(5\vec{\alpha}-9\vec{\beta})=6\vec{\alpha}-10\vec{\beta}-5\vec{\alpha}+9\vec{\beta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

γ) Είναι $\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{O\Lambda}-\overrightarrow{OK}=\vec{w}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και
$\overrightarrow{\Lambda M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\Lambda}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}-(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}-\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\vec{\alpha}-4\vec{\beta}=2(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})=2\overrightarrow{K\Lambda}$, άρα τα διανύσματα
$\overrightarrow{\Lambda M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\Lambda}$ και $\overrightarrow{K\Lambda}$ είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

16147.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=3\vec{i}+3\sqrt{3}\,\vec{j}$, $\vec{\beta}=\sqrt{2}\,\vec{i}$, $\vec{\gamma}=-3\vec{j}$ και $\vec{\delta}=(-1,1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$. (Μονάδες 9)

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με τον θετικό ημιάξονα Οx. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$, $\lambda_{\vec{\beta}}=\frac{0}{\sqrt{2}}=0$ και $\lambda_{\vec{\delta}}=\frac{1}{-1}=-1$.

β) Επειδή $\lambda_{\vec{\beta}}=0$, το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι παράλληλο στον άξονα x΄x, οπότε η γωνία που σχηματίζει με τον ημιάξονα Οx είναι 0°.
Στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, οπότε η γωνία που σχηματίζει με τον ημιάξονα Οx είναι 90°.
Αν ω, φ οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\delta}$ αντίστοιχα με τον άξονα x΄x, τότε
$\varepsilon\varphi\omega=\lambda_{\vec{\alpha}}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\omega=60^\circ$ και $\varepsilon\varphi\varphi=\lambda_{\vec{\delta}}=-1=-\varepsilon\varphi45^\circ=\varepsilon\varphi(180^\circ-45^\circ)=\varepsilon\varphi135^\circ\Leftrightarrow\varphi=135^\circ$

γ) $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{2\cdot3^2}=3\sqrt{2}$, $|\vec{\gamma}|=|-3|=3$

16151.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,3)$ και $\vec{\beta}=(-\sqrt{3},1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 16)**

β) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$. **(Μονάδες 9)**

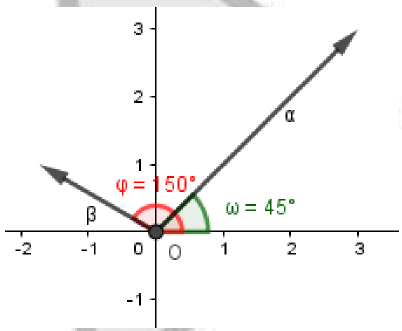
Λύση

α) Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{3}{3}=1$ και $\lambda_{\vec{\beta}}=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Αν ω, φ οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα με τον άξονα x΄x, τότε

$\varepsilon\varphi\omega=\lambda_{\vec{\alpha}}=1\Leftrightarrow\omega=45^\circ$ και

$\varepsilon\varphi\varphi=\lambda_{\vec{\beta}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}=-\varepsilon\varphi30^\circ=\varepsilon\varphi(180^\circ-30^\circ)=\varepsilon\varphi150^\circ\Leftrightarrow\varphi=150^\circ$.



β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\varphi-\omega=150^\circ-45^\circ=105^\circ$

16579.Δίνονται τα σημεία Α(2,1) και Β(6,7) του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.

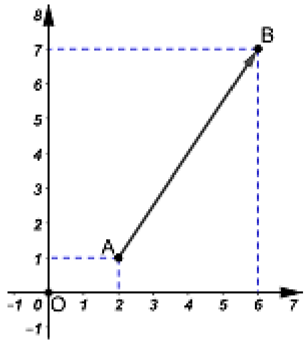
α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. **(Μονάδες 07)**

β) Αν $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$. **(Μονάδες 08)**

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=(-8,-12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα. **(Μονάδες 10)**

Λύση

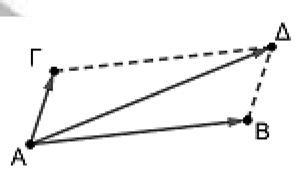
α) Σχεδιάζουμε τους άξονες του καρτεσιανού επιπέδου και τα δύο σημεία $A(2,1)$ και Β(6,7). Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με αρχή το Α και πέρας το Β.



β) $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(6-2,7-1)=(4,6)$

γ) Παρατηρούμε ότι $\vec{u}=(-8,-12)=(-2\cdot4,-2\cdot6)=-2\cdot(4,6)=-2\vec{v}$, άρα τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ είναι αντίρροπα.

16580.Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία Α(2,4), Β(11, 5), Γ(3, 7) και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:



α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. **(Μονάδες 12)**

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. **(Μονάδες 08)**

γ) του σημείου Δ. **(Μονάδες 05)**

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=(11-2,5-4)=(9,1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(3-2,7-4)=(1,3)$

β) $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=(9,1)+(1,3)=(10,4)$

γ) Είναι $\overrightarrow{A\Delta}=(x_\Delta-x_A,y_\Delta-y_A)\Leftrightarrow(10,4)=(x_\Delta-2,y_\Delta-4)\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Delta-2=10\\y_\Delta-4=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Delta=12\\y_\Delta=8\end{cases}$, άρα $\Delta(12,8)$.

16581.Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία Α(−1, 6), Β(1, 2) και Γ(3, −2).

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. **(Μονάδες 12)**

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά. **(Μονάδες 06)**

γ) Να αποδείξετε ότι το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. **(Μονάδες 07)**

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=\left(1-(-1),2-6\right)=(2,-4)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(3-1,-2-2)=(2,-4)$

β) Είναι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Gamma}$, επομένως τα διανύσματα είναι συγγραμμικά και εφόσον το Β είναι κοινό σημείο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

γ) Επειδή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Gamma}$, συμπεραίνουμε ότι το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ

17070.Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

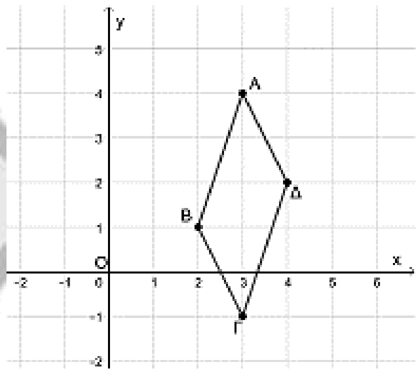
α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία και Α, Β, Γ και Δ. **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. **(Μονάδες 9)**

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α)



β) $\overrightarrow{AB}=(2-3,1-4)=(-1,-3)$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(3-4,-1-2)=(-1,-3)$.

γ) Επειδή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

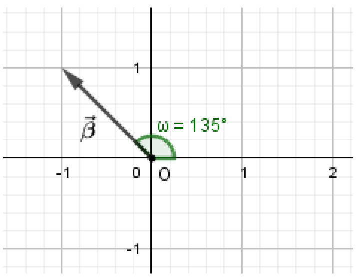
19038.Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,3)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(-5,-5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 9)**

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}|=5|\vec{\beta}|$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$. **(Μονάδες 8)**

Λύση



α) Είναι $\lambda_{\vec{\beta}}=\dfrac{1}{-1}=-1$, οπότε αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x, είναι $\varepsilon\varphi\omega=-1$. Επειδή το διάνυσμα βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο είναι $\omega=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

β) Είναι $|\vec{\gamma}|=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{(-1)^2+=}\sqrt{2}$,
άρα $|\vec{\gamma}|=5|\vec{\beta}|$.

γ) $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\Leftrightarrow(-5,-5)=\lambda(2,3)+\mu(-1,1)\Leftrightarrow(-5,-5)=(2\lambda-\mu,3\lambda+\mu)\Leftrightarrow$
$\begin{cases}2\lambda-\mu=-5\\3\lambda+\mu=-5\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}5\lambda=-10\Leftrightarrow\lambda=-2$ και $3\cdot(-2)+\mu=-5\Leftrightarrow\mu=1$, άρα $\vec{\gamma}=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Θέμα 4ο

17076.Δίνονται τα σημεία $A(-3,-1)$, $B(0,3)$ και $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|\geq 5$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4$.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $\overrightarrow{AM}=(x-(-3),y-(-1))=(x+3,y+1)$, $\overrightarrow{MB}=(0-x,3-y)=(-x,3-y)$
$\overrightarrow{AB}=(0-(-3),3-(-1))=(3,4)$

β) $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$, $|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{x^2+(3-y)^2}$ και $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

γ) Είναι $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}|=5$, όμως $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}|\leq|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|$, άρα $5\leq|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|$.

δ) $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4\Leftrightarrow|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|=4$ άτοπο, οπότε δεν υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) ώστε να ισχύει $|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|=4$.

17077.Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\lambda\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB}=(\lambda+1)\vec{i}+(\lambda+3)\vec{j}$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}=(\lambda-1)\vec{i}+3\vec{j}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ. (Μονάδες 7)

γ) Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\lambda+1)\vec{i}+(\lambda+3)\vec{j}-2\vec{i}-\lambda\vec{j}=(\lambda-1)\vec{i}+3\vec{j}$

β) $(AB)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(\lambda-1)^2+3^2}=\sqrt{(\lambda-1)^2+9}$

γ) $(AB)=5 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2+9}=5 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+9=25 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2=16 \Leftrightarrow \lambda-1=\pm 4 \Leftrightarrow \lambda=5$ ή $\lambda=-3$

δ) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $(\lambda-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+9 \geq 9 \Leftrightarrow (AB) \geq 9$ άρα η απόσταση ΑΒ έχει ελάχιστη τιμή το 9 όταν $\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$. Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Θέμα 2ο

14586. Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία Α είναι ορθή. **(Μονάδες 9)**

β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=(3-1,4-2)=(2,2)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(5-1,-2-2)=(4,-4)$.

Είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=2\cdot 4+2(-4)=8-8=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow A=90^\circ$.

β) Είναι $x_M=\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}=4,\ y_M=\dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}=1$, άρα Μ(4,1).

Είναι $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(4-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}|=\sqrt{(5-3)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

γ) Είναι $\overrightarrow{B\Gamma}=(5-3,-2-4)=(2,-6)$, $\overrightarrow{AM}=(4-1,1-2)=(3,-1)$.

Έστω $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ με $\overrightarrow{B\Gamma}=\kappa\overrightarrow{A\Gamma}+\lambda\overrightarrow{AM}$, τότε $(2,-6)=\kappa(4,-4)+\lambda(3,-1) \Leftrightarrow (2,-6)=(4\kappa+3\lambda,-4\kappa-\lambda) \Leftrightarrow$

$\begin{cases}4\kappa+3\lambda=2\\-4\kappa-\lambda=-6\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=-2$ και $4\kappa+3(-2)=2 \Leftrightarrow 4\kappa-6=2 \Leftrightarrow 4\kappa=8 \Leftrightarrow \kappa=2$, άρα

$\overrightarrow{B\Gamma}=-2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{A\Gamma}$.

14953. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με Α(− 2,5),Β(7, 8), Γ(1, − 4).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. **(Μονάδες 10)**

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. **(Μονάδες 10)**

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία ΒΑΓ. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=(7+2,8-5)=(9,3)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(1+2,-4-5)=(3,-9)$

β) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=9\cdot 3+3\cdot(-9)=27-27=0$.

γ) Επειδή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$ είναι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$, οπότε $B\hat{A}\Gamma=90^\circ$.

15038.Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=4$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})=15$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=6$

β) $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2=9$ και $\vec{\beta}^2=|\vec{\beta}|^2=16$

γ) $(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})=3\vec{\alpha}^2-9\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=3\cdot9-10\cdot6+3\cdot16=15$

15073.Δίνονται τα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2(1,2)+(2,3)=(4,7)$.

β) $|\vec{\gamma}|=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}$

γ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=1\cdot4+2\cdot7=18$

15186.Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Β(6,3), Δ(1, −2) και Γ(9,2). Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες (4,2) και το μέσο Ν του τμήματος ΓΔ έχει συντεταγμένες (5,0). (Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{MN}=(1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(8,4)$. (Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=4$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=2$, άρα Μ(4,2).

Είναι $x_N=\frac{x_\Gamma+x_\Delta}{2}=5$, $y_N=\frac{y_\Gamma+y_\Sigma}{2}=0$, άρα Ν(5,0).

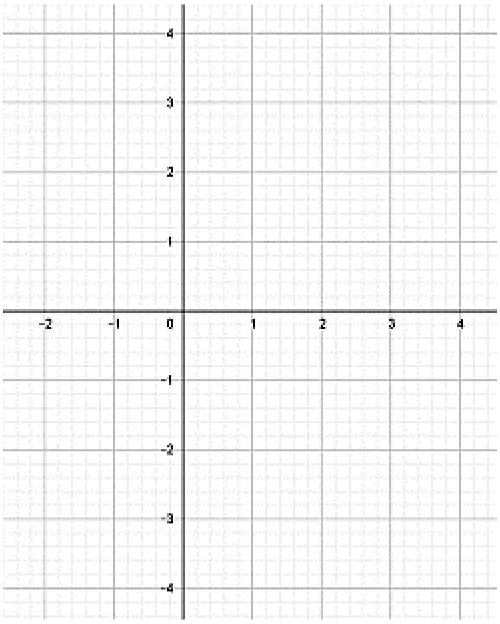
β) $\overrightarrow{MN}=(5-4,0-2)=(1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(9-1,2+2)=(8,4)$

γ) Είναι $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}=1\cdot8-2\cdot4=8-8=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

15317.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v}=(3,0)$ και $\vec{w}=(-3,4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα. **(Μονάδες 12)**

β) i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.



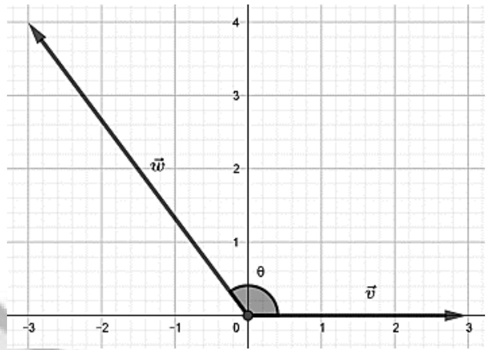
(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα. **(Μονάδες 3)**

Λύση

α) Είναι $\det(\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}3 & 0\\ -3 & 4\end{vmatrix}=12\neq 0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ δεν είναι παράλληλα.

β) i.



ii. Με βάση το σχήμα στο βi) ερώτημα, η γωνία θ που σχηματίζουν τα διανύσματα είναι αμβλεία.

15379.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,3)$, $\vec{\beta}=(3,-1)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. **(Μονάδες 13)**

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(1,3)$ έχει $x_1=1$ και $y_1=3$. Το διάνυσμα $\vec{\beta}=(3,-1)$ έχει $x_2=3$ και $y_2=-1$.

Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=3-3=0$

Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{2}$.

β) Είναι $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=2(1,3)-(3,-1)=(2,6)-(3,-1)=(-1,7)$

15463. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$. **(Μονάδες 9)**

γ) Να αποδείξετε ότι $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=(3,-1)-(2,1)=(3-2,-1-1)=(1,-2)$

β) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=2\cdot 1+1\cdot(-2)=2-2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$

γ) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$, άρα $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$.

15658.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-2)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο K(2,1).

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα. **(Μονάδες 4)**

β) Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma,y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι A(4,- 1) και B(3, 2). **(Μονάδες 5)**

ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma+y_\Gamma=11$. **(Μονάδες 6)**

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma,y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και $\left|\overrightarrow{K\Gamma}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot 1+(-2)\cdot 1=2-2=0$, άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β) i. Είναι $\vec{\alpha}=\overrightarrow{KA}\Leftrightarrow(2,-2)=(x_A-x_K,y_A-y_K)\Leftrightarrow\begin{cases}x_A-2=2\\y_A-1=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=4\\y_A=-1\end{cases}$, άρα $A(4,-1)$.

Είναι $\vec{\beta}=\overrightarrow{KB}\Leftrightarrow(1,1)=(x_B-x_K,y_B-y_K)\Leftrightarrow\begin{cases}x_B-2=1\\y_B-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=3\\y_B=2\end{cases}$, άρα $B(3,2)$.

ii. Είναι $\overrightarrow{AB}=(3-4,2+1)=(-1,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(x_\Gamma-4,y_\Gamma+1)$

Επειδή τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα, οπότε:

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-1 & 3\\ x_\Gamma-4 & y_\Gamma+1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -y_\Gamma-1-3x_\Gamma+12=0\Leftrightarrow 3x_\Gamma+y_\Gamma=11.$$

iii. $\left|\overrightarrow{K\Gamma}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(4-3)^2+(2+1)^2}\Leftrightarrow\sqrt{(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10}\Leftrightarrow$

$(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2=\frac{1}{4}\cdot 10\Leftrightarrow x_\Gamma^2-4x_\Gamma+4+(11-3x_\Gamma-1)^2=\frac{5}{2}\Leftrightarrow x_\Gamma^2-4x_\Gamma+4+(10-3x_\Gamma)^2=\frac{5}{2}\Leftrightarrow$

$x_\Gamma^2-4x_\Gamma+4+100-60x_\Gamma+9x_\Gamma^2-\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow 10x_\Gamma^2-64x_\Gamma+\frac{203}{2}=0$ (1)

Η (1) είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ= 36 και ρίζες $x_1=\frac{7}{2}=3{,}5$, $x_2=\frac{29}{10}=2{,}9$.

Επειδή το Γ είναι εσωτερικό του τμήματος AB, η τετμημένη του θα πρέπει να είναι μεταξύ 3 και 4 .
Άρα $x_\Gamma=3{,}5$ και $3\cdot 3{,}5+y_\Gamma=11\Leftrightarrow y_\Gamma=0{,}5$.

15825.Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$. **(Μονάδες 10)**

γ) Να βρείτε τη $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$. **(Μονάδες 7)**

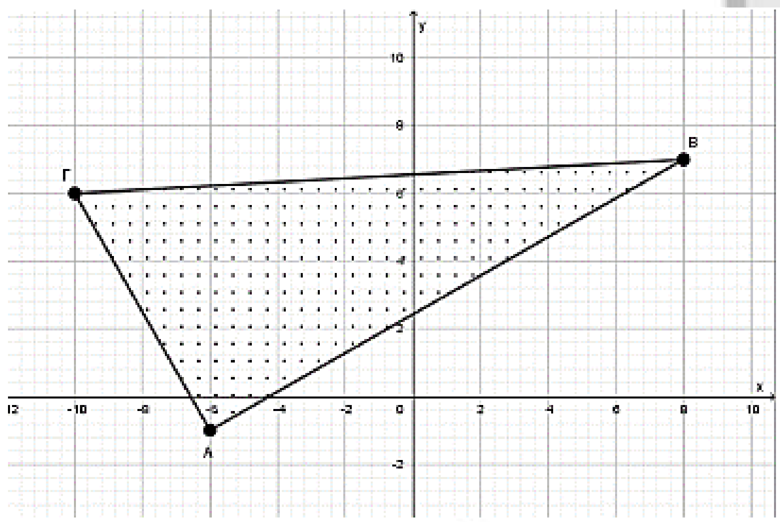
Λύση

α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=2\cdot4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=8\cdot\frac{1}{2}=4$

β) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2-4=4-4=0$

γ) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}\Leftrightarrow(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})=\frac{\pi}{2}$

15996.Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο ΑΒΓ.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$. **(Μονάδες 10)**

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο ΑΒΓ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού. **(Μονάδες 15)**

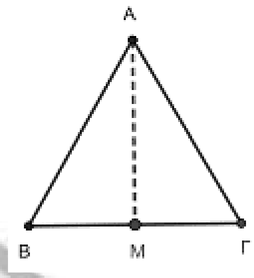
Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=(8-(-6),7-(-1))=(14,8)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(-10-8,6-7)=(-18,-1)$ και

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=(14,8)+(-18,-1)=(-4,7)$

β) Είναι $\overrightarrow{A\Gamma}=(-10-(-6),6-(-1))=(-4,7)$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=14\cdot(-4)+8\cdot7=-56+56=0$, άρα $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$, οπότε η γωνία Α είναι ορθή.

16141. **Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.**



α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)$ **ii.** $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}\right)$ **iii.** $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}\right)$

iv. $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{\Gamma M}\right)$ **v.** $\left(\overrightarrow{\Gamma M},\overrightarrow{\Gamma B}\right)$

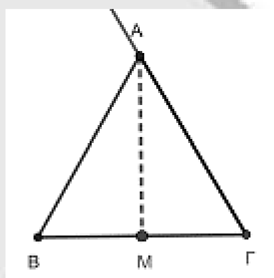
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ **ii.** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}$ **iii.** $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$

(Μονάδες 15)

Λύση



α) i. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=60^\circ$

ii. $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=90^\circ$

iii. $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}\right)=180^\circ-M\hat{A}\Gamma=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

iv. $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{\Gamma M}\right)=180^\circ$ (είναι αντίρροπα)

v. $\left(\overrightarrow{\Gamma M},\overrightarrow{\Gamma B}\right)=0^\circ$ (είναι ομόρροπα)

β) i. $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0$

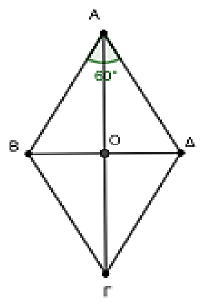
ii. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε:

$$AM^2=A\Gamma^2-M\Gamma^2=10^2-5^2=100-25=75\Leftrightarrow AM=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}\right)=5\sqrt{3}\cdot10\sigma\upsilon\nu150^\circ=50\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-75$$

iii. $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=\left|\overrightarrow{\Gamma M}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|=5\cdot10=50$

16144. **Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\hat{A}=60^\circ$.**



Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

β) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$

γ) $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{AO}$

δ) $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OB}$

ε) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(Μονάδες 25)

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Delta}\right)=4\cdot4\cdot\frac{1}{2}=8$

β) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu0=4\cdot4=16$

γ) $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{AO}=0$ γιατί $\overrightarrow{O\Delta}\perp\overrightarrow{AO}$

δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ έχει ΑΒ=ΑΔ και $\hat{A}=60^\circ$, το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, οπότε

$B\Delta = AB = A\Delta = 4$. Το Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του , οπότε ΒΟ = ΟΔ = 2.

$\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{O\Delta}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\sigma\upsilon\nu 180^\circ = 2\cdot 2(-1) = -4$

ε) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta} = |\overrightarrow{A\Delta}|\cdot|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|\sigma\upsilon\nu 120^\circ = 4\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -8$

16426.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,-1)$ και $\vec{\beta} = (-3,2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})$. **(Μονάδες 10)**

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x,y)$ όταν $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2|\vec{\alpha}|^2 - (2\cdot(-3)-1\cdot 2) = 2\left(\sqrt{2^2+(-1)^2}\right)^2 - (-8) = 2\cdot 5 + 8 = 18$

β) Έστω $\vec{\gamma} = (x,y)$, τότε: $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x \ (1)$ και

$|\vec{\gamma}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 5 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 + (2x)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 = 5 \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Αν $x = 1$ τότε $y = 2$ και $\vec{\gamma} = (1,2)$, ενώ αν $x = -1$ τότε $y = -2$ και $\vec{\gamma} = (-1,-2)$.

16427. Δίνονται τα σημεία Α(-2 , 3), Β (0 , 8), Γ (5 , 3) και Δ (10 , 5). Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. **(Μονάδες 12)**

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (0-(-2), 8-3) = (2,5)$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (10-5, 5-3) = (5,2)$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\cdot 5 + 5\cdot 2 = 20$

β) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (5,2) + (2,5) = (7,7)$

Είναι $\lambda_{\vec{u}} = \frac{7}{7} = 1$ επομένως εφω = 1, άρα $\omega = \frac{\pi}{4}$.

16428.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{3}{8}$. **(Μονάδες 15)**

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

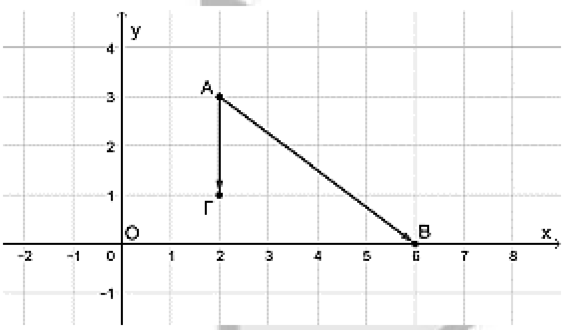
α) $|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| \Leftrightarrow |3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (3\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2 = (\vec{\alpha}-2\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$

$9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \cancel{4\vec{\beta}^2} = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \cancel{4\vec{\beta}^2} \Leftrightarrow 8\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -8\cdot\frac{3}{4} \Leftrightarrow 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -6 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{3}{8}$

β) $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\dfrac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=-\dfrac{12}{8\sqrt{3}}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\sigma\upsilon\nu30^\circ$, άρα $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

17075.Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου .



α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}=(4,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(0,-2)$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι Α(2,3), Β(6,0) και Γ(2,1).
Είναι $\overrightarrow{AB}=(6-2,0-3)=(4,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(2-2,1-3)=(0,-2)$.

β) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=4\cdot0-3\cdot(-2)=6$

20685.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(1,1),\vec{w}=(-10,2)$ και τα σημεία Α(−1,2), Β(β, 0), Γ(0, γ).
Τα διανύσματα $\vec{u},\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι β = 1. **(Μονάδες 9)**
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}=\dfrac{9}{5}$. **(Μονάδες 9)**
γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(\beta+1,-2)$ και $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\beta+1-2=0\Leftrightarrow\beta=1$
Είναι $\overrightarrow{A\Gamma}=(0+1,\gamma-2)=(1,\gamma-2)$ και

β) $\vec{w}//\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\det\left(\vec{w},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-10 & 2\\ 1 & \gamma-2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-10(\gamma-2)-2=0\Leftrightarrow$

$-10\gamma+20-2=0\Leftrightarrow-10\gamma=-18\Leftrightarrow\gamma=\dfrac{9}{5}$.

γ) Για β =1 και $\gamma=\dfrac{9}{5}$ είναι $\overrightarrow{AB}=(2,-2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(1,-\dfrac{1}{5}\right)$.

Είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=2\cdot1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)=2+\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{5}$

20888.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν:
$|\vec{\alpha}|=4,|\vec{\beta}|=5,\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.Να υπολογίσετε:
α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. **(Μονάδες 10)**
β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=4\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-10$.

β) $|\vec{\gamma}|^2=\left(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2=4|\vec{\alpha}|^2+12(-10)+9|\vec{\beta}|^2=4\cdot16-120+9\cdot25=169\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|=13$

4ο Θέμα

18547.Δίνονται τα σημεία $A(0,-1)$, $B(\lambda,1)$ και $\Gamma(\lambda-2,\lambda-3)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία Α, Β και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $A=90^\circ$. (Μονάδες 7)

β) Για $\lambda=-2$, να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 4)

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

Λύση

α) i. Για να σχηματίζουν τα σημεία Α, Β και Γ τρίγωνο πρέπει τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ να μην είναι παράλληλα. Είναι $\overrightarrow{AB}=(\lambda-0,1+1)=(\lambda,2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\lambda-2-0,\lambda-3+1)=(\lambda-2,\lambda-2)$.

Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα όταν $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\neq0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\lambda & 2\\ \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}\neq0\Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-2)-2(\lambda-2)\neq0\Leftrightarrow(\lambda-2)(\lambda-2)\neq0\Leftrightarrow(\lambda-2)^2\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq2$

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α όταν $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-2)+2(\lambda-2)=0\Leftrightarrow(\lambda-2)(\lambda+2)=0\Leftrightarrow$ $(\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda=2$ απορρίπτεται$)$ ή $(\lambda+2=0\Leftrightarrow\lambda=-2)$

β) i. Για $\lambda=-2$ είναι $\overrightarrow{AB}=(-2,2)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(-4,-4)$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$.

ii. Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -4 & -4\end{vmatrix}=8+8=16$ και $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot16=8$

18243. **Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=4, (\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma}=\alpha-\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.**

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. **(Μονάδες 5)**

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$. **(Μονάδες 7)**

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$. **(Μονάδες 8)**

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma}\hat{,}\vec{\delta})$. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{,}\vec{\beta})=2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=4$.

β) $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})=2\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=2|\vec{\alpha}|^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-|\vec{\beta}|^2=2\cdot 4-4-16=-12$

γ) $|\vec{\gamma}|^2=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-8+|\vec{\beta}|^2=4-8+16=12\Leftrightarrow|\vec{\gamma}|=\sqrt{22}=2\sqrt{3}$

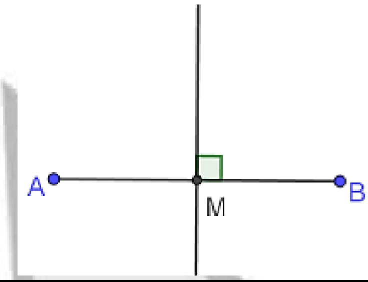
$|\vec{\delta}|^2=(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=4|\vec{\alpha}|^2+16+|\vec{\beta}|^2=16+16+16=48\Leftrightarrow|\vec{\delta}|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

δ) $\sigma\upsilon\nu(\vec{\gamma}\hat{,}\vec{\delta})=\frac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}}{|\vec{\gamma}||\vec{\delta}|}=\frac{-12}{2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}}=-\frac{3}{2(\sqrt{3})^2}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow(\vec{\gamma}\hat{,}\vec{\delta})=120^\circ$.

Εξίσωση ευθείας

2ο Θέμα

15027.Δίνονται τα σημεία Α(1,-1) και Β(3,5) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.
(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ.
(Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $\lambda_{AB}=\frac{5+1}{3-1}=3$.

β) Είναι $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1+5}{2}=2$, άρα Μ(2,2).

γ) Αν μ η μεσοκάθετος του ΑΒ, τότε $\lambda_{AB}\lambda_\mu=-1\Leftrightarrow 3\lambda_\mu=-1\Leftrightarrow \lambda_\mu=-\frac{1}{3}$.

Η ευθεία μ έχει εξίσωση: $y-2=-\frac{1}{3}(x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$.

15044.Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $B(6,-1)$.

α) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.
(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, είναι το σημείο $M(3,2)$.
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
(Μονάδες 15)

Λύση

α) i. $\lambda_{AB}=\frac{-1-5}{6-0}=-1$

ii. Είναι $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0+6}{2}=3$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5-1}{2}=2$, άρα $M(3,2)$.

β) Έστω μ η μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ. Τότε $\lambda_\mu\cdot\lambda_{AB}=-1\Leftrightarrow\lambda_\mu=1$ και η μ έχει εξίσωση:
$y-2=x-3\Leftrightarrow y=x-1$.

15271.Δίνονται τα σημεία Α(- 3, 2), Β(1, 6) και Γ(- 13,- 7) .

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β έχει εξίσωση $y=x+5$. (Μονάδες 7)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $\lambda_{AB}=\frac{6-2}{1+3}=1$

β) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση: $y-6=1(x-1)\Leftrightarrow y=x+5$

γ) Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν: $-7=-13+5\Leftrightarrow -7=-8$ αδύνατο. Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

15986.Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3).
α) i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.
ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η $(\varepsilon): y=2x-1$. **(Μονάδες 12)**
β) Να εξετάσετε αν το σημείο Γ (2^{100} , 5) ανήκει στην ευθεία (ε). **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) i. $\lambda_{AB}=\dfrac{3-1}{2-1}=2$

ii. Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση: $y-1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$

β) Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν: $5=2\cdot 2^{100}-1\Leftrightarrow 6=2^{101}$ αδύνατο. Άρα το σημείο Γ δεν ανήκει στην ΑΒ.

16002.Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(3,- 2) και Γ(5, 2) . Αν το σημείο $M\left(3,\frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι Β(1,- 1) . **(Μονάδες 9)**
β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΒΓ. **(Μονάδες 6)**
γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $x_M=\dfrac{x_\Gamma+x_B}{2}\Leftrightarrow 3=\dfrac{5+x_B}{2}\Leftrightarrow 6=5+x_B\Leftrightarrow x_B=1$ και

$y_M=\dfrac{y_\Gamma+y_B}{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{2+y_B}{2}\Leftrightarrow 2+y_B=1\Leftrightarrow y_B=-1$, άρα $B(1,-1)$.

β) $(B\Gamma)=\sqrt{(5-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

γ) Είναι $y+2=\dfrac{2+2}{5-3}(x-3)\Leftrightarrow y=2x-6-2\Leftrightarrow y=2x-8$

18236.Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(- 1, 5) και Β(2, 1) . Αν οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1: y=-x+4$ και $\varepsilon_2: y=-\frac{1}{2}x+2$ αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι Γ(4, 0). **(Μονάδες 12)**
β) Να βρείτε:
i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ **(Μονάδες 6)**
ii. την εξίσωση του ύψους ΒΔ. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α)Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ και προσδιορίζεται από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι: $\begin{cases} y=-x+4 \\ y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ -x+4=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ -2x+8=-x+4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ -2x+x=4-8 \end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases} y=-x+4 \\ -x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-4+4=0 \\ x=4 \end{cases}$, άρα Γ(4,0).

β) i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{0-5}{4+1}=-1$.

ii. Το ύψος ΒΔ είναι κάθετο στην πλευρά ΑΓ, οπότε $\lambda_{A\Gamma}\lambda_{B\Delta}=-1 \Leftrightarrow -\lambda_{B\Delta}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta}=1$.
Επομένως η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι: $y-1=x-2 \Leftrightarrow y=x-1$.

18351.Δίνονται τα σημεία Α(-1,5), Β(3,3). Να υπολογίσετε:
α) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ. **(Μονάδες 8)**
β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ. **(Μονάδες 8)**
γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος ΑΒ. **(Μονάδες 9)**

Λύση

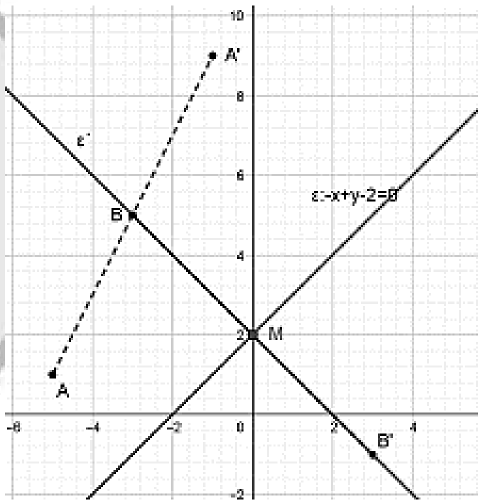
α) Είναι $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-1+3}{2}=1$, $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{5+3}{2}=4$, άρα $M(1,4)$.

β) $\lambda_{AB}=\dfrac{3-5}{3+1}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

γ) Έστω μ η μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ. Τότε $\lambda_\mu\cdot\lambda_{AB}=-1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\lambda_\mu=-1 \Leftrightarrow \lambda_\mu=2$ και η μ έχει εξίσωση: $y-4=2(x-1) \Leftrightarrow y=-2x+2$.

21662.Δίνεται η ευθεία ε: $-x+y-2=0$ και τα σημεία Α(-5,1) και Β (-3,5).
α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Β. **(Μονάδες 10)**
β) Να βρείτε:
i. την εξίσωση της ευθείας ε΄ που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ε. **(Μονάδες 5)**
ii. το σημείο τομής των ευθειών ε και ε΄. **(Μονάδες 5)**
iii. το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ε. **(Μονάδες 5)**

Λύση



Έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς το Β. Τότε το σημείο Β θα είναι το μέσο του ΑΑ΄ οπότε:

$x_B=\dfrac{x_A+x_{A'}}{2} \Leftrightarrow -3=\dfrac{-5+x_{A'}}{2} \Leftrightarrow -6=-5+x_{A'} \Leftrightarrow x_{A'}=-1$ και

$y_B=\dfrac{y_A+y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 5=\dfrac{1+y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 10=1+y_{A'} \Leftrightarrow y_{A'}=9$, άρα Α΄(- 1,9).

β) i. Είναι $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{-1}{1}=1$ και $\varepsilon'\perp\varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'}\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'}=-1$.
Η ε΄ έχει εξίσωση: $y-5=-(x+3) \Leftrightarrow y=-x+2$

ii. Έστω Μ το σημείο τομής των ευθειών ε, ε΄. Οι συντεταγμένες του του Μ, θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των ε, ε΄.

$\begin{cases} -x+y-2=0 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-x+2-2=0 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=0 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$, άρα Μ(0,2)

iii. Αν Β΄ είναι το συμμετρικό του Β ως προς την ευθεία ε, τότε το Β΄ είναι σημείο της ευθείας ε΄ και το Μ θα είναι το μέσο του ΒΒ΄ οπότε: $x_M = \frac{x_{B'} + x_B}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{x_{B'} - 3}{2} \Leftrightarrow x_{B'} - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{B'} = 3$ και

$y_M = \frac{y_{B'} + y_B}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{y_{B'} + 5}{2} \Leftrightarrow y_{B'} + 5 = 4 \Leftrightarrow y_{B'} = -1$, άρα $B'(3,-1)$.

4ο Θέμα

14970. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο Μ(2, 1).
α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:
i. Την εξίσωση της.
ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες. (Μονάδες 6) (2+4)
β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.
i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.
ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.
(Μονάδες 19) (6+7+6)

Λύση

α) i. Η ε έχει εξίσωση: $y - 1 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow y = \lambda x + 1 - 2\lambda$.

ii. Η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες όταν δεν είναι παράλληλη στον x΄x, άρα $\lambda \neq 0$ και όταν δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή όταν $1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$.

β) i. Για y = 0 η ε γίνεται $0 = \lambda x + 1 - 2\lambda \Leftrightarrow \lambda x = 1 - 2\lambda \Leftrightarrow x = \frac{1-2\lambda}{\lambda}$, άρα $A\left(\frac{1-2\lambda}{\lambda}, 0\right)$.

Για x = 0 είναι y = 1 – 2λ, άρα $B(0, 1-2\lambda)$.

Είναι $(OA) = \left|\frac{1-2\lambda}{\lambda}\right|$ και $(OB) = |1-2\lambda|$.

ii. Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές όταν

$$(OA) = (OB) \Leftrightarrow \left|\frac{1-2\lambda}{\lambda}\right| = |1-2\lambda| \Leftrightarrow \frac{\cancel{|1-2\lambda|}}{|\lambda|} = \cancel{|1-2\lambda|} \Leftrightarrow 1 = |\lambda| \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

iii. Για λ = 1 είναι $(OA) = \left|\frac{1-2}{1}\right| = 1$, $(OB) = |1-2| = 1$, οπότε $(OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}$ τ.μ..

Αν $\lambda = -1$ είναι $(OA) = \left|\frac{1+2}{-1}\right| = 3$, $(OB) = |1+2| = 3$, οπότε $(OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{9}{2}$ τ.μ..

14978. Δίνονται τα σημεία Α(1,1) ,Β(3,3) .
α) Αν Μ(x, y) σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα. (Μονάδες 6)
β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. (Μονάδες 4)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ. (Μονάδες 8)
δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $d_1=(MA)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ και $d_2=(MB)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$

β) Για να ανήκει το Μ στην μεσοκάθετο του ΑΒ πρέπει να ισαπέχει από τα άκρα του Α και Β δηλαδή να ισχύει $d_1=d_2$.

γ) Είναι $d_1=d_2\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2\Leftrightarrow$
$\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}-2y+1=\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-6y+9\Leftrightarrow 4x+4y-16=0\Leftrightarrow x+y-4=0$.

δ) Για να είναι ισόπλευρο το τρίγωνο ΣΑΒ αρκεί $(AB)=(\Sigma A)=(\Sigma B)$ με Σ(x,y).
Είναι $(\Sigma A)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=d_1$, $(\Sigma B)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=d_2$ και
$(AB)=\sqrt{(1-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
Άρα αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}d_1=(AB)\\ d_1=d_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{2}\\ x+y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=8\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-1)^2+(3-x)^2=8\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1+9-6x+x^2=8\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-8x+2=0\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2-4x+1=0\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2}\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4\pm2\sqrt{3}}{2}\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=2+\sqrt{3}\ \text{ ή }\ x=2-\sqrt{3}\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+\sqrt{3}\ \text{ ή }\ x=2-\sqrt{3}\\ y=2-\sqrt{3}\ \text{ ή }\ y=2+\sqrt{3}\end{cases}$$

Άρα το Σ είναι: $\Sigma\left(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\right)$ ή $\Sigma\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)$

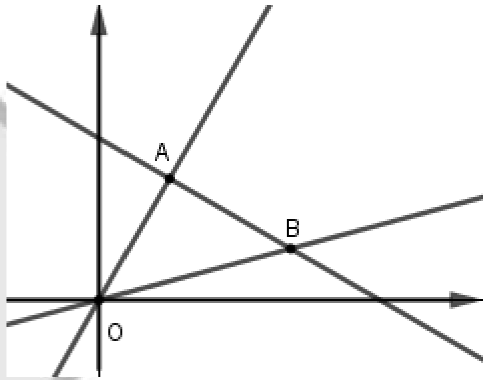
15029.Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A\left(1,\sqrt{3}\right)$, $B\left(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1\right)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ καθώς και τη γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 6)**

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$. **(Μονάδες 7)**

δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. **(Μονάδες 6)**



Λύση

α) Είναι $\lambda_{OA}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{1-0}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=\sqrt{3}=\varepsilon\varphi60^\circ\Leftrightarrow\omega=60^\circ$, οπότε η ΟΑ έχει εξίσωση $y=\sqrt{3}x$.

β) Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\varphi=-\varepsilon\varphi30^\circ=\varepsilon\varphi150^\circ\Leftrightarrow\varphi=150^\circ$.

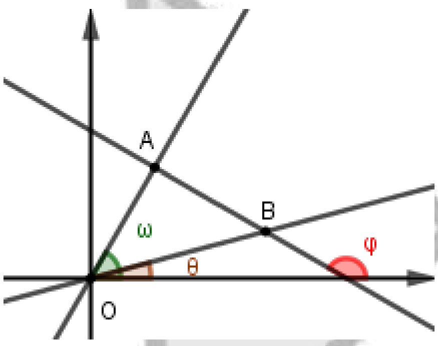
Η AB έχει εξίσωση: $y-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Είναι $\lambda_{OA}\lambda_{AB}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-1\Leftrightarrow OA\perp AB\Leftrightarrow \hat{A}=90^\circ$.

Είναι $(OA)=\sqrt{(1-0)^2+\left(\sqrt{3}-0\right)^2}=2$ και

$(AB)=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1-1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1-\sqrt{3}\right)^2}=2$, άρα (OA)=(AB)

οπότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$.



δ) Επειδή το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, είναι $AOB=45^\circ$.

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η OB με τον xx΄, είναι $\theta=\omega-AOB=60^\circ-45^\circ=15^\circ$.

Η ευθεία OB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{OB}=\frac{\sqrt{3}+1-0}{\sqrt{3}-1-0}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\Leftrightarrow εφ15^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

15042.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο του επιπέδου Μ, τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Μ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του ΒΓ. (Μονάδες 2)

γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\kappa$ και $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\kappa=\lambda=0$. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες. (Μονάδες 8)

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{M\Gamma}$ άρα $\overrightarrow{MB}//\overrightarrow{M\Gamma}$ οπότε τα σημεία Μ, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β) $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{M\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{\Gamma M}$ άρα το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

γ) i. Επειδή τα Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου δεν είναι συνευθειακά, οπότε ότι τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

Είναι $\kappa\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

Αν $\kappa\neq0$ τότε $\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{\lambda}{\kappa}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$ άτοπο, άρα κ = 0.

Αν $\lambda\neq0$ τότε $\lambda\overrightarrow{AB}=\kappa\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\frac{\kappa}{\lambda}\overrightarrow{A\Gamma}\Rightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$ άτοπο άρα λ = 0. Επομένως κ = λ = 0.

ii. Επειδή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\kappa=0$ είναι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$ επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.

Είναι $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\lambda=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$, δηλαδή η διάμεσος ΑΜ του ορθογώνιου τριγώνου είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ, δηλαδή είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ.

15275.Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο Μ(2, 1).
α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:
i. Την εξίσωση της. (Μονάδες 2)
ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες. (Μονάδες 5)
β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.
i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ. (Μονάδες 6)
ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 6)
iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται. (Μονάδες 6)

Λύση

α) i. $y-1=\lambda(x-2)\Leftrightarrow y=\lambda x-2\lambda+1$

ii. Αν λ = 0 τότε η ευθεία είναι η y = 1 και είναι παράλληλη με τον άξονα x΄x και δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες. Ακόμη η ευθεία δεν θα σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες όταν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή όταν $0=\lambda\cdot 0-2\lambda+1\Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$

άρα για $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq\frac{1}{2}$ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

β) i. Για y = 0 είναι $0=\lambda x-2\lambda+1\Leftrightarrow \lambda x=2\lambda-1\Leftrightarrow x=\frac{2\lambda-1}{\lambda}$, άρα $A\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda},0\right)$ και $(OA)=\left|\frac{2\lambda-1}{\lambda}\right|$.
Για x = 0 είναι $y=-2\lambda+1$, άρα $B(0,-2\lambda+1)$ και $(OB)=|-2\lambda+1|=|2\lambda-1|$.

ii. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, μόνο όταν (ΟΑ) = (ΟΒ) . Είναι:

$$(OA)=(OB)\Leftrightarrow\left|\frac{2\lambda-1}{\lambda}\right|=|2\lambda-1|\Leftrightarrow\frac{\cancel{|2\lambda-1|}}{|\lambda|}=\cancel{|2\lambda-1|}\overset{\lambda\neq\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}\frac{1}{|\lambda|}=1\Leftrightarrow|\lambda|=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1$$

iii. Αν λ = – 1 , τότε (ΟΑ)= 3 και (ΟΒ)= 3 , οπότε το εμβαδόν (ΟΑΒ) του τριγώνου ΟΑΒ είναι
$(OAB)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}$
Αν λ = 1, τότε (ΟΑ) = 1 και (ΟΒ) = 1 , οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}$

Σχόλιο
Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (υποτείνουσα) με τον άξονα xx′ είναι 45° ή 135° . Έτσι, έχουμε $\lambda=\varepsilon\varphi45^\circ=1$ ή $\lambda=\varepsilon\varphi135^\circ=-1$ που είναι οι τιμές που βρήκαμε παραπάνω.

16003.Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_\alpha:(\alpha-4)x-2\alpha y+\alpha+4=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν α = 0 και όταν α = 1 και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο Μ. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το Μ. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx, Oy στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.
i. Να αποδείξετε ότι $0<\alpha<4$. (Μονάδες 6)
ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει (ΟΑ)= 2(ΟΒ) . (Μονάδες 5)

Λύση

α) Για α = 0 είναι $-4x+4=0\Leftrightarrow x=1$ και για α = 1 είναι $-3x-2y+5=0$.

Οι συντεταγμένες του Μ είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} x=1 \\ -3x-2y+5=0 \end{cases}$.

Είναι $\begin{cases} x=1 \\ -3x-2y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ -3-2y+5=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ -2y=-2 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, άρα οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο Μ(1, 1).

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο Μ(1, 1) .
Με x = y = 1 η αρχική εξίσωση γράφεται $\alpha-4-2\alpha+\alpha+4=0$ και προφανώς ισχύει. Άρα, όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο Μ.

γ) i. Οι ευθείες που προκύπτουν όταν α = 4 ή α = 0 δεν τέμνουν και τους δυο άξονες αφού η πρώτη είναι παράλληλη στον x΄x και η δεύτερη στον y΄y . Έτσι, βρίσκουμε τα κοινά σημεία των ευθειών της οικογένειας με τους άξονες, όταν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 4$.

Για x = 0 είναι $y=\frac{\alpha+4}{2\alpha}$ και για y = 0 είναι $x=-\frac{\alpha+4}{\alpha-4}$, οπότε τα κοινά σημεία με τους άξονες είναι τα $A\left(-\frac{\alpha+4}{\alpha-4},0\right)$ και $B\left(0,\frac{\alpha+4}{2\alpha}\right)$. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται στους θετικούς ημιάξονες, μόνο όταν:

$$\begin{cases} -\frac{\alpha+4}{\alpha-4}>0 \\ \frac{\alpha+4}{2\alpha}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+4)(\alpha-4)<0 \\ 2\alpha(\alpha+4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4<\alpha<4 \\ \alpha<-4 \text{ ή } \alpha>0 \end{cases}.$$

Η συναλήθευση των δυο αποτελεσμάτων δίνει 0 < α < 4 που είναι το ζητούμενο.

ii. Όταν 0 < α < 4 τα σημεία Α, Β είναι στους θετικούς ημιάξονες, οπότε

$(OA)=-\frac{\alpha+4}{\alpha-4}$ και $(OB)=\frac{\alpha+4}{2\alpha}$, οπότε

$$(OA)=2(OB) \Leftrightarrow -\frac{\cancel{\alpha+4}}{\alpha-4}=\cancel{2}\,\frac{\cancel{\alpha+4}}{\cancel{2}\alpha} \Leftrightarrow -\alpha=\alpha-4 \Leftrightarrow 4=2\alpha \Leftrightarrow \alpha=2$$

17078.Δίνονται τα σημεία $A(3,2\alpha)$, $B(4,\alpha)$, $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και β έχει εξίσωση $y=-\alpha x+5\alpha$. (Μονάδες 6)

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. (Μονάδες 7)

iii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:
«Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β είναι $\lambda_{AB}=\frac{\alpha-2\alpha}{4-3}=-\alpha$ και η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y-\alpha=-\alpha(x-4)\Leftrightarrow y=-\alpha x+5\alpha$.

ii. Το σημείο Γ βρίσκεται στην ευθεία ΑΒ όταν

$1-\alpha=-\alpha(\alpha+1)+5\alpha \Leftrightarrow 1-\alpha=-\alpha^2-\alpha+5\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-5\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

Το σημείο Δ βρίσκεται στην ευθεία ΑΒ όταν $1=-\alpha\cdot\alpha+5\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-5\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

iii. Είναι $\overrightarrow{AB}=(4-3,\alpha-2\alpha)=(1,-\alpha)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(\alpha+1-\alpha,1-\alpha-1)=(1,-\alpha)$.

Αν $\alpha\neq\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ τότε τα σημεία Γ και Δ δεν ανήκουν στην ευθεία ΑΒ και επειδή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε $\alpha\neq\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ και

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Delta}\right| \Leftrightarrow \sqrt{1^2+(-\alpha)^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+(1-2\alpha)^2} \Leftrightarrow \cancel{1}+\cancel{\alpha^2}=\cancel{\alpha^2}-6\alpha+9+\cancel{1}-4\alpha+4\alpha^2 \Leftrightarrow$

$4\alpha^2-10\alpha+9=0$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα Δ = -44 < 0 άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

18568.Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 04)

β) Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα y΄y σε ένα σημείο Δ και η ευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα σημείο Ε, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε. (Μονάδες 10)

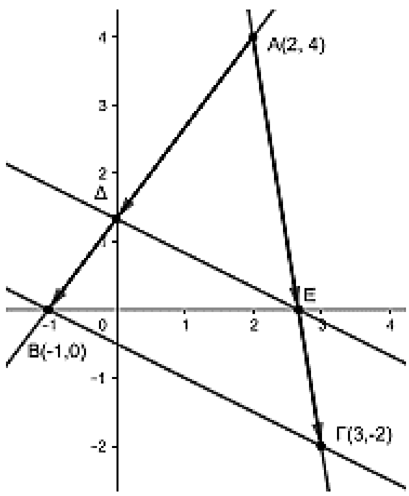
ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{E\Gamma}$. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ. (Μονάδες 05)

Λύση

α) Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{0-4}{-1-2}=\dfrac{4}{3}$ και $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{-2-4}{3-2}=-6$.

Επειδή $\lambda_{AB}\neq\lambda_{A\Gamma}$ οι ευθείες ΑΒ και ΑΓ δεν είναι παράλληλες, οπότε τα σημεία Α,Β και Γ δεν είναι συνευθειακά και αποτελούν κορυφές τριγώνου.



β) i. Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση: $y=\dfrac{4}{3}(x+1) \Leftrightarrow y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$ και για $x=0$ γίνεται $y=\dfrac{4}{3}$, άρα $\Delta\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$.

Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση $y-4=-6(x-2) \Leftrightarrow y=-6x+16$

και για $y=0$ γίνεται $0=-6x+16 \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{3}$, άρα $E\left(\dfrac{8}{3},0\right)$.

ii. Είναι $\overrightarrow{A\Delta}=\left(0-2,\dfrac{4}{3}-4\right)=\left(-2,-\dfrac{8}{3}\right)=2\left(-1,-\dfrac{4}{3}\right)$ και

$\overrightarrow{\Delta B}=\left(-1-0,0-\dfrac{4}{3}\right)=\left(-1,-\dfrac{4}{3}\right)$, άρα $\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{\Delta B}$.

Είναι $\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{8}{3}-2,0-4\right)=\left(\dfrac{2}{3},-4\right)=2\left(\dfrac{1}{3},-2\right)$ και $\overrightarrow{E\Gamma}=\left(3-\dfrac{8}{3},-2-0\right)=\left(\dfrac{1}{3},-2\right)$, άρα $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{E\Gamma}$.

γ) Είναι $\lambda_{ΔΕ}=\dfrac{0-\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}-0}=-\dfrac{1}{2}$ και $\lambda_{ΒΓ}=\dfrac{-2-0}{3+1}=-\dfrac{1}{2}$, άρα $\lambda_{ΔΕ}=\lambda_{ΒΓ}\Leftrightarrow ΑΔ//ΒΓ$.

Γενική μορφή ευθείας

2ο Θέμα

15657.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+y=6$ και $\varepsilon_1: x-2y=-2$

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο Μ. **(Μονάδες 12)**

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ και $\varepsilon_3: 3x-y=4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}2x+y=6\\x-2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=6\\-2x+4y=4\end{cases}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}5y=10\\x-2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=2\end{cases}$$

Άρα το κοινό τους σημείο Μ είναι το $M(2,2)$.

β) Αφού οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $M(2,2)$ τότε για να διέρχονται και οι τρεις ευθείες από το ίδιο σημείο πρέπει η $\varepsilon_3: 3x-y=4$ να διέρχεται από το Μ.

Για $x=2$ και $y=2$ είναι $3\cdot2-2=4$ που ισχύει. Άρα και οι τρείς ευθείες διέρχονται από το Μ.

16766.Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x-3y=4$ και $9x+3y=6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο Α(1, − 1). **(Μονάδες 8)**

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στον άξονα x΄x. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Η (ε_1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=-\dfrac{1}{-3}=\dfrac{1}{3}$ και η (ε_2) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=-\dfrac{9}{3}=-3$ Είναι $\lambda_1\lambda_2=\dfrac{1}{3}(-3)=-1\Leftrightarrow\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$

β) Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, οπότε: $10x=10$ ή $x=1$ Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $9x+3y=6$ και έχουμε διαδοχικά: $9-3y=6\Leftrightarrow 9-6=3y\Leftrightarrow 3y=3\Leftrightarrow y=1$

Άρα, το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι το Α(1, − 1).

γ) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα x΄x έχει εξίσωση $x=x_0$. Επομένως, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι $x=1$.

4ο Θέμα

15253.Δίνεται η εξίσωση $\left(\mu^2-1\right)x+\left(3\mu^2-2\mu-1\right)y-5\mu^2+4\mu+1=0$ (1), όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε :

i. είναι παράλληλες στον x΄x. (Μονάδες 4)

ii. είναι παράλληλες στον y΄y. (Μονάδες 4)

iii. διέρχονται από το (0,0). (Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Η (1) δεν παριστάνει ευθεία όταν $\begin{cases}\mu^2-1=0\\ 3\mu^2-2\mu-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=\pm1\\ \mu=1 \text{ ή } \mu=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\mu=1$.

Άρα για $\mu\neq1$ η (1) παριστάνει ευθεία.

β) i. Για να είναι η (1) παράλληλη στον xx΄ πρέπει Α =0 $\Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ= -1. Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά μ = -1.

ii. Για να είναι παράλληλη στον y΄y πρέπει Β =0 $\Leftrightarrow$ μ = 1 ή $\mu=-\dfrac{1}{3}$.Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά $\mu=-\dfrac{1}{3}$.

iii. Για να διέρχεται από το (0,0) πρέπει $\Gamma=0\Leftrightarrow-5\mu^2+4\mu+1=0\Leftrightarrow\mu=1$ ή $\mu=-\dfrac{1}{5}$. Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά $\mu=-\dfrac{1}{5}$.

γ) Για μ = -1 η (1) γίνεται $\varepsilon_1: 4y-8=0\Leftrightarrow y=2$. Για μ = 0 η (1) γίνεται $\varepsilon_2:-x-y+1=0$.

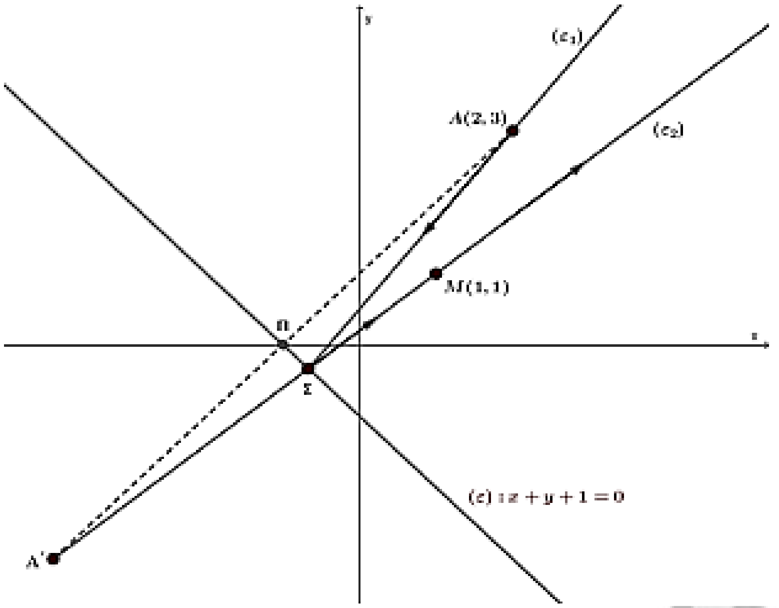
Από το σύστημα των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχουμε: $\begin{cases}y=2\\ -x-y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\ -x-2+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\ x=-1\end{cases}$.

Δύο από τις ευθείες της (1) τέμνονται στο σημείο $M(1,2)$, για να διέρχονται όλες οι ευθείες της (1) από το Μ πρέπει: $\left(\mu^2-1\right)(-1)+\left(3\mu^2-2\mu-1\right)\cdot2-5\mu^2+4\mu+1=0\Leftrightarrow$

$-\mu^2+1+6\mu^2-\cancel{4\mu}-2-5\mu^2+\cancel{4\mu}+1=0$ που ισχύει.

Άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1), διέρχονται από το σταθερό σημείο Μ(-1,2).

15439.Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x+y+1=0$, , μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.



α) i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1,0)$. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία (ε) είναι το σημείο $A'(-4.-3)$. (Μονάδες 5)

β) i. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2) η οποία διέρχεται από τα σημεία Α΄, Σ, Μ, τότε να βρείτε την εξίσωσή της. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε). (Μονάδες 5)

γ) Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1). (Μονάδες 4)

Λύση

α) i. Βρίσκουμε την προβολή Π του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε) :
Είναι $\lambda_\varepsilon=-1$ και $\varepsilon\perp A\Pi \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\lambda_{A\Pi}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Pi}=1$,
οπότε η ΑΠ έχει εξίσωση $y-3=1\cdot(x-2)\Leftrightarrow y=x+1$
Οι συντεταγμένες του σημείου Ρ προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=x+1 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x+x+1+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 2x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1+1=0 \\ x=-1 \end{cases}$$, άρα Π(- 1, 0)

ii. Το Π είναι το μέσο του ΑΑ΄, οπότε $x_\Pi=\frac{x_A+x_{A'}}{2}\Leftrightarrow -1=\frac{2+x_{A'}}{2}\Leftrightarrow -2=2+x_{A'}\Leftrightarrow x_{A'}=-4$ και

$y_\Pi=\frac{y_A+y_{A'}}{2}\Leftrightarrow 0=\frac{3+y_{A'}}{2}\Leftrightarrow 0=3+y_{A'}\Leftrightarrow y_{A'}=-3$, άρα $A'(-4,-3)$.

β) i. Είναι $\lambda_2=\frac{1+3}{1+4}=\frac{4}{5}$ και η εξίσωση της (ε_2) είναι $y-1=\frac{4}{5}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$.

ii. Οι συντεταγμένες του σημείου Σ, δηλαδή του σημείου πρόσπτωσης της φωτεινής ακτίνας πάνω στην ευθεία (ε), προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των ευθειών (ε) και (ε_2):

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}+1=0 \\ y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4x+1+5=0 \\ y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x=-6 \\ y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=\frac{4}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{5}=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

άρα $\Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

γ) Βρίσκουμε την προσπίπτουσα ακτίνα (ε_1), δηλαδή την ΑΣ:

Είναι $\lambda_{A\Sigma}=\dfrac{3+\frac{1}{3}}{2+\frac{2}{3}}=\dfrac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{5}{4}$ και η εξίσωσή της είναι: $y-3=\frac{5}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$

18244.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2: y=x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)

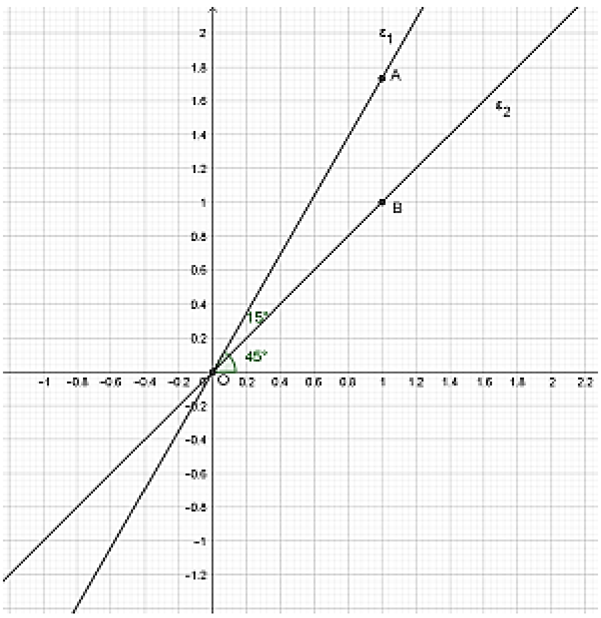
β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 6)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι 15°. (Μονάδες 3)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Η ευθεία ε_1 για x = 1 δίνει $y=\sqrt{3}$, άρα το $A(1,\sqrt{3})$ είναι σημείο της ε_1, οπότε αυτή διέρχεται από τα Ο και Α.
Η ευθεία ε_2 για x = 1 δίνει $y=1$, άρα το $B(1,1)$ είναι σημείο της ε_2, οπότε αυτή διέρχεται από τα Ο και Β.



β) Έστω ω_1 η γωνία που σχηματίζει η ε_1 με τον άξονα x΄x, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1=\lambda_1=\sqrt{3}\Leftrightarrow\omega_1=60^\circ$.
Έστω ω_2 η γωνία που σχηματίζει η ε_2 με τον άξονα x΄x, τότε $\varepsilon\varphi\omega_2=\lambda_2=1\Leftrightarrow\omega_1=45^\circ$.

γ) Από το σχήμα προκύπτει ότι η γωνία των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι ίση με $\omega_1-\omega_2=15^\circ$.

δ) Έστω $\vec{\delta}_1//\varepsilon_1$, τότε $\vec{\delta}_1=(1,\sqrt{3})$ και $\vec{\delta}_2//\varepsilon_2$, τότε $\vec{\delta}_2=(1,1)$.

Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\delta}_1,\hat{\ }\vec{\delta}_2\right)=\dfrac{1\cdot1+\sqrt{3}\cdot1}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ άρα $\sigma\upsilon\nu15^\circ=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

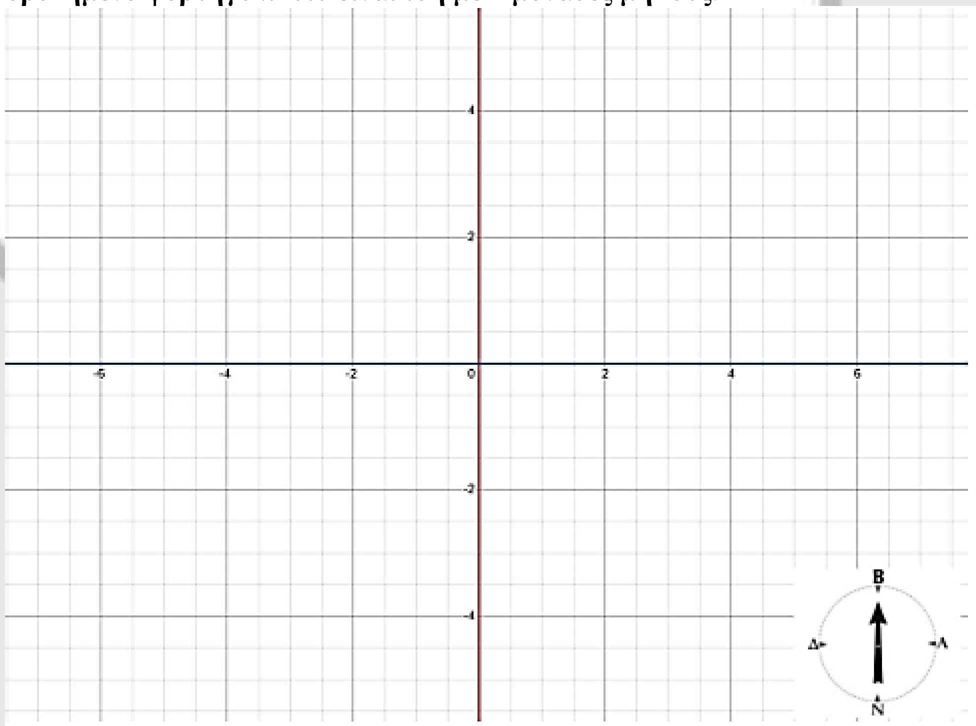
16477.Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy , η εξίσωση ευθείας ε_λ: $\lambda x+(1-\lambda)y+2=0$ όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο O(0,0) .

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ . (Μονάδες 10)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

(Μονάδες 5)

β) Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το P έχει εξίσωση $x+y+4=0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους. (Μονάδες 10)



Λύση

α) i. Για λ = 0 είναι ε_0: $y+2=0 \Leftrightarrow y=-2$ και για λ = 1 είναι ε_1: $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Δύο από τις ευθείες ε_λ, οι $\varepsilon_0,\varepsilon_1$ τέμνονται στο σημείο $(-2,-2)$. Για να είναι αυτές οι συντεταγμένες του φάρου Φ πρέπει: $\lambda(-2)+(1-\lambda)(-2)+2=0 \Leftrightarrow -2\lambda-2+2\lambda+2=0$ ισχύει.

Άρα $\Phi(-2,-2)$.

ii. Για να υπάρχει φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το O πρέπει $\lambda\cdot 0+(1-\lambda)\cdot 0+2=0 \Leftrightarrow 2=0$ αδύνατο.

Οπότε δεν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β) Έστω ότι το P έχει συντεταγμένες (x_1,y_1). Επειδή το P βρίσκεται στην ευθεία $x+y+4=0$, ισχύει ότι: $x_1+y_1+4=0 \Leftrightarrow y_1=-4-x_1$

Η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα PO με μήκος 4 μονάδες, άρα

$$(PO)=4 \Leftrightarrow \sqrt{(0-x_1)^2+(0-y_1)^2}=4 \Leftrightarrow x_1^2+y_1^2=16 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1^2+(-4-x_1)^2=16 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2+x_1^2+8x_1+16=16 \Leftrightarrow 2x_1^2+8x_1=0 \Leftrightarrow 2x_1(x_1+4)=0 \Leftrightarrow x_1=0 \text{ ή } x_1=-4$$

Για $x_1 = 0$ είναι $y_1 = -4$ και για $x_1 = -4$ είναι $y_1 = 0$

Επειδή το Ρ βρίσκεται βορειότερα του φάρου Φ είναι $y_1 > -2$, άρα το ρυμουλκό πλοίο έχει συντεταγμένες $P(-4,0)$.

15475.Δύο εργοστάσια Α και Β τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες Α(2,1), Β(4,3), βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια. (Μονάδες 8)

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση ε:$y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια. (Μονάδες 10)

γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι Ν(4,1), να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} = \dfrac{3-1}{4-2} = 1$ και εξίσωση $y-1 = x-2 \Leftrightarrow y = x-1$.

β) Επειδή το σημείο $N(x,y)$ στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα πρέπει να ισαπέχει από τα Α και Β, ισχύει ότι $(NA)=(NB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow$

$\cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} - 6y + 9 \Leftrightarrow$

$8x - 4x = -6y + 2y + 25 - 5 \Leftrightarrow 4x = 20 - 4y \Leftrightarrow x = 5 - y \ (1)$

Επειδή όμως το Ν ανήκει και στην ευθεία ε, οι συντεταγμένες του Κ είναι η λύση του συστήματος της (1) με την ε. Είναι $\begin{cases} x = 5-y \\ y = 2x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-y \\ y = 2(5-y)-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-y \\ y = 10-2y-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-y \\ 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$, άρα Ν(4,1).

γ) Είναι $(NA) = (NB) = \sqrt{(4-2)^2 + (1-1)^2} = 2$

18244.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 6)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι 15°. (Μονάδες 3)

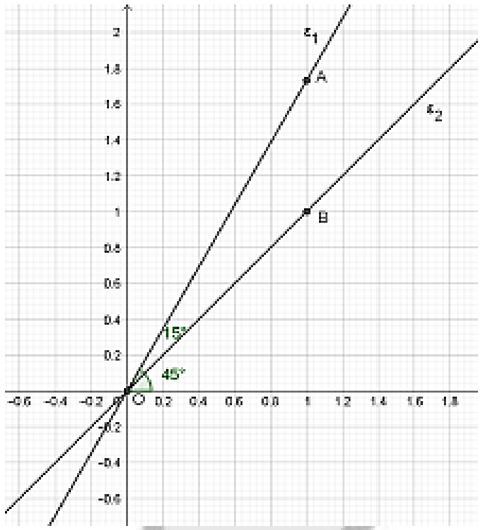
δ) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Η ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(1,\sqrt{3})$ ενώ η ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Β(1,1).

β) Η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = \sqrt{3} = \varepsilon\varphi 60^\circ$, οπότε σχηματίζει γωνία 60° με τον ημιάξονα Οx.

Η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = 1 = \varepsilon\varphi 45^\circ$, οπότε σχηματίζει γωνία 45° με τον ημιάξονα Οx.



γ) Από το σχήμα είναι φανερό ότι η γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

δ) Έστω $\vec{\delta}_1 = \left(1, \sqrt{3}\right)$ το παράλληλο διάνυσμα στην ε_1 και $\vec{\delta}_2 = (1,1)$ το παράλληλο διάνυσμα στην ε_2.

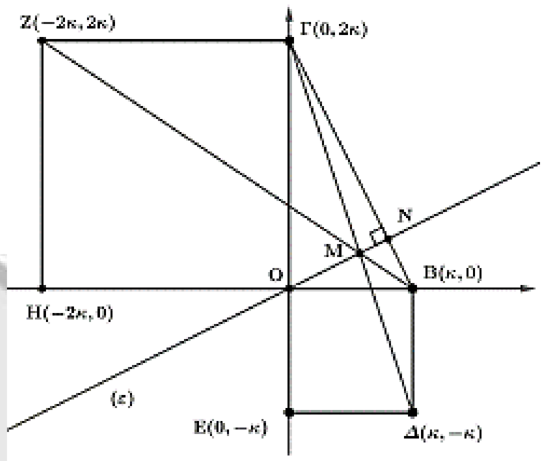
Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}\right) = \dfrac{1\cdot 1 + 1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

21160.Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία Ο(0, 0), Β(κ, 0) και Γ(0,2κ) όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου ΟΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ, τότε:
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΖ. **(Μονάδες 10)**
β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΒΓ που διέρχεται από το Ο. **(Μονάδες 7)**
γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Επειδή τα τετράπλευρα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ είναι τετράγωνα, οι συντεταγμένες των κορυφών τους είναι:
Δ(κ,- κ), Ε(0,- κ), Ζ(-2κ, 2κ) και Η(- 2κ,0)
Η ευθεία ΓΔ έχει συντελεστή διεύθυνσης
$\lambda_{\Gamma\Delta} = \dfrac{-\kappa - 2\kappa}{\kappa - 0} = -3$ και εξίσωση
$y - 2\kappa = 3x \Leftrightarrow y = 3x + 2\kappa$.
Η ευθεία ΒΖ έχει συντελεστή διεύθυνσης
$\lambda_{BZ} = \dfrac{2\kappa - 0}{-2\kappa - \kappa} = -\dfrac{2}{3}$ και εξίσωση
$y - 0 = -\dfrac{2}{3}(x - \kappa) \Leftrightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}\kappa$.



β) Έστω ΟΝ ύψος του τριγώνου ΟΒΓ.
Είναι $\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{2\kappa - 0}{0 - \kappa} = -2$ και $ON \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{ON}\lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ON} = \dfrac{1}{2}$
Το ύψος ΟΝ διέρχεται από την αρχή των αξόνων , οπότε έχει εξίσωση $y = \dfrac{1}{2}x$.

γ) Για να αποδείξουμε ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΒΖ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο, αρκεί να βρούμε σημείο Μ του οποίου οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις των ευθειών. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η τομή δύο ευθειών από τις τρεις ανήκει στην τρίτη ευθεία. Οι συντεταγμένες της τομής Μ των ευθειών (ε) και ΓΔ δίνονται από την λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}\kappa \\ y=\dfrac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}x=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}\kappa \\ y=\dfrac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-4x+4\kappa \\ y=\dfrac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=4\kappa \\ y=\dfrac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4\kappa}{7} \\ y=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\kappa}{7}=\dfrac{2\kappa}{7} \end{cases}$$, άρα

$M\left(\dfrac{4\kappa}{7},\dfrac{2\kappa}{7}\right)$.

Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ αφού οι συντεταγμένες του Μ την επαληθεύουν, οπότε $\dfrac{2\kappa}{7}=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{4\kappa}{7}\right)+\dfrac{2\kappa}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2\kappa}{7}=-\dfrac{8\kappa}{21}+\dfrac{2\kappa}{3} \Leftrightarrow 6\kappa=-8\kappa+14\kappa$ ισχύει.

Εμβαδόν τριγώνου

2ο Θέμα

15440.Δίνονται τα σημεία $A(0,2), B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$. **(Μονάδες 9)**

β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν τρίγωνο. **(Μονάδες 8)**

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=(3-0,0-2)=(3,-2)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(1-0,1-2)=(1,-1)$

β) i. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3+2=-1\neq 0$, οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα και τα σημεία Α, Β, Γ ορίζουν τρίγωνο.

ii. $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}$ τ.μ.

16194.Δίνονται οι ευθείες (ε_1) : $8\chi+\psi-28=0$, (ε_2) : $\chi-\psi+1=0$, (ε_3) : $3\chi+4\psi+5=0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των (ε_1) και (ε_2). **(Μονάδες 09)**

β) Αν το σημείο τομής είναι το Μ(3,4) να υπολογίσετε:

i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων. **(Μονάδες 08)**

ii. Την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία (ε_3). **(Μονάδες 08)**

Λύση

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις των δύο ευθειών και παίρνουμε $9\chi=27\Leftrightarrow\chi=3$.
Αντικαθιστούμε στην $\chi-\psi=-1$ το $\chi=3$ και παίρνουμε $\psi=4$, άρα Μ(3,4).

β) i. Είναι $\overrightarrow{OM}=(3-0,4-0)=(3,4)$ και $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

ii. $d(M,\varepsilon_3)=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 4+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{30}{5}=6$

16425.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\frac{2}{3}x+1$ και $\varepsilon_2: x=\frac{3}{2}y+9$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1//\varepsilon_2$. **(Μονάδες 12)**

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Είναι $\varepsilon_1: y=\frac{2}{3}x+1$ με $\lambda_1=\frac{2}{3}$ και και $\varepsilon_2: x=\frac{3}{2}y+9\Leftrightarrow x-9=\frac{3}{2}y\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-6\Leftrightarrow -2x+3y+18=0$ με $\lambda_2=\frac{2}{3}$. Είναι $\lambda_1=\lambda_2\Leftrightarrow\varepsilon_1//\varepsilon_2$.

β) Στην ε_1 για x = 0 παίρνουμε $y=1$, οπότε το σημείο Μ(0,1) ανήκει στην ε_1.

Είναι $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(M,\varepsilon_2)=\frac{|-2\cdot 0+3\cdot 1+18|}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}=\frac{21}{\sqrt{13}}=\frac{21\sqrt{13}}{13}$

16759.Δίνονται οι ευθείες ($ε_1$), ($ε_2$) και ($ε_3$) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ($ε_1$) και ($ε_2$) είναι κάθετες. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ($ε_1$) και ($ε_2$) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$. **(Μονάδες 9)**

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ($ε_3$). **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Η ευθεία ($ε_1$) έχει εξίσωση $x - 2y + 1 = 0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Η ευθεία ($ε_2$) έχει εξίσωση $2x + y - 4 = 0$ και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -\frac{2}{1} = -2$

Είναι $\lambda_1\lambda_2 = -1$ Άρα, οι ευθείες ($ε_1$) και (ε2) είναι κάθετες.

β) Για το σημείο τομής των ευθειών ($ε_1$) και ($ε_2$), λύνουμε αρχικά την εξίσωση $x - 2y + 1 = 0$ ως προς x, οπότε: $x = 2y - 1$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $2x + y - 4 = 0$ και έχουμε διαδοχικά:

$2(2y-1)+y-4=0 \Leftrightarrow 4y-2+y-4=0 \Leftrightarrow 5y=6 \Leftrightarrow y=\frac{6}{5}$ και $x=2\cdot\frac{6}{5}-1=\frac{7}{5}$, άρα το σημείο τομής των ($ε_1$) και ($ε_2$) είναι το $A\left(\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$.

γ) Η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε3) με εξίσωση $y + 1 = 0$ είναι:

$$d(A,\varepsilon_1)=\frac{\left|0\cdot\frac{7}{5}+\frac{6}{5}+1\right|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{11}{5}$$

16769. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,7), Β(-1,5) και Γ(3,3).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 09)**

β) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε να υπολογίσετε:

i. Τις συντεταγμένες του Μ.

ii. Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ. **(Μονάδες 16)**

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(-1-1,5-7)=(-2,-2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3-1,3-7)=(2,-4)$.

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=8+4=12$, άρα $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=6$

β) i. Είναι $x_M=\frac{x_B+x_\Gamma}{2}=\frac{-1+3}{2}=1$, $y_M=\frac{y_B+y_\Gamma}{2}=\frac{5+3}{2}=4$, άρα Μ(1,4).

ii. Παρατηρούμε ότι για τα σημεία Α και Μ είναι $x_M = x_A = 1$. Επομένως, η ευθεία ΑΜ είναι κατακόρυφη (δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας), οπότε έχει εξίσωση $x = 1$.

16771.Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Γ(4,-1) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$.

α) Να βρεθεί το σημείο Β. **(Μονάδες 09)**

β) Αν Β(5,0):

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο. **(Μονάδες 08)**

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 08)**

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-2,y_B-1\right)=\left(3,-1\right)\Leftrightarrow\left(x_B-2=3\Leftrightarrow x_B=5\right)$ και $\left(y_B-1=-1\Leftrightarrow y_B=0\right)$, άρα Β(5,0).

β) i. Είναι $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(4-2,-1-1\right)=\left(2,-2\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(3,-1\right)$.

Επειδή $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-6+2=-4\neq 0$ τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Α ,Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $\left(AB\Gamma\right)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=2$

16774.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2,5), Β(3,6) και Γ(-1,-2).
α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ. **(Μονάδες 07)**
β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το Α. **(Μονάδες 09)**
γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον άξονα x΄x. **(Μονάδες 09)**

Λύση

α) $\lambda_{B\Gamma}=\frac{-2-6}{-1-3}=2$

β) Έστω ΑΚ το ύψος από το Α. Τότε ΑΚ ⊥ ΒΓ , οπότε $\lambda_{AK}\lambda_{B\Gamma}=-1\Leftrightarrow 2\lambda_{AK}=-1\Leftrightarrow\lambda_{AK}=-\frac{1}{2}$

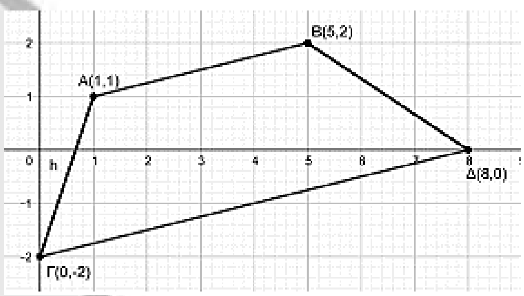
Η εξίσωση της ευθείας ΑΚ θα είναι: $y-5=-\frac{1}{2}\left(x-2\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+6$

γ) Είναι $\lambda_{AB}=\frac{6-5}{3-2}=1$ και ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ΑΒ με τον x΄x,

δηλαδή: $\varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{4}$.

16810.Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία Α(1,1), Β(5,2), Γ(0,-2) και Δ(8,0).
α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο. **(Μονάδες 10)**
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α). **(Μονάδες 15)**

Λύση



α) Τοποθετούμε τα σημεία στο επίπεδο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για να είναι το τετράπλευρο ΑΒΔΓ τραπέζιο αρκεί να αποδείξουμε ότι οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες και οι πλευρές ΑΓ και ΒΔ τέμνονται.

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{2-1}{5-1}=\frac{1}{4}$ και $\lambda_{\Gamma\Delta}=\frac{0+2}{8-0}=\frac{1}{4}$, άρα ΑΒ // ΓΔ.

$\lambda_{A\Gamma}=\frac{-2-1}{0-1}=3$ και $\lambda_{B\Delta}=\frac{0-2}{8-1}=-\frac{2}{7}$, άρα

$\lambda_{A\Gamma}\neq\lambda_{B\Delta}\Leftrightarrow A\Gamma\not\parallel B\Delta$.

β) Για το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΔΓ έχουμε: (ΑΒΔΓ) = (ΑΒΔ) + (ΑΓΔ) (1).

Για τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ υπολογίζουμε πρώτα τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{A\Delta}$ και έχουμε:

$\overrightarrow{A\Gamma}=\left(0-1,-2-1\right)=\left(-1,-3\right)$, $\overrightarrow{A\Delta}=\left(8-1,0-1\right)=\left(7,-1\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(5-1,2-1\right)=\left(4,1\right)$.

Είναι $\det\left(\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{A\Delta}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 7 & -1\end{vmatrix}=1+21=22$, άρα $(A\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{A\Delta}\right)\right|=11$ και

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Delta}\right)=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 7 & -1\end{vmatrix}=-11$, άρα $(AB\Delta)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Delta}\right)\right|=\frac{11}{2}$.

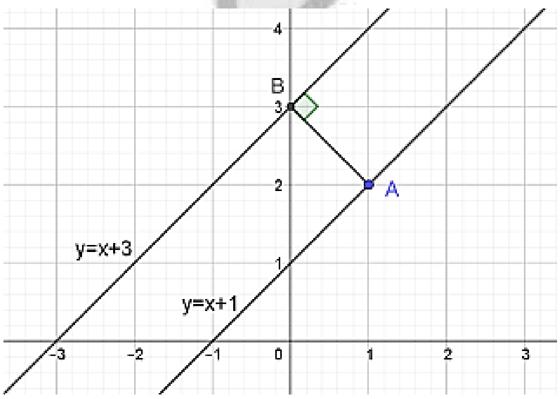
Είναι $(AB\Delta\Gamma)=\frac{11}{2}+11=\frac{33}{2}$

18240.Δίνεται το σημείο Α(1, 2) και η ευθεία (ε): y =x + 3.
α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε) . (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην (ε) . (Μονάδες 8)
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) ,(ε) . (Μονάδες 10)

Λύση

α) (ε): $y=x+3 \Leftrightarrow x-y+3=0$

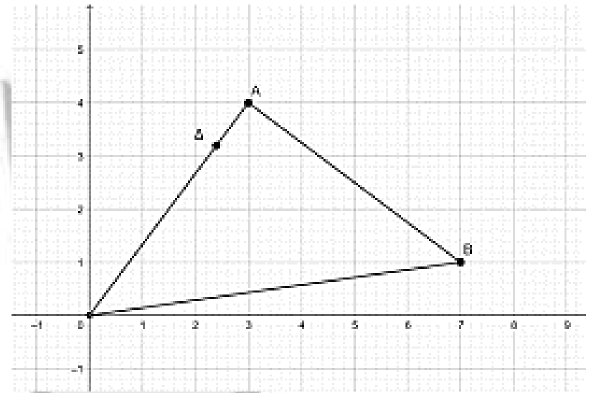
$d(A,\varepsilon)=\frac{|1-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.



β) Είναι $\eta//\varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\eta=\lambda_\varepsilon=1$ και αφού η (η) διέρχεται από το Α(1, 2)
θα έχει εξίσωση $y-2=x-1 \Leftrightarrow y=x+1$.

γ) Οι ευθείες (ε), (η) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

17805.Δίνεται το τρίγωνο ΑΟΒ με Α(3, 4), Β(7,1), Ο η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$ της πλευράς ΑΟ.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 7)
β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$. Μονάδες 9)
γ) Δίνεται ότι $(OAB)=\frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(A\Delta B)=\frac{1}{5}(OAB)$. (Μονάδες 10)



Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{OA}=(3,4)$, $\overrightarrow{A\Delta}=\left(\frac{12}{5}-3,\frac{16}{5}-4\right)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

β) $\overrightarrow{A\Delta}=\left(\frac{12}{5}-3,\frac{16}{5}-4\right)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)=-\frac{1}{5}(3,4)=-\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$

γ) Είναι $\det\left(\overrightarrow{A\Delta},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ 4 & -3\end{vmatrix}=\frac{9}{5}+\frac{16}{5}=\frac{25}{5}=5$, άρα $(A\Delta B)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{A\Delta},\overrightarrow{AB}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}$ τ.μ. .

Είναι $\frac{1}{5}(OAB)=\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{2}=\frac{5}{2}=(A\Delta B)$.

18979.Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+3y=5$ και $\varepsilon_2: 4x+6y=8$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,1) είναι σημείο της ευθείας ε_1. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε_2. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $\lambda_1=-\frac{2}{3}$ και $\lambda_2=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$. Επειδή $\lambda_1=\lambda_2$, είναι $\varepsilon_1//\varepsilon_2$.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου Α(1,1) επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε_1, αφού $2\cdot 1+3\cdot 1=5$. Άρα το σημείο Α ανήκει στην ευθεία ε_1.

γ) Είναι $d(A,\varepsilon_2)=\frac{|4\cdot 1+6\cdot 1-8|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{2}{\sqrt{52}}=\frac{2}{2\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$.

20885.Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(-3, -1) και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x΄x και y΄y, είναι: Ε = 8. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Εφόσον η ε σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{3\pi}{4}$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}=\varepsilon\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ και εξίσωση $y+1=-(x+3)\Leftrightarrow y=-x-4$.

β) Από την εξίσωση της ευθείας ε για x = 0, το y = - 4. Επίσης για y = 0, το x = - 4 . Άρα η ε τέμνει τον άξονα x΄ x στο σημείο Κ(- 4, 0) και τον y΄ y στο Λ(0, - 4).

Είναι $(OK\Lambda)=\frac{1}{2}(OK)(O\Lambda)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$

4ο Θέμα

15194.Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1,1), Β(4,4) και Γ(3,1).

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε σημείο Κ της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε (ΚΑ) = (ΚΒ) . Τι ιδιότητα έχει το σημείο Κ ; (Μονάδες 9)

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία Α,Β και Γ δεν είναι συνευθειακά.

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{4-1}{4-1}=1$ και $\lambda_{B\Gamma}=\frac{1-4}{3-4}=\frac{-3}{-1}=3$. Αφού $\lambda_{AB}\neq\lambda_{B\Gamma}$ τότε δεν είναι συνευθειακά.

β) Για το μέσο Μ της ΒΓ έχουμε $x_M=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$ και $y_M=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$, άρα $M\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Αν (ε) είναι η μεσοκάθετος του ΒΓ τότε ισχύει $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1\Leftrightarrow 3\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{3}$

Άρα έχουμε $(\varepsilon): y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$

γ) Αφού το σημείο Κ είναι σημείο της (ε) τότε $K\left(x,-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}\right)$.

Είναι $(KA)=(KB)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}=\sqrt{(x-4)^2+\left(4+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}\Leftrightarrow$

$(x-1)^2+\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2=(x-4)^2+\left(4+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2=(x-4)^2+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2\Leftrightarrow$

$(x-1)^2-(x-4)^2=\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2\Leftrightarrow 3(2x-5)=3\left(\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\right)\Leftrightarrow$

$2x-5=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\Leftrightarrow 6x-15=2x-7\Leftrightarrow 4x=8\Leftrightarrow x=2$

Άρα $K\left(2,-\frac{1}{3}2+\frac{11}{3}\right)\equiv K(2,3)$.

Το Κ ως σημείο της μεσοκαθέτου (ε) του ΒΓ ισαπέχει από τα άκρα του Β και Γ.
Άρα τελικά είναι (ΚΑ)=(ΚΒ)=(ΚΓ) και τα Α,Β,Γ είναι κορυφές τριγώνου που ισαπέχουν από το Κ.
Επομένως το Κ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή το περίκεντρο.

15273.Θεωρούμε τα σταθερά σημεία Α(3,4), Β(2,5) και Γ(- 2,2) και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha-1,\ 3\alpha+1),\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 5)
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)
γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ. (Μονάδες 7)
δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει (ΜΒΓ) = (ΑΒΓ) . Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά; (Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(2-3,5-4)=(-1,1)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(-2-2,2-5)=(-4,-3)$.

Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -4 & -3\end{vmatrix}=3+4=7\neq0$, οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}$ δεν είναι συνευθειακά, άρα τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Η ευθεία ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{B\Gamma}=\lambda_{\overrightarrow{B\Gamma}}=\frac{3}{4}$ και εξίσωση: $y-5=\frac{3}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$.

γ) Είναι $\begin{cases}x_M=4\alpha-1\\ y_M=3\alpha+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_M=12\alpha-3\\ -4y_M=-12\alpha-4\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}3x_M-4y_M=-7$

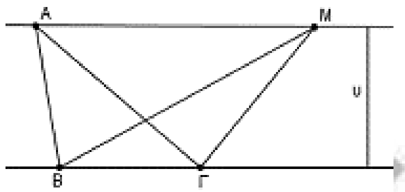
Οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση $3x-4y=-7\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$, οπότε τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία ε: $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$. Είναι $\lambda_\varepsilon=\lambda_{B\Gamma}=\frac{3}{4}$, οπότε ε//ΒΓ.

Ακόμη $3\cdot3-4\cdot4=-7\Leftrightarrow9-16=-7$ ισχύει, δηλαδή οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την ε, οπότε η ευθεία ε διέρχεται από το Α.

δ) Είναι $(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}},\overrightarrow{\text{ΒΓ}}\right)\right|=\frac{7}{2}$.

Είναι $\overrightarrow{\text{ΒΜ}}=(4\alpha-3,3\alpha-4)$ και $\det\left(\overrightarrow{\text{ΒΓ}},\overrightarrow{\text{ΒΜ}}\right)=\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 4\alpha-3 & 3\alpha-4\end{vmatrix}=-12\alpha+16+12\alpha-9=7$, άρα

$(\text{ΒΓΜ})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\text{ΒΓ}},\overrightarrow{\text{ΒΜ}}\right)\right|=\frac{7}{2}$, οπότε $(\text{ΑΒΓ})=(\text{ΒΓΜ})$.



Τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΜΒΓ είναι ίσα για οποιαδήποτε θέση του Μ, αφού τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση ΒΓ και το ύψος τους υ είναι ίσο με την απόσταση των δυο παράλληλων ευθειών του σχήματος.

15380.Δίνονται τα σημεία Α(1,3), Β(−2,2) και η ευθεία ε: $3x+y+\alpha=0$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε. (Μονάδες 8)
β) Για α = 4
i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 8)
ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $(\text{ΑΒ})=d(\text{Α},\varepsilon)\Leftrightarrow\sqrt{(-2-1)^2+(2-3)^2}=\frac{|3\cdot1+1\cdot3+\alpha|}{\sqrt{3^2+1^2}}\Leftrightarrow\sqrt{10}=\frac{|\alpha+6|}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow|\alpha+6|=10\Leftrightarrow$

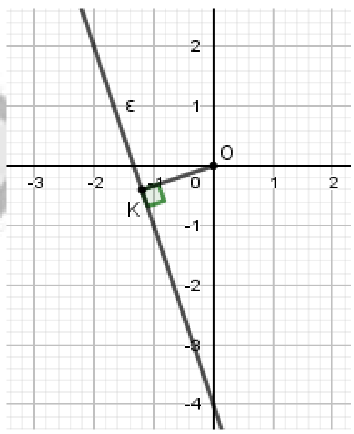
$\alpha+6=\pm10\Leftrightarrow(\alpha+6=10\Leftrightarrow\alpha=4)$ ή $(\alpha+6=-10\Leftrightarrow\alpha=-16)$.

β) i. Για α = 4 είναι ε: $3x+y+4=0$.

Για x = 0 είναι $y+4=0\Leftrightarrow y=-4$ άρα $\Gamma(0,-4)$.

Είναι $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}=(-2-1,2-3)=(-3,-1)$ και $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=(0-1,-4-3)=(-1,-7)$.

Είναι $\det\left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}},\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right)=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -7\end{vmatrix}=21-1=20$ και $(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}},\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot20=10$ τ.μ.



γ) Έστω Κ η προβολή της αρχής Ο των αξόνων στην ευθεία ε. Το ζητούμενο σημείο είναι το Κ το οποίο είναι το σημείο τομής της ε με την ευθεία ΟΚ.

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-\frac{3}{1}=-3$ και

$\text{ΟΚ}\perp\varepsilon\Leftrightarrow\lambda_{\text{ΟΚ}}\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow-3\lambda_{\text{ΟΚ}}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\text{ΟΚ}}=\frac{1}{3}$, άρα η ΟΚ έχει εξίσωση

$y=\frac{1}{3}x$.Είναι $\begin{cases}y=\frac{1}{3}x\\ 3x+y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{3}x\\ 3x+\frac{1}{3}x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}y=\frac{1}{3}x\\ \frac{10}{3}x=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{2}{5}\\ x=-\frac{6}{5}\end{cases}$, άρα $K\left(-\frac{6}{5},-\frac{2}{5}\right)$.

15433.Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(3,1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση δ: $x+y-1=0$.

α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ:

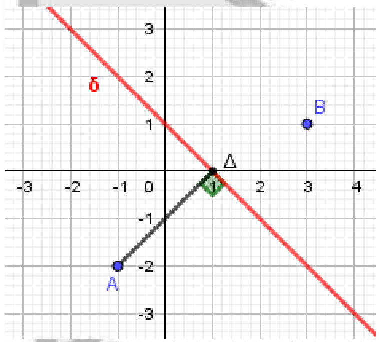
i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο. (Μονάδες 8)

ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι ίσο με 8. (Μονάδες 10)

Λύση

α) i. Γνωρίζουμε το κάθετο τμήμα από σημείο προς ευθεία έχει μικρότερο μήκος από οποιοδήποτε πλάγιο τμήμα, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο Δ που είναι η προβολή του Α στη δ.



Είναι $\lambda_\delta=-\frac{1}{1}=-1$, οπότε $\lambda_{A\Delta}\lambda_\delta=-1\Leftrightarrow\lambda_{A\Delta}=1$.

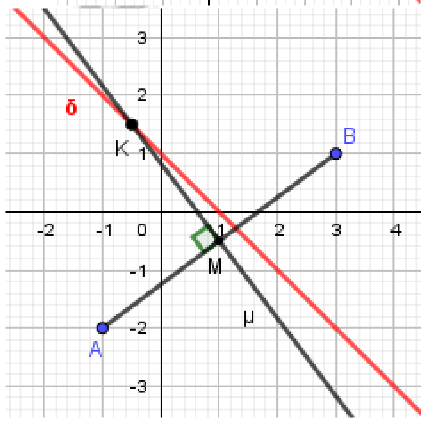
Η ΑΔ έχει εξίσωση: $y+2=1(x+1)\Leftrightarrow y=x-1$

Οι συντεταγμένες του Δ είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases}x+y-1=0\\ y=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+x-1-1=0\\ y=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=2\\ y=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1-1=0\end{cases},\text{ άρα}$$

$\Delta(1,0)$.

ii. Για να βρούμε τη θέση του κέντρου υγείας ψάχνουμε το σημείο της ευθεία δ που ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή το σημείο Κ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία δ και στη μεσοκάθετο μ του ΑΒ.



Το μέσο Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=1$ και $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=-\frac{1}{2}$, δηλαδή $M\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{1+2}{3+1}=\frac{3}{4}$ και

$\mu\perp AB\Leftrightarrow\lambda_{AB}\lambda_\mu=-1\Leftrightarrow\frac{3}{4}\lambda_\mu=-1\Leftrightarrow\lambda_\mu=-\frac{4}{3}$

Η μεσοκάθετη μ έχει εξίσωση:

$$y+\frac{1}{2}=-\frac{4}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}.$$

Οι συντεταγμένες του κέντρου υγείας Κ είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases}x+y-1=0\\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}-1=0\\ x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-8x+5-6=0\\ x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x=1\\ x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Άρα $K\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

β) Έστω ότι το Γ έχει συντεταγμένες (x,y), τότε επειδή είναι σημείο της ευθείας δ, ισχύει ότι $x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$.

Είναι $\overrightarrow{AB}=(4,3)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(x+1,y+2)=(x+1,1-x+2)=(x+1,3-x)$.

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}4&3\\x+1&3-x\end{vmatrix}=12-4x-3x-3=9-7x$$

$$(AB\Gamma)=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=8\Leftrightarrow|9-7x|=16\Leftrightarrow 9-7x=\pm16\Leftrightarrow$$

$$(9-7x=16\Leftrightarrow 9-16=7x\Leftrightarrow -7=7x\Leftrightarrow x=-1)\text{ ή }\left(9-7x=-16\Leftrightarrow 25=7x\Leftrightarrow x=\frac{25}{7}\right).$$

Αν $x=-1$ τότε $\Gamma(-1,2)$ και αν $x=\frac{25}{7}$, τότε $\Gamma\left(\frac{25}{7},-\frac{18}{7}\right)$.

15681.Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B\left(\frac{\alpha}{2},\beta\right)$ και $M\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$ που α, β, σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

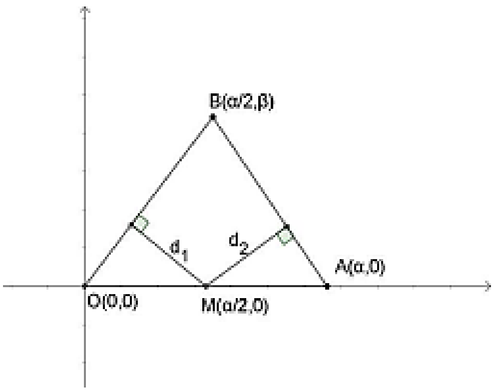
α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές και το σημείο Μ είναι το μέσο της βάσης του ΟΑ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών ΟΒ και ΑΒ είναι ΟΒ : $2\beta x-\alpha y=0$ και ΑΒ: $2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΟΒ και d_2 η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΑΒ, να αποδείξετε ότι $d_1=d_2$. (Μονάδες 8)

δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί; (Μονάδες 3)

Λύση



α) Είναι $(OB)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}$ και

$(BA)=\sqrt{\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}$, άρα (ΟΒ)=(ΒΑ)

οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΟΑ.

β) Η ευθεία ΟΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{OB}=\frac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-0}=\frac{2\beta}{\alpha}$

και εξίσωση $y=\frac{2\beta}{\alpha}x\Leftrightarrow 2\beta x-\alpha y=0$.

Η ευθεία ΟΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\frac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-\alpha}=-\frac{2\beta}{\alpha}$ και εξίσωση

$y=-\frac{2\beta}{\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$.

γ) Είναι $d_1=d(M,OB)=\frac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2}-\alpha\cdot 0\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+(-\alpha)^2}}=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$ και

$d_2=d(M,AB)=\frac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2}-\alpha\cdot 0-2\alpha\beta\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$, άρα $d_1=d_2$.

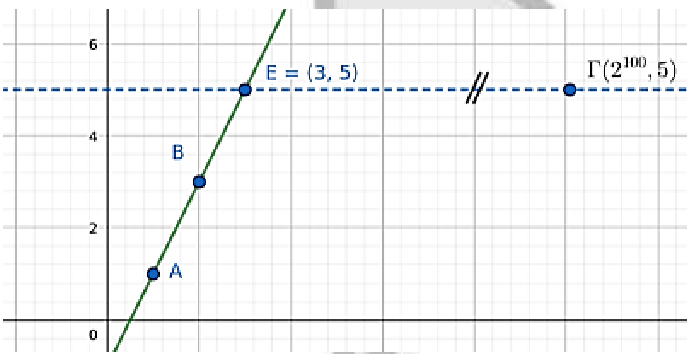
δ) Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αποδείχθηκε είναι η εξής: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το μέσο της βάσης ισαπέχει από τις ίσες πλευρές.

15987.Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3) .
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η (ε): y=2x−1. (Μονάδες 8)
β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο Γ (2^{100} , 5) ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων Ο(0,0). (Μονάδες 8)
γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\frac{3-1}{2-1}=2$ και εξίσωση $y-1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$.

β) Το σημείο Ε(3,5) ανήκει στην (ε), διότι 2·3−1=5.
Το σημείο Γ βρίσκεται στην ίδια ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x την y=5 με το Ε και «δεξιά» από αυτήν, ενώ το σημείο Ο(0,0) βρίσκεται στο άλλο ημιεπίπεδο, «αριστερά» από αυτήν, όπως βλέπουμε και στο επόμενο σχήμα.



γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΒΓ έχουν την ίδια βάση ΑΒ, με φορέα την ευθεία (ε). Η απόσταση του Ο και του Γ αντίστοιχα από την (ε) είναι: $d(O,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 0-0-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ και

$d(\Gamma,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2^{100}-5-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2^{101}-6}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{5}}$. Επειδή d (O ,ε)<d(Γ, ε), το ύψος του τριγώνου ΟΑΒ με βάση την ΑΒ είναι μικρότερο από το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ με βάση την ΑΒ, οπότε (ΟΒΓ)<(ΑΒΓ).

16057.Δίνονται τα σημεία Α(2,0), Β(3,4) και $\lambda\in\mathbb{R}$.
α) i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α και έχουν κλίση λ. (Μονάδες 5)
ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο Α, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β, έχει εξίσωση (ε): $15x-8y-30=0$. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Α και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β . (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ). (Μονάδες 7)

Λύση

α) i. Οι ευθείες που έχουν κλίση λ και διέρχονται από το σημείο Α ορίζονται από την εξίσωση:
$(\varepsilon_\lambda): y-0=\lambda(x-2)\Leftrightarrow \lambda x-y-2\lambda=0$

ii. $d(B,\varepsilon_\lambda)=1\Leftrightarrow\frac{|\lambda\cdot 3-4-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=1\Leftrightarrow\frac{|\lambda-4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\Leftrightarrow|\lambda-4|=\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow(\lambda-4)^2=\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2\Leftrightarrow$

$\lambda^2-8\lambda+16=\lambda^2+1\Leftrightarrow-8\lambda=-15\Leftrightarrow\lambda=\frac{15}{8}$.

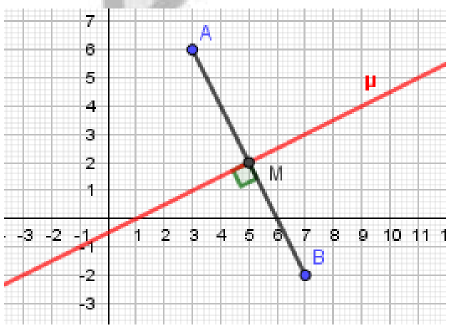
Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση (ε): $\frac{15}{8}x-y-2\cdot\frac{15}{8}=0\Leftrightarrow 15x-8y-30=0$.

β) Από το σημείο Α διέρχεται επίσης η κατακόρυφη ευθεία (ζ), για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, με εξίσωση $x = 2$. Έτσι, έχουμε: $d(B,\zeta) = \dfrac{|1\cdot 3 - 2|}{\sqrt{1}} = 1$.

γ) Οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται, διότι έχουν κοινό σημείο το Α, αλλά δεν ταυτίζονται αφού $\lambda_\varepsilon = \dfrac{15}{8}$ και (ζ)//y΄y. Το σημείο Β απέχει ίση απόσταση από τις ευθείες (ε) και (ζ) , επομένως ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας των δύο ευθειών. Επιπλέον ισχύει ότι $\lambda_{AB} = \dfrac{4-0}{3-2} = 4$.

17694.Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες Α(3,6) και Β(7,-2).
α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή. (Μονάδες 12)
β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη. (Μονάδες 13)

Λύση



α) Εφόσον τα σημεία της ευθείας ε πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή ισαπέχουν από τα Α, Β, αυτή θα είναι η μεσοκάθετος μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Αν Μ το μέσο του ΑΒ τότε: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 5$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 2$, άρα Μ(5,2).

Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{-2-6}{7-3} = -2$ και

$AB \perp \mu \Leftrightarrow \lambda_{AB}\lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow -2\lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow \lambda_\mu = \dfrac{1}{2}$, άρα

μ: $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x-5) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Έστω ότι το Σ έχει συντεταγμένες (x,y), τότε επειδή βρίσκεται στην ευθεία μ, ισχύει ότι $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{x-1}{2}$, οπότε $\Sigma\left(x, \dfrac{x-1}{2}\right)$.

Είναι $\overrightarrow{AB} = (7-3, -2-6) = (4,-8)$, $\overrightarrow{A\Sigma} = \left(x-3, \dfrac{x-1}{2} - 6\right) = \left(x-3, \dfrac{x-13}{2}\right)$ και

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Sigma}\right) = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ x-3 & \dfrac{x-13}{2} \end{vmatrix} = 2(x-13) + 8(x-3) = 2x - 26 + 8x - 24 = 10x - 50.$$

$(\Sigma AB) = 20 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Sigma}\right)\right| = 20 \Leftrightarrow |10x - 50| = 40 \Leftrightarrow 10x - 50 = \pm 40 \Leftrightarrow$

$(10x - 50 = 40 \Leftrightarrow 10x = 90 \Leftrightarrow x = 9)$ ή $(10x - 50 = -40 \Leftrightarrow 10x = 10 \Leftrightarrow x = 1)$.

Αν x = 1 τότε Σ(1,0) και αν x = 9 τότε Σ(9,4).

17695.Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία Α και Β. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία. (Μονάδες 8)
β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται; (Μονάδες 7)
γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή t=2. (Μονάδες 5)
δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε: $4x+3y+7=0$ ισούται με 6. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Είναι $\begin{cases} x_A = t-1 \\ y_A = 2t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x_A + 1 \\ y_A = 2(x_A+1)-1 \Leftrightarrow y_A = 2x_A + 1 \end{cases}$.

Είναι $t \geq 0 \Leftrightarrow x_A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x_A \geq -1$ και $y_A = 2x_A + 1 \geq -2+1 = -1$

Επειδή οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση $y = 2x+1$ με $x \geq -1$ και $y \geq -1$ το Α κινείται στη ημιευθεία που έχει αρχή το σημείο $A'(-1,-1)$ και εξίσωση $y = 2x+1$.

Είναι $\begin{cases} x_B = 3t-1 \\ y_B = -4t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x_B+1}{3} \\ y_B = -4\dfrac{x_B+1}{3} - 1 = -\dfrac{4x_B+7}{3} \end{cases}$.

Είναι $t \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_B+1}{3} \geq 0 \Leftrightarrow x_B \geq -1$ και $y_B = -\dfrac{4x_B+7}{3} \geq -\dfrac{4(-1)+7}{3} = -1$

Επειδή οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν την εξίσωση $y = -\dfrac{4x+7}{3}$ με $x \geq -1$ και $y \geq -1$ το Β κινείται στη ημιευθεία που έχει αρχή το σημείο $A'(-1,-1)$ και εξίσωση $y = -\dfrac{4x+7}{3}$.

β)Για να υπάρχει χρονική στιγμή $t \geq 0$, κατά την οποία τα σημεία Α και Β ταυτίζονται πρέπει $\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 = 3t-1 \\ 2t-1 = -4t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ 6t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$, άρα τη χρονική στιγμή t = 0 τα Α, Β ταυτίζονται.

γ) Για t=2 είναι Α(1, 3) και Β(5, -9) οπότε: $(AB) = \sqrt{(5-1)^2 + (-9-3)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

δ) $d(A,\varepsilon) = 6 \Leftrightarrow \dfrac{|4(t-1)+3(2t-1)+7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{|4t-4+6t-3+7|}{5} = 6 \Leftrightarrow |10t| = 30 \Leftrightarrow 10t = 30 \Leftrightarrow t = 3$

15152.Δίνονται τα σημεία Α(1,3), Β(−2,2) και η ευθεία ε: 3x + y + α = 0 με $\alpha \in \mathbb{R}$.
α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β. (Μονάδες 5)
β) Για ποιες τιμές του α, η απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε. (Μονάδες 8)
γ) Για α = 4 να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 12)

Λύση

α) $(AB)=\sqrt{(-2-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$

β) $d(A,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1+1\cdot 3+\alpha|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|\alpha+6|}{\sqrt{10}}$

Είναι $d(A,\varepsilon)=(AB)\Leftrightarrow \dfrac{|\alpha+6|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\Leftrightarrow |\alpha+6|=10\Leftrightarrow (\alpha+6=10\Leftrightarrow \alpha=4)$ ή $(\alpha+6=-10\Leftrightarrow \alpha=-16)$

γ) Για α = 4 είναι $\varepsilon: 3x+y+4=0$

Για x = 0 η ε γίνεται $y+4=0\Leftrightarrow y=-4$, άρα $\Gamma(0,-4)$.

Είναι $\overrightarrow{AB}=(-2-1,2-3)=(-3,-1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(0-1,-4-3)=(-1,-7)$, $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -7\end{vmatrix}=21-1=20$

οπότε $(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 20=10$ τ.μ.

Κύκλος

2ο Θέμα

15028.Έστω κύκλος C με κέντρο K(1,2) και ακτίνα ρ=2 και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y-1=0$.
α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C. **(Μονάδες 8)**
β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K(1,2) από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2. **(Μονάδες 9)**
γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Είναι $C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$

β) Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot1+4\cdot2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

γ) Αφού $d(K,\varepsilon)=2=\rho$ τότε η (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

15680.Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$ με κέντρο K(1, 2) και η ευθεία ε: $3x+4y+1=0$.
α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho=2$. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\dfrac{12}{5}$. **(Μονάδες 10)**
γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία. **(Μονάδες 5)**

Λύση

α) Είναι $x^2+y^2-2x-4y+1=0 \Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=2^2$, οπότε ο κύκλος C έχει ακτίνα ρ = 2.

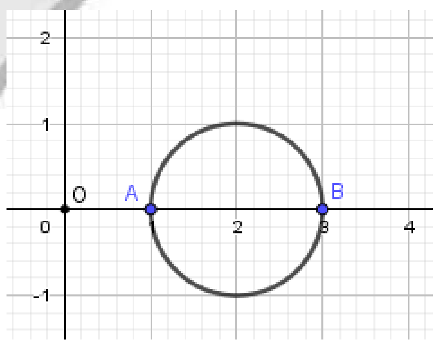
β) Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot1+4\cdot2+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{12}{5}$.

γ) Επειδή η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου, η ε είναι εξωτερική του κύκλου, οπότε δεν έχουν κοινά σημεία.

15994.Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4x+3=0$ (1).
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
(Μονάδες 13)
β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιανδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Είναι $x^2+y^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x^2-4x+4)+y^2=4-3 \Leftrightarrow$
$(x-2)^2+y^2=1$, άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K(2,0) και ακτίνα ρ = 1.



β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι ο κύκλος τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία A(1,0) και B(3,0).

16773.α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το O(0,0) και διέρχεται από το σημείο A(1,2). **(Μονάδες 08)**

β) Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=5$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενής του στο σημείο A. **(Μονάδες 09)**

ii. Να βρεθεί το σημείο B, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο. **(Μονάδες 08)**

Λύση

α) Αν ρ η ακτίνα του κύκλου, τότε $\rho=(OA)=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2+y^2=5$.

β) i. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $x\cdot 1+y\cdot 2=5\Leftrightarrow x+2y=5$.

ii. Επειδή το κέντρο O είναι το μέσο του τμήματος AB, ισχύει ότι

$$x_O=\frac{x_A+x_B}{2}\Leftrightarrow 0=\frac{1+x_B}{2}\Leftrightarrow 1+x_B=0\Leftrightarrow x_B=-1 \text{ και}$$

$$y_O=\frac{y_A+y_B}{2}\Leftrightarrow 0=\frac{2+y_B}{2}\Leftrightarrow 2+y_B=0\Leftrightarrow y_B=-2 \text{, άρα } B(-1,-2).$$

16808.Τα σημεία A(-8, 1), B(4, 5) και Γ(-4, 9) είναι σημεία ενός κύκλου C.

α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου. **(Μονάδες 15)**

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι το μέσο K του τμήματος AB απέχει από το σημείο Γ απόσταση ίση με $\frac{AB}{2}$.

Είναι $x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=-2,\ y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=3$, άρα K(-2,3).

Είναι $(AB)=\sqrt{(4+8)^2+(5-1)^2}=\sqrt{144+16}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$ και

$$(K\Gamma)=\sqrt{(-2+4)^2+(3-9)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}=\frac{AB}{2}.$$

β) Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο K(-2,3) και η ακτίνα του $\rho=2\sqrt{10}$, άρα η εξίσωση του κύκλου είναι C: $(x+2)^2+(y-3)^2=40$

17317.Δίνεται ο κύκλος C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ και η ευθεία ε: $3x-4y=8$.

α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του. **(Μονάδες 5)**

β) Αν K(1,2), να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{13}{5}$. **(Μονάδες 13)**

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Ο κύκλος έχει κέντρο K(1,2) και ακτίνα ρ = 2.

β) $d(K,\varepsilon)=\frac{|3\cdot 1-4\cdot 2-8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{13}{5}$

γ) Επειδή $d(K,\varepsilon)=\frac{13}{5}>\rho=2$ η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.

18238.Δίνονται τα σημεία Α(1,3) και Β(- 3,5) .
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ του τμήματος ΑΒ. **(Μονάδες 7)**
β) Να αποδείξετε ότι $(KA)=\sqrt{5}$. **(Μονάδες 8)**
γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Είναι $x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=-1$, $y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=4$, άρα $K(-1,4)$.

β) $(KA)=\sqrt{(1+1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$

γ) Ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ έχει κέντρο Κ και ακτίνα $\rho=(KA)=\sqrt{5}$ άρα έχει εξίσωση
$(x+1)^2+(y-4)^2=5$

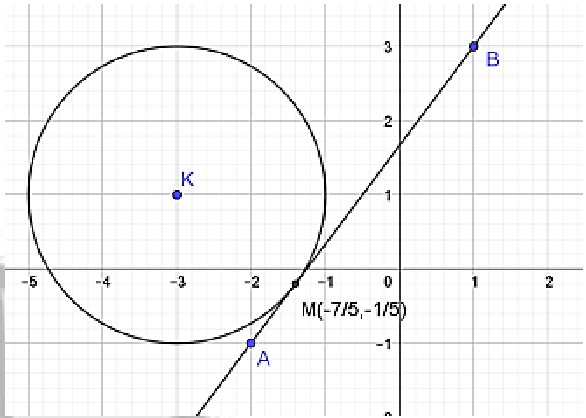
18239.Δίνεται το σημείο Κ(- 3,1) και η ευθεία (ε) : $4x-3y+5=0$.
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Κ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2. **(Μονάδες 6)**
β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο Κ και εφάπτεται στην ευθεία (ε) . **(Μονάδες 9)**
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε) . **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $d(K,\varepsilon)=\frac{|4\cdot(-3)-3\cdot1+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{10}{5}=2$

β) Ο ζητούμενος κύκλος έχει ακτίνα $\rho=d(K,\varepsilon)=2$
και εξίσωση $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

γ) Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία $A(-2,-1)$
και Β(1,3) , αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση της. Ο κύκλος C και η ευθεία (ε) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

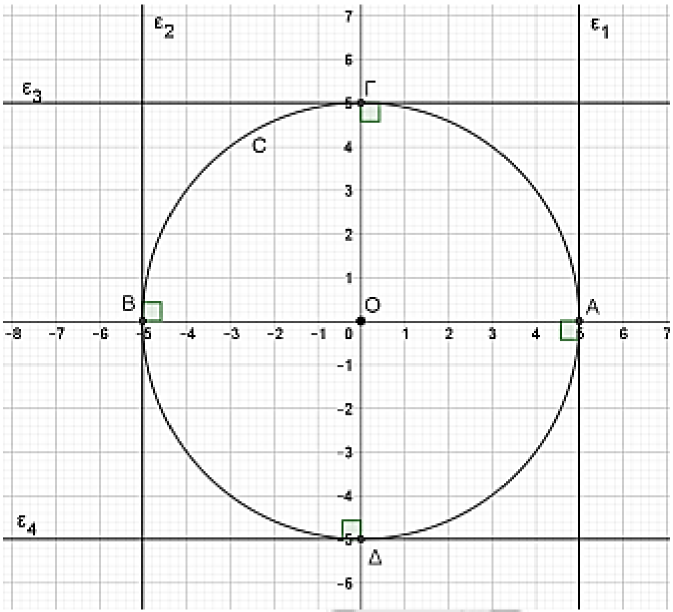


18241.Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2+y^2=25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων
α) τον κύκλο C . **(Μονάδες 9)**
β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον y΄y και να γράψετε τις εξισώσεις τους. **(Μονάδες 8)**
γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx ΄ και να γράψετε τις εξισώσεις τους. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Ο κύκλος C , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχει κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα $\rho=5$.
Τα σημεία τομής με τον άξονα x΄x είναι τα σημεία Α(5,0) και Β(- 5,0) ενώ τα σημεία τομής με τον άξονα y΄y είναι τα σημεία Γ(0,5) και Δ (0,- 5).

β) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Γ(0,5) και Δ (0,- 5).
Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον y΄y οπότε παράλληλες στον x΄x και διέρχονται από τα σημεία Γ(0,5) και Δ (0,- 5) , άρα έχουν εξισώσεις $y = 5$ και $y = -5$ αντίστοιχα.
Είναι οι ευθείες $ε_3$, $ε_4$, που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

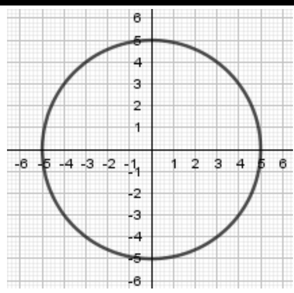


γ) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α(5,0) και Β(- 5,0).
Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον x΄x οπότε παράλληλες στον y΄y και διέρχονται από τα σημεία Α(5,0) και Β(- 5,0) , άρα έχουν εξισώσεις $x = 5$ και $x =-5$ αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες $ε_1$,$ε_2$ που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

18700.Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.
α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 10)
β) Δίνεται το σημείο Α(3, −4).
i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α ανήκει στον κύκλο C. (Μονάδες 05)
ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο Α. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $C: x^2 + y^2 = 25$.



β) i.Το σημείο Α ανήκει στον κύκλο όταν $3^2 + (-4)^2 = 25 \Leftrightarrow 9 + 16 = 25$ ισχύει

ii. $x \cdot 3 + y(-4) = 25 \Leftrightarrow 3x - 4y = 25$

19039.Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4 \quad (1)$.
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(−1,1) και ακτίνα R = 2. (Μονάδες 9)
β) i. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του κύκλου (Κ,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με −1. (Μονάδες 8)
ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 8)

Λύση

α) $(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4 \Leftrightarrow x^2+3x-x-3+y^2-3y+y-3=-4 \Leftrightarrow x^2+2x+y^2-2y=2 \Leftrightarrow$
$x^2+2x+1+y^2-2y+1=4 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=2^2$ (2).
Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(−1,1) και ακτίνα R = 2.

β) i. Η εξίσωση (2) γίνεται για $x = -1$:
$(-1+1)^2+(y-1)^2=2^2 \Leftrightarrow (y-1)^2=2^2 \Leftrightarrow y-1=\pm 2 \Leftrightarrow y=3$ ή $y=-1$
Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι: Α(−1, −1) και Β(−1,3).

ii. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται στην ευθεία $x = -1$, η οποία διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Επομένως, τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

4ο Θέμα

14954.Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0$ και $(\varepsilon_2): (\mu+1)x + (\mu-1)y - \mu + 1 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξτε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45^o για κάθε τιμή της παραμέτρου μ. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Κάθε μία από τις εξισώσεις (ε_1) και (ε_2) είναι στη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$, εξίσωση που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία όταν $|A| + |B| > 0$, δηλαδή όταν οι αριθμοί Α και Β δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν. Παρατηρούμε ότι στην (ε_1) είναι $B = -1 \neq 0$ ενώ στην (ε_2) είναι $A = \mu + 1$, $B = \mu - 1$ και $A = 0$ για $\mu = -1$, $B = 0$ για $\mu = 1$. Έτσι, δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου μ η οποία να μηδενίζει ταυτόχρονα τους συντελεστές Α και Β.

β) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Άρα το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (1, \mu)$ είναι παράλληλο στην (ε_1) και το $\vec{\delta}_2 = (1-\mu, 1+\mu)$ παράλληλο στην (ε_2). Οπότε η οξεία γωνία θ των (ε_1) και (ε_2)θα είναι ίση ή παραπληρωματική της οξείας γωνίας φ των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$.

Είναι $$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|} = \frac{1\cdot(1-\mu) + \mu(1+\mu)}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{(1-\mu)^2 + (1+\mu)^2}} = \frac{1-\mu+\mu+\mu^2}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{1-2\mu+\mu^2+1+2\mu+\mu^2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{2+2\mu^2}} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{2(1+\mu^2)}} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{2}\sqrt{1^2+\mu^2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \frac{1+\mu^2}{\left(\sqrt{1^2+\mu^2}\right)^2\sqrt{2}} = \frac{\cancel{1+\mu^2}}{\cancel{(1+\mu^2)}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα } \hat{\theta} = (\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = 45^\circ$$

γ) Για να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε_1) και (ε_2). Ένας τρόπος είναι με την μέθοδο της αντικατάστασης. Από την (ε_1) παίρνουμε $y = \mu x - \mu$ οπότε αντικαθιστώντας στην (ε_2) παίρνουμε

$(\mu + 1)x + (\mu - 1)(\mu x - \mu) - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow (\mu + 1)x + \mu(\mu - 1)x - \mu(\mu - 1) - \mu + 1 = 0$, άρα

$(\mu + 1 + \mu 2 - \mu)x - \mu 2 + \mu - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\mu^2-1}{\mu^2+1}$. Τότε $y = \mu\dfrac{\mu^2-1}{\mu^2+1} - \mu = \dfrac{-2\mu}{\mu^2+1}$.

Έτσι τα σημεία τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι τα $\Sigma\left(\dfrac{\mu^2-1}{\mu^2+1}, \dfrac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Σ επαληθεύουν την εξίσωση αυτή.

Είναι $$\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)^2 = \frac{\mu^4-2\mu^2+1}{(\mu^2+1)^2} + \frac{4\mu^2}{(\mu^2+1)^2} = \frac{\mu^4-2\mu^2+1+4\mu^2}{(\mu^2+1)^2} = \frac{\mu^4+2\mu^2+1}{(\mu^2+1)^2} = \frac{(\mu^2+1)^2}{(\mu^2+1)^2} = 1$$

14984.Θεωρούμε τα σημεία $A(-2,-3)$ και $B(7,9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε (AMB) = 12 τ.μ.
α) Να αποδείξτε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x-3y-9=0$ και $(\varepsilon_2): 4x-3y+7=0$. **(Μονάδες 9)**
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2). **(Μονάδες 9)**
γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα AXBY υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2), που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2; Εξηγήστε.
(Μονάδες 7)

Λύση

α) Έστω M(x,y). Είναι $\overrightarrow{AM}=(x+2,y+3)$, $\overrightarrow{AB}=(7+2,9+3)=(9,12)$ και

$$\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix} x+2 & y+3 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}=12x+24-9y-27=12x-9y-3.$$

$$(AMB)=12 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)\right|=12 \Leftrightarrow |12x-9y-3|=24 \Leftrightarrow 12x-9y-3=\pm 24 \Leftrightarrow$$

$(12x-9y-3=24 \Leftrightarrow 12x-9y-27=0 \Leftrightarrow 4x-3y-9=0)$ ή

$(12x-9y-3=-24 \Leftrightarrow 12x-9y+21=0 \Leftrightarrow 4x-3y+7=0)$ οι οποίες είναι εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2). Οι ευθείες είναι παράλληλες αφού έχουν κοινό συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=\lambda_2=\frac{4}{3}$.

β) Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB}=\frac{9+3}{7+2}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$, δηλαδή η AB είναι παράλληλη στις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$. Για να είναι η AB μεσοπαράλληλη των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ αρκεί ένα οποιοδήποτε σημείο της να ισαπέχει από τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

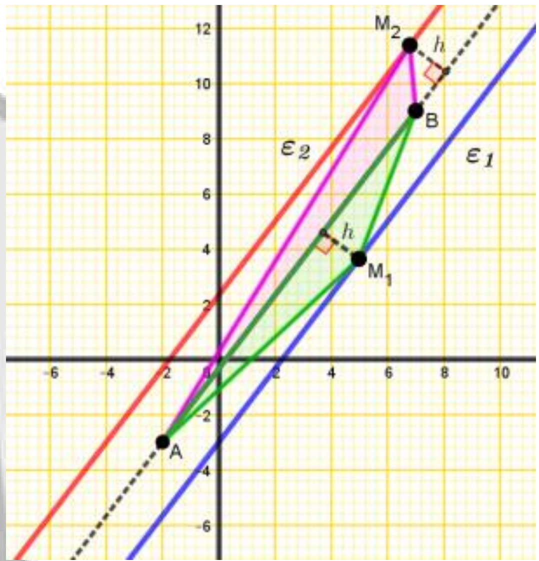
Είναι $d(A,\varepsilon_1)=\frac{|4\cdot(-2)-3\cdot(-3)-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{8}{5}$ και $d(A,\varepsilon_2)=\frac{|4\cdot(-2)-3\cdot(-3)+7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{8}{5}$, οπότε επειδή $d(A,\varepsilon_1)=d(A,\varepsilon_2)$ η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

γ) Με βάση το διπλανό σχήμα, διαπιστώνουμε ότι οποιοδήποτε σημείο M_1 της (ε_1) σχηματίζει με το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα AB, τρίγωνο σταθερού εμβαδού, αφού το ύψος h του τριγώνου AMB που αντιστοιχεί στην AB είναι σταθερό και ίσο με το μισό της απόστασης των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$, οπότε

$$(AM_1B)=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot\frac{8}{5}=12 \text{ γιατί}$$

$$(AB)=\sqrt{(7+2)^2+(9+3)^2}=\sqrt{225}=15.$$

Ανάλογα, $(AM_2B)=12$, έτσι $(AM_1BM_2)=24$.
Ώστε (AXBY) = 24 για οποιαδήποτε σημεία X,Y των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, αρκεί να σχηματίζεται τετράπλευρο (να μην είναι για παράδειγμα τα σημεία M_1 ,B,M_2 συνευθειακά).
Άρα υπάρχουν άπειρα τετράπλευρα AXBY με σταθερό εμβαδόν 24.



15030.Δίνεται ο κύκλος $C:(x-2)^2+(y+3)^2=5$ και η ευθεία ε: $2x+y+5=0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C . **(Μονάδες 6)**
β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία. **(Μονάδες 6)**
γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες ($η_1$),($η_2$) που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους. **(Μονάδες 7)**
δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών ($η_1$),($η_2$). **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Κέντρο Κ(2, -3) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β) $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|2\cdot 2-3+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}>\sqrt{5}=\rho$,άρα η ευθεία ε και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.

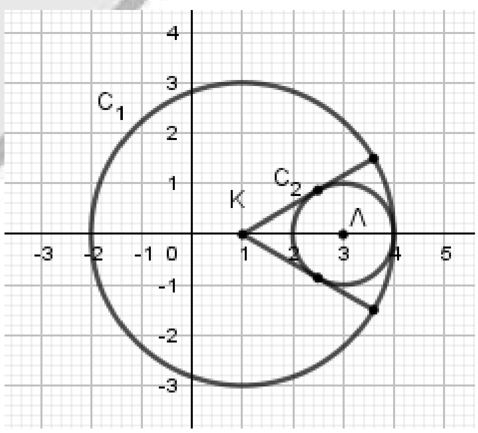
γ) Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ε), δηλαδή $\lambda_\eta=-2$, οπότε η (η) έχει εξίσωση της μορφής $y=-2x+\beta \Leftrightarrow 2x+y-\beta=0$.
Για να εφάπτεται η ευθεία (η) στον κύκλο πρέπει και αρκεί να απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου δηλαδή
$d(K,\eta)=\rho \Leftrightarrow \dfrac{|2\cdot 2+1(-3)-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |1-\beta|=5 \Leftrightarrow 1-\beta=\pm 5 \Leftrightarrow \beta=-4$ ή $\beta=6$.
Άρα έχουμε δύο εφαπτομένες, τις $(\eta_1):2x+y+4=0$ και $(\eta_2):2x+y-6=0$.

Η μεσοπαράλληλη των (η_1), (η_2) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με αυτές, δηλαδή $\lambda_\eta=-2$ και διέρχεται από το Κ, άρα έχει εξίσωση: $y+3=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+1$.

15080.Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2+y^2-2x-8=0$ (1) και $C_2: x^2+y^2-6x+8=0$ (2).
α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα Κ(1,0), Λ(3,0) και ακτίνες $\rho_1=3$, $\rho_2=1$ αντίστοιχα. **(Μονάδες 6)**
β) i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ). **(Μονάδες 5)**
ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 . **(Μονάδες 5)**
γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 .
(Μονάδες 9)

Λύση

α) Είναι $C_1: x^2+y^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x^2-2x+1)+y^2=8+1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=3^2$ άρα η (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα $\rho_1=3$.
Είναι $C_2: x^2+y^2-6x+8=0 \Leftrightarrow (x^2-6x+9)+y^2=9-8 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=1$ άρα η (2) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο Λ(3,0) και ακτίνα $\rho_2=1$.



β) i. $(K\Lambda)=|3-1|=2$

ii. Είναι $(K\Lambda)=2$ και $\rho_1-\rho_2=2$, άρα $(K\Lambda)=\rho_1-\rho_2$ οπότε ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1.

γ) Κάθε ακτίνα του κύκλου C_1 , ΚΑ και ΚΒ σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, που δεν είναι κάθετη στον x΄x άξονα, είναι πάνω σε ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο Κ(1,0) και έχει κλίση $\lambda\in\mathbb{R}$.

Άρα κα έχει εξίσωση: (ε): $y-0=\lambda(x-1)\Leftrightarrow -\lambda x+y+\lambda=0$.

Η (ε) εφάπτεται στον κύκλο C_2, αν και μόνο αν:

$$d(\Lambda,\varepsilon)=\rho_2 \Leftrightarrow \frac{|0-3\lambda+\lambda|}{\sqrt{1^2+\lambda^2}}=1\Leftrightarrow|2\lambda|=\sqrt{1+\lambda^2}\Leftrightarrow 4\lambda^2=1+\lambda^2\Leftrightarrow 3\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Οι ζητούμενες ακτίνες έχουν εξισώσεις: $-\frac{\sqrt{3}}{3}x+y+\frac{\sqrt{3}}{3}=0\Leftrightarrow -x\sqrt{3}+3y+\sqrt{3}=0$ και

$\frac{\sqrt{3}}{3}x+y-\frac{\sqrt{3}}{3}=0\Leftrightarrow x\sqrt{3}+3y-\sqrt{3}=0$.

15081. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+y^2+2\sqrt{2}x+1=0$ και $C_2: x^2+y^2-6\sqrt{2}x+9=0$.

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K(-\sqrt{2},0),\Lambda(3\sqrt{2},0)$ και ακτίνες $\rho_1=1,\ \rho_2=3$ αντίστοιχα. **(Μονάδες 8)**

β) i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2. **(Μονάδες 10)**

ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) $C_1: x^2+y^2+2\sqrt{2}x+1=0\Leftrightarrow\left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2=1$, άρα ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(-\sqrt{2},0)$ και ακτίνα $\rho_1=1$.

$C_2: x^2+y^2-6\sqrt{2}x+9=0\Leftrightarrow\left(x-3\sqrt{2}\right)^2+y^2=9$, άρα ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\Lambda(3\sqrt{2},0)$ και ακτίνα $\rho_2=3$.

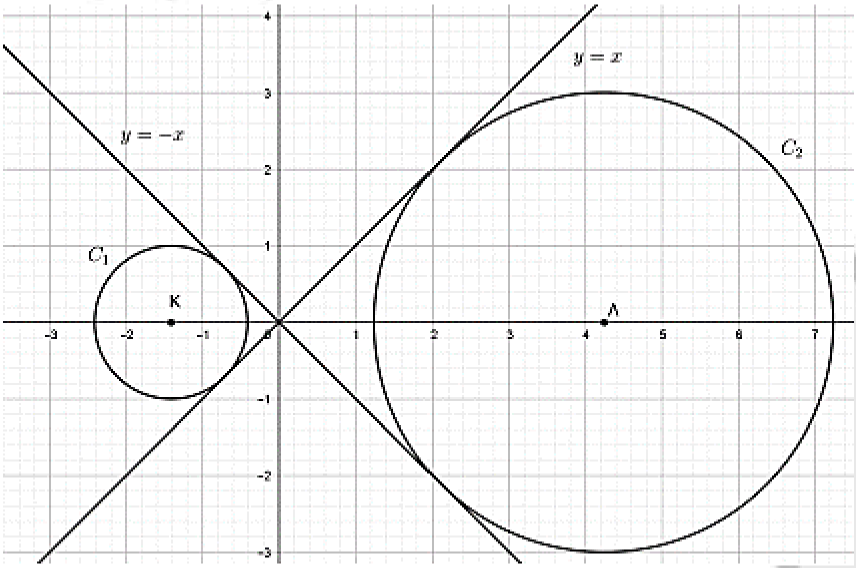
β) i. Μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) και δεν είναι κάθετη στον x΄x άξονα έχει εξίσωση: (η): $y=\lambda x\Leftrightarrow -\lambda x+y=0$.

Η ευθεία (η) εφάπτεται και στους δύο κύκλους αν και μόνο αν οι αποστάσεις των κέντρων Κ και Λ από την ευθεία αυτή είναι ίσες με τις αντίστοιχες ακτίνες των κύκλων. Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{cases} d(K,\eta)=1 \\ d(\Lambda,\eta)=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{\left|0+\sqrt{2}\lambda\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=1 \\ \dfrac{\left|0-3\sqrt{2}\lambda\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{2}|\lambda|=\sqrt{1+\lambda^2} \\ 3\sqrt{2}|\lambda|=3\sqrt{1+\lambda^2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2\lambda^2=1+\lambda^2 \\ 18\lambda^2=9+9\lambda^2 \end{cases}\Leftrightarrow\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1$$

Άρα, από την αρχή των αξόνων διέρχονται δυο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων, με εξισώσεις:
$(\eta_1): y=x$ και $(\eta_2): y=-x$.

ii. Η αρχή των αξόνων (0, 0) είναι εσωτερικό σημείο της διακέντρου ΚΛ, διότι η ΚΛ είναι πάνω στον άξονα x΄x και έχει άκρα τα σημεία $K(-\sqrt{2},0)$ και $\Lambda(3\sqrt{2},0)$. Επομένως οι εφαπτόμενες που βρήκαμε στο βi) ερώτημα είναι εσωτερικές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



15082.Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις: $C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=8$ και $C_2:(x-7)^2+(y+2)^2=18$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου Κ, Λ, τα κέντρα των κύκλων C_1,C_2, αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 5)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ . (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο Κ(2,3) και ακτίνα $\rho_1=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(7,-2)$ και ακτίνα $\rho_2=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Είναι $(\text{ΚΛ})=\sqrt{(7-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Αφού η διάκεντρος των δύο κύκλων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β) i. Η ευθεία ΚΛ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\text{ΚΛ}}=\dfrac{-2-3}{7-2}=-1$ και εξίσωση

$y-3=-(x-2)\Leftrightarrow y=-x+5$.

ii. Είναι $\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=8\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(-x+5-3)^2=8\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2+(-x+2)^2=8\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}(x-2)^2+(x-2)^2=8\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-2)^2=8\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2=4\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=\pm2\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}$ ή $\begin{cases}x=0\\ y=5\end{cases}$.

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 είναι τα $A(4,1)$ και $A'(0,5)$.

Για το σημείο επαφής των δύο κύκλων έχουμε το σύστημα:

$\begin{cases}(x-7)^2+(y+2)^2=18\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-7)^2+(-x+5+2)^2=18\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-7)^2+(-x+7)^2=18\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}2(x-7)^2=18\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-7)^2=9\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-7=\pm3\\ y=-x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10\\ y=-5\end{cases}$ ή $\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}$.

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_2 είναι τα $A(4,1)$ και $A''(10,5)$.

Η κοινή λύση των δύο συστημάτων είναι το ζητούμενο σημείο επαφής των δύο κύκλων. Άρα το κοινό σημείο της ευθείας και με τους δύο κύκλους είναι το Α(4,1) , οπότε είναι το σημείο επαφής.

γ) Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη (η) των δύο κύκλων είναι κάθετη στην ευθεία ΚΛ και διέρχεται από το σημείο επαφής Α(4,1). Στο ερώτημα β)i έχουμε βρει ότι $\lambda_{K\Lambda} = -1$, οπότε $\lambda_{K\Lambda}\lambda_{\eta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\eta} = 1$ και η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δυο κύκλων έχει εξίσωση: $y-1 = x-4 \Leftrightarrow y = x-3$.

15177.Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση

$$c_1 : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{NA}^2 - \overrightarrow{NB}^2 = 4$, ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y=-x-2$. **(Μονάδες 7)**

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2+2y^2+10x+14y+21=0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R=2\sqrt{2}$.

(Μονάδες 6)

γ) i. Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους. **(Μονάδες 6)**

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2.

(Μονάδες 6)

Λύση

α) $\overrightarrow{NA}^2 - \overrightarrow{NB}^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$x^2-2x+1+y^2-x^2-y^2-2y-1=4 \Leftrightarrow -2x-2y=4 \Leftrightarrow -2x-4=2y \Leftrightarrow y=-x-2$

άρα τα σημεία Ν ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y=-x-2$.

β) $2x^2+2y^2+10x+14y+21=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+5x+7y+\frac{21}{2}=0$

Είναι $A^2+B^2-4\Gamma = 25+49-42=32$, οπότε η εξίσωση παριστάνει κύκλο c_2 με κέντρο

$\Lambda\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ ή $\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{32}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

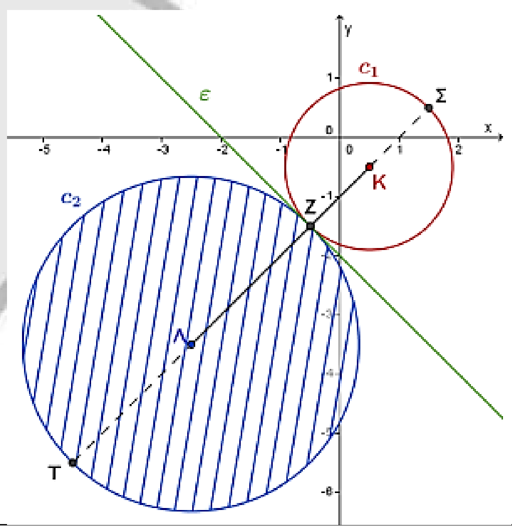
γ) i. Είναι $(K\Lambda)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$ και

$R+\rho=3\sqrt{2}$, άρα $(K\Lambda)=R+\rho$, οπότε οι κύκλοι

c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά.

Η ελάχιστη απόσταση των σημείων των δύο κύκλων είναι μηδέν και η μέγιστη απόσταση είναι ίση με

$\Sigma T = \Sigma Z + ZT = 2\rho + 2R = 6\sqrt{2}$.



ii. Είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\rho$ και

$d(\Lambda,\varepsilon)=\dfrac{\left|-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=R$.

Άρα η ευθεία (ε) είναι η ζητούμενη κοινή εσωτερική εφαπτομένη.

15189.Δίνονται τα σημεία A(−2,0) και B(2, −2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB. **(Μονάδες 6)**

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση C: $x^2+(y+1)^2=5$. **(Μονάδες 6)**

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB)=5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x+2y-3=0$ και $\varepsilon_2: x+2y+7=0$. **(Μονάδες 7)**

δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Είναι $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=0,\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=-1$, άρα $K(0,-1)$.

$(AB)=\sqrt{(2+2)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

β) C: $(x-0)^2+(y+1)^2=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=5$

γ) Είναι $\overrightarrow{AM}=(x+2,y)$, $\overrightarrow{AB}=(2+2,-2-0)=(4,-2)$ και

$\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix}x+2 & y\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-2x-4-4y=-2(x+2y+2)$.

Είναι $(AMB)=5\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})\right|=5\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cdot 2|x+2y+2|=5\Leftrightarrow|x+2y+2|=5\Leftrightarrow$

$(x+2y+2=5\Leftrightarrow x+2y-3=0)$ ή $(x+2y+2=-5\Leftrightarrow x+2y+7=0)$

δ) Είναι $d(K,\varepsilon_1)=\dfrac{|1\cdot 0+2\cdot(-1)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}=\rho$ και

$d(K,\varepsilon_2)=\dfrac{|1\cdot 0+2\cdot(-1)+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}=\rho$, άρα οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ εφάπτονται του κύκλου C.

15272. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y=-1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. **(Μονάδες 6)**

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M(3, 2) βρίσκεται έξω από τον κύκλο. **(Μονάδες 7)**

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $x^2+y^2-2x+4y=-1\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=1+4-1\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=4$.

Η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο K(1, - 2) και ακτίνα ρ = 2.

β) Είναι $(KM)=\sqrt{(3-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}>2=\rho$, οπότε το σημείο M βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ) Αν η ζητούμενη εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε η εξίσωσή της θα είναι της μορφής ε: $y-2=\lambda(x-3)\Leftrightarrow \lambda x-y-3\lambda+2=0$

Η ε εφάπτεται στον κύκλο, αν και μόνο αν $d(K,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 1-(-2)-3\lambda+2|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=2\Leftrightarrow |4-2\lambda|=2\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow$

$\cancel{2}|2-\lambda|=\cancel{2}\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow(2-\lambda)^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow 4-4\lambda+\cancel{\lambda^2}=\cancel{\lambda^2}+1\Leftrightarrow 3=4\lambda\Leftrightarrow\lambda=\frac{3}{4}$.

Άρα ε: $\frac{3}{4}x-y-3\cdot\frac{3}{4}+2=0\Leftrightarrow 3x-4y-1=0$.

Όμως από το Μ διέρχονται δύο εφαπτομένες προς τον κύκλο. Από το Μ διέρχεται ακόμη η κατακόρυφη ευθεία x = 3 της οποίας η απόσταση από το κέντρο Κ του κύκλου είναι: $d=\frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0}}=2=\rho$, άρα η άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το Μ είναι η x = 3.

15432.Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\kappa x-2\kappa y+4=0$ (1) με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου. (Μονάδες 3)
γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων. (Μονάδες 7)
δ) Για κ = 1 να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο Γ(2,2). (Μονάδες 8)

Λύση

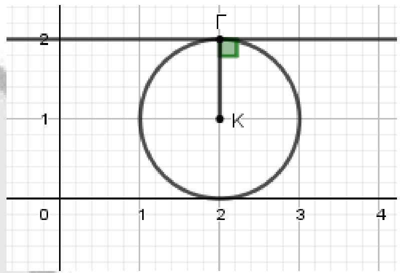
α) $x^2+y^2-4\kappa x-2\kappa y+4=0\Leftrightarrow x^2-4\kappa x+4\kappa^2+y^2-2\kappa y+\kappa^2=4\kappa^2+\kappa^2-4\Leftrightarrow$
$(x-2\kappa)^2+(y-\kappa)^2=5\kappa^2-4$.

Η εξίσωση παριστάνει κύκλο όταν $5\kappa^2-4>0\Leftrightarrow\kappa^2>\frac{4}{5}\Leftrightarrow|\kappa|>\frac{2}{\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{5}\Leftrightarrow\kappa<-\frac{2\sqrt5}{5}$ ή $\kappa>\frac{2\sqrt5}{5}$

β) Για $\kappa<-\frac{2\sqrt5}{5}$ ή $\kappa>\frac{2\sqrt5}{5}$ ο κύκλος έχει κέντρο Κ(2κ, κ) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5\kappa^2-4}$.

γ) Είναι $x_K=2\kappa$ και $y_K=\kappa$, άρα $x_K=2x_K=2y_K\Leftrightarrow y_K=\frac{1}{2}x_K$

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου Κ επαληθεύουν την εξίσωση $y=\frac{1}{2}x$,οπότε το Κ ανήκει στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.



δ) Για κ = 1 είναι C: $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΓ που έχει εξίσωση x = 2, οπότε η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα y΄y και επειδή η τεταγμένη του Γ είναι 2, είναι η ευθεία y = 2.

15628.Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+(4-2k)x-2(1+k)y+5-2k=0$ (Ι), όπου $k\in(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η (Ι) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k-2,k+1)$ και ακτίνα $k\sqrt2$ για κάθε k > 0. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε k > 0. (Μονάδες 7)
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y=-x-1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε k > 0. (Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=(4-2k)^2+(-2(1+k))^2-4(5-2k)\Leftrightarrow$

$A^2+B^2-4\Gamma=16-16k+4k^2+4(1+2k+k^2)-20+8k=-\cancel{4}-\cancel{8k}+4k^2+\cancel{4}+\cancel{8k}+4k^2=8k^2$

Επειδή $A^2+B^2-4\Gamma>0$ η (Ι) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}k}{2}=\sqrt{2}k$ και κέντρο $M\left(-\dfrac{4-2k}{2},-\dfrac{-2(1+k)}{2}\right)\equiv\left(-\dfrac{-2(k-2)}{2},1+k\right)\equiv(k-2,k+1)$.

β) Είναι $x_M=k-2\Leftrightarrow x_M+2=k$ και $y_M=k+1=x_M+2+1\Leftrightarrow y_M=x_M+3$. Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου Κ επαληθεύουν την εξίσωση $y=x+3$,οπότε το Μ ανήκει στην ευθεία $y=x+3$.

γ) Η ευθεία ε: $y=-x-1\Leftrightarrow x+y+1=0$ είναι εφαπτομένη του κύκλου, αν και μόνο αν $d(M,\varepsilon)=\rho=\sqrt{2}k$.

Είναι $d(M,\varepsilon)=\dfrac{|k-2+k+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2k}{\sqrt{2}}=\dfrac{2k\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\cancel{2}k\sqrt{2}}{\cancel{2}}=k\sqrt{2}=\rho$, οπότε η ε εφάπτεται του κύκλου για κάθε k > 0.

15646.Δίνονται οι κύκλοι $C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=9$ και $C_2:(x-4)^2+(y-4)^2=9$.

α) Να δείξετε ότι τα κέντρα Κ, Λ, των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας xOy του συστήματος συντεταγμένων. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής Β, Γ, των κύκλων C_1 και C_2. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y=x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα ΒΓ, να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο Κ(1,1) και ακτίνα $\rho_1=3$, ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο Λ(4,4) και ακτίνα $\rho_2=3$. Επειδή οι συντεταγμένες και των δύο σημείων Κ, Λ επαληθεύουν την εξίσωση y = x, τα κέντρα Κ, Λ, των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας xOy του συστήματος συντεταγμένων.

β) $C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=9\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=9\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y=7$ (1)

$C_2:(x-4)^2+(y-4)^2=9\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-8y+16=9\Leftrightarrow x^2+y^2-8x-8y=-23$ (2)

Αφαιρώντας από την (1) την (2) κατά μέλη προκύπτει:

$-2x-2y+8x+8y=7+23\Leftrightarrow 6x+6y=30\Leftrightarrow y=5-x$ (3) και από την (1) έχουμε:

$x^2+(5-x)^2-2x-2(5-x)=7\Leftrightarrow x^2+25-10x+x^2-2x-10+2x-7=0\Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0\Leftrightarrow$

$x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$

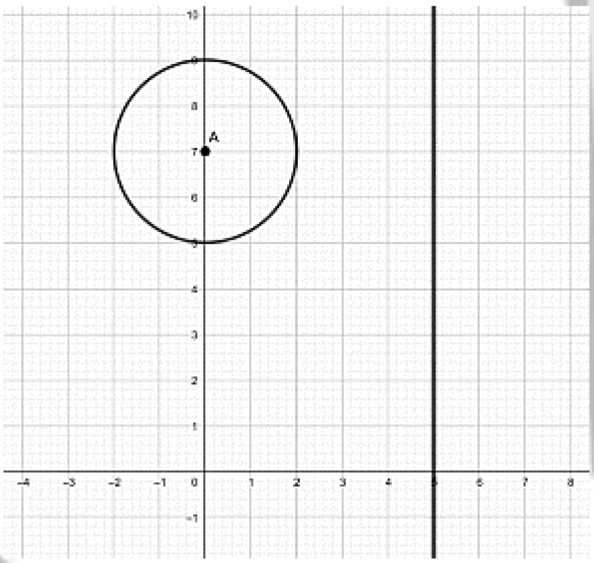
Αν $x=1$ τότε $y=5-1=4$ και αν $x=4$ τότε $y=5-4=1$, οπότε κοινά σημεία των δύο κύκλων είναι τα Β(1,4) και Γ(4,1).

γ) Έστω Α(x,x) σημείο της y = x. Είναι $\overrightarrow{AB}=(1-x,4-x)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(4-x,1-x)$.

Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}1-x & 4-x\\ 4-x & 1-x\end{vmatrix}=(1-x)^2-(4-x)^2=1-2x+x^2-16+8x-x^2=6x-15$

$(AB\Gamma)=\frac{21}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{21}{2}\Leftrightarrow|6x-15|=21\Leftrightarrow(6x-15=21\Leftrightarrow 6x=36\Leftrightarrow x=6)$ ή $(6x-15=-21\Leftrightarrow 6x=-6\Leftrightarrow x=-1)$. Άρα $A(6,6)$ ή $(-1,-1)$.

15791.Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου Α και την ευθεία (ε) : x = 5.



α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 . **(Μονάδες 3)**

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1,y_1)$.

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1,y_1)$ και ακτίνα 2 . **(Μονάδες 6)**

ii. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου ΑΒ σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου Β. **(Μονάδες 6)**

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β)i. με ακτίνα 2 , που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε). **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Ο κύκλος C_1 κέντρου Α(0,7) και ακτίνα ρ = 2, άρα έχει εξίσωση $x^2+(y-7)^2=4$.

β) i. $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=4$

ii. Είναι $(AB)=\sqrt{x_1^2+(7-y_1)^2}$.

γ) Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους. Οπότε έχουμε: $(AB)=2+2\Leftrightarrow\sqrt{x_1^2+(7-y_1)^2}=4\Leftrightarrow x_1^2+(7-y_1)^2=16\ (1)$

Ένας κύκλος εφάπτεται σε ευθεία αν και μόνο αν το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του. Οπότε έχουμε: $d(B,\varepsilon)=\frac{|0+x_1-5|}{\sqrt{0^2+1^2}}=2\Leftrightarrow|x_1-5|=2\ (2)$.

Για να βρούμε τους κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2): $\begin{cases}x_1^2+(7-y_1)^2=16\\ |x_1-5|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2+(7-y_1)^2=16\\ x_1-5=\pm2\end{cases}$. Άρα

$$\begin{cases} x_1^2+(7-y_1)^2=16 \\ x_1-5=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49+(7-y_1)^2=16 \\ x_1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-y_1)^2=-33 \\ x_1=7 \end{cases} \text{ Αδύνατο ή}$$

$$\begin{cases} x_1^2+(7-y_1)^2=16 \\ x_1-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+(7-y_1)^2=16 \\ x_1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-y_1)^2=7 \\ x_1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-y_1=\pm\sqrt{7} \\ x_1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\pm\sqrt{7}=y_1 \\ x_1=7 \end{cases}$$

Τελικά οι δύο κύκλοι που εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και την ευθεία (ε) έχουν κέντρα τα σημεία $\left(3,7-\sqrt{7}\right),\left(3,7+\sqrt{7}\right)$ και ακτίνα 2.

15826.Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2(\lambda+1)x-2\lambda y+2\lambda+1=0\ (1)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου Κ και την ακτίνα ρ. (Μονάδες 7)

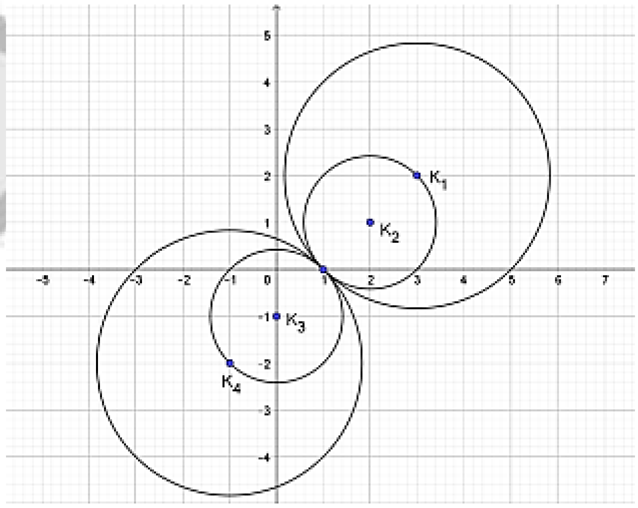
β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda=0$; (Μονάδες 3)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1,K_2,K_3,K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ. Αξιοποιώντας το σχήμα,

i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 5)

iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: $x+y-1=0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1). (Μονάδες 5)



Λύση

α) Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=4(\lambda+1)^2+4\lambda^2-4(2\lambda+1)=4\lambda^2+8\lambda+4+4\lambda^2-8\lambda-4=8\lambda^2$

Η (1) παριστάνει κύκλο όταν $A^2+B^2-4\Gamma>0\Leftrightarrow 8\lambda^2>0\Leftrightarrow\lambda\neq 0$.

Το κέντρο είναι το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)\equiv(\lambda+1,\lambda)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{8\lambda^2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}|\lambda|}{2}=\sqrt{2}|\lambda|$.

β) Για $\lambda=0$ η (1) γίνεται $x^2+y^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=0\Leftrightarrow x=1$ και $y=0$, που σημαίνει ότι παριστάνει το σημείο M(1,0).

γ) i. Η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα K_2,K_3 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{1+1}{2-0}=1$ και εξίσωση ζ: $y+1=x-0\Leftrightarrow y=x-1$.

Θα αποδείξουμε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία ζ . Πράγματι το τυχαίο κέντρο Κ (λ+1,λ) ανήκει στην ευθεία ζ , αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση y = x –1.

ii. Οι κύκλοι του σχήματος διέρχονται από το σημείο Μ(1,0) . Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από το Μ(1,0) . Πράγματι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ αφού $1^2+0^2-2(\lambda+1)-2\lambda\cdot 0+2\lambda+1=0\Leftrightarrow 0=0$ που ισχύει.

iii. Θα πρέπει το κέντρο Κ(λ+1,λ) να απέχει από την ευθεία ε απόσταση ίση με την ακτίνα ρ.

Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|\lambda+1+\lambda-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2|\lambda|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|\lambda|=\rho$.

15993.Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+1$ (1), όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. (Μονάδες 10)

γ) Αν Α(1,0) και Β(3,0) είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων. (Μονάδες 07)

δ) Αν ένα σημείο Μ(α, β) επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=0$. (Μονάδες 05)

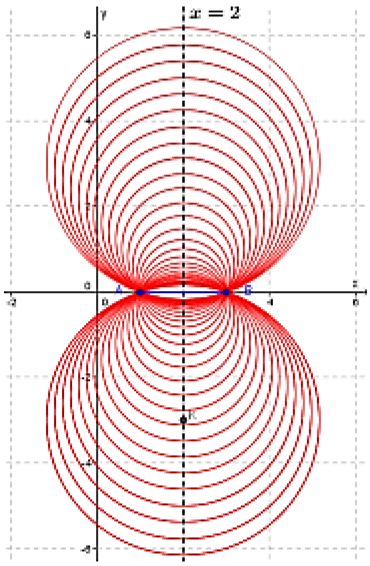
Λύση

α) Επειδή $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, η (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ(2,λ) και ακτίνα $\rho=\sqrt{\lambda^2+1}$.

β) Επιλέγουμε δύο από τους κύκλους (1), δίνοντας τις παρακάτω τιμές:

Για λ = 0 είναι $(x-2)^2+y^2=1\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2-4x=-3$ (2)

Για λ = 1 είναι $(x-2)^2+(y-1)^2=2\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1=2\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y=-3$ (3)



Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο ισότητες προκύπτει y = 0 και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, είναι

$x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$

Επομένως οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τα Α(1,0) και Β(3,0). Με μια απλή αντικατάσταση στην (1), αποδεικνύεται ότι τα σημεία αυτά την επαληθεύουν για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και ως εκ τούτου, αποτελούν τα κοινά σημεία όλων των κύκλων.

γ) Η κοινή χορδή των κύκλων (1) είναι το ευθύγραμμο τμήμα , το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα . Επομένως έχει εξίσωση y = 0. Τα κέντρα όλων των κύκλων είναι της μορφής Κ(2,λ), $\lambda\in\mathbb{R}$, άρα η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα όλων των κύκλων, είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση x = 2.

Επομένως είναι κάθετη στην κοινή χορδή.

16191.Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(5,5).

α) Αν για το σημείο Μ(x, ψ) ισχύει $\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=32$,να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2+\psi^2-6\psi-6x+10=0\ (1)$.

(Μονάδες 08)

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 03)

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(3,3) και η ακτίνα του $\rho=2\sqrt{2}$.

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): λx + ψ = 2 εφάπτεται του κύκλου (1).

(Μονάδες 07)

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την ΑΒ γωνία 45° ; (Μονάδες 07)

Λύση

α) i. Είναι $\overrightarrow{AM}^2=(x-1,\psi-1)$, $\overrightarrow{BM}=(x-5,\psi-5)$ και

$$\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=32\Leftrightarrow\left(\sqrt{(x-1)^2+(\psi-1)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-5)^2+(\psi-5)^2}\right)^2=32\Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1+\psi^2-2\psi+1+x^2-10x+25+\psi^2-10\psi+25=32\Leftrightarrow 2x^2+2\psi^2-12x-12\psi+20=0\Leftrightarrow$$

$$x^2+\psi^2-6x-6\psi+10=0$$

ii. Είναι $x^2+\psi^2-6x-6\psi+10=0\Leftrightarrow x^2-6x+9+\psi^2-6\psi+9=9+9-10\Leftrightarrow(x-3)^2+(\psi-3)^2=8$

άρα η (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ(3,3) και ακτίνα $\rho=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

β) i. Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία , πρέπει η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία να ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

$$d(K,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\frac{|3\lambda+3-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow|3\lambda+1|=2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow(3\lambda+1)^2=8(\lambda^2+1)\Leftrightarrow$$

$$9\lambda^2+6\lambda+1=8\lambda^2+8\Leftrightarrow\lambda^2+6\lambda-7=0\Leftrightarrow\lambda=1 \text{ ή } \lambda=-7$$

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{5-1}{5-1}=1$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ΑΒ είναι το $\vec{\delta}_1=(1,1)$ ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta}_2=(1,-\lambda)$. Η γωνία των δύο ευθειών είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων που είναι παράλληλα σε αυτές.

$$\text{συν}\left(\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2\right)=\text{συν}45^\circ\Leftrightarrow\frac{1\cdot1+1(-\lambda)}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{1-\lambda}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$2(1-\lambda)=2\sqrt{1+\lambda^2}\Leftrightarrow1-\lambda=\sqrt{1+\lambda^2}\overset{1-\lambda\geq0\Leftrightarrow\lambda\leq1}{\Leftrightarrow}(1-\lambda)^2=1+\lambda^2\Leftrightarrow1-2\lambda+\lambda^2=1+\lambda^2\Leftrightarrow-2\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=0$$

18237.Θεωρούμε τα σημεία Α(-1, 2), Β(3, 2), Γ(1, 4).

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 7)

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία ε: $y=x+1$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{2-2}{3+1}=0$ και $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{4-2}{1-3}=-1$.

Επειδή $\lambda_{AB}\neq\lambda_{B\Gamma}$ οι ευθείες ΑΒ και ΒΓ δεν είναι παράλληλες, οπότε τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά και σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Έστω Μ το μέσο του ΒΓ. Είναι $x_M = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = 2,\ y_M = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} = 3$, άρα Μ(2,3)

Αν ε η μεσοκάθετος του ΒΓ, τότε $\varepsilon \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1$ και η ε έχει εξίσωση:

$y - 3 = 1(x-2) \Leftrightarrow y = x+1$.

γ) Έστω Κ(x, y) το σημείο της μεσοκάθετης που ισαπέχει από τα σημεία Α, Β. Τότε $y = x+1$ και

$(KA) = (KB) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow$

$(x+1)^2 + \cancel{(y-2)^2} = (x-3)^2 + \cancel{(y-2)^2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1$ και $y = 1+1 = 2$,

άρα Κ(1,2).

δ) Το σημείο Κ από τον τρόπο προσδιορισμού του ισαπέχει από τις κορυφές Α, Β, Γ του τριγώνου, άρα είναι το περίκεντρό του. Σε ότι αφορά στην ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου κύκλου ισχύει

$\rho = (KA) = \sqrt{(1+1)^2 + (2-2)^2} = 2$ και ο κύκλος έχει εξίσωση: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

18247.Δίνονται τα σημεία Ο(0,0), Α(α,0) και Β(0,β) όπου α, β > 0.

α) Να βρείτε συναρτήσει των α, β

i. τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ. **(Μονάδες 5)**

ii. την απόσταση (ΟΜ) . **(Μονάδες 5)**

β) Αν $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$**, τότε:**

i. να αποδείξετε ότι $(OM) = \frac{(AB)}{2}$. **(Μονάδες 5)**

ii. να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί. **(Μονάδες 3)**

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΑΒ. **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) i. Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\alpha}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\beta}{2}$, άρα $M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$.

ii. Είναι $(OM) = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$

β) i. Είναι $(AB) = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (0 - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, άρα $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} = \frac{(AB)}{2}$.

ii. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί είναι η εξής:
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

γ) Επειδή $(OM) = \frac{(AB)}{2} = (AM) = (MB)$ το Μ ισαπέχει από τα Ο, Α, Β οπότε είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΑΒ. Η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$$

18415.Δίνεται η εξίσωση $(x-3\lambda)^2+(y+2\lambda)^2=1$ (1), όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και η ευθεία ε: $2x+3y=0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3\lambda,-2\lambda)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Είναι $x_K=3\lambda\Leftrightarrow\lambda=\frac{x_K}{3}$ και $y_K=-2\lambda=-2\frac{x_K}{3}\Leftrightarrow 3y_K+2x_K=0$.

Οι συντεταγμένες του K επαληθεύουν την εξίσωση $3y+2x=0$, οπότε τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην ευθεία ε.

β) Αν $M(x,y)$ σημείο της ε_1 ή της ε_2, τότε:

$d(M,\varepsilon)=1\Leftrightarrow\frac{|2x+3y|}{\sqrt{2^2+3^2}}=1\Leftrightarrow|2x+3y|=\sqrt{13}\Leftrightarrow 2x+3y=\pm\sqrt{13}$, οπότε οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχουν εξισώσεις $2x+3y=\sqrt{13}$, $2x+3y=-\sqrt{13}$.

γ) Αφού τα κέντρα K όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ανήκουν στην ε, δηλαδή στη μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, έχουμε ότι $d(K,\varepsilon_1)=d(K,\varepsilon_2)=1=\rho$, επομένως όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.

δ) Ένα τετράγωνο του οποίου οι δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ θα έχει μήκος πλευράς ίσο με την απόσταση των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, δηλαδή 2. Συνεπώς το εμβαδόν του κα είναι ίσο με 4.

18416.Δίνεται η εξίσωση $x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K (3,2) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$. (Μονάδες 6)

β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y=\lambda x+4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι $x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-2y=2x+2y-8\Leftrightarrow$

$x^2-6x+y^2-4y=-8\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-4y+8=-8+9+4\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-2)^2=5$

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο K (3,2) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β) i. Αρχικά θα δείξουμε ότι τα A, B είναι σημεία του κύκλου.

Το A βρίσκεται στον κύκλο όταν $(4-3)^2+(4-2)^2=5\Leftrightarrow 1+4=5$ ισχύει

Το Β βρίσκεται στον κύκλο όταν $(2-3)^2+(0-2)^2=5 \Leftrightarrow 1+4=5$ ισχύει.
Στη συνέχεια, για να είναι διάμετρος η ΑΒ, πρέπει το Κ να είναι μέσο του ΑΒ.
Είναι $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{4+2}{2}=3=x_K$ και $\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{4+0}{2}=2=y_K$. Άρα τα Α, Β είναι αντιδιαμετρικά.

ii. Οι ευθείες που είναι παράλληλες στην ΑΒ έχουν εξίσωση της μορφής

$$\varepsilon: y=\lambda_{AB}x+\beta \Leftrightarrow y=\frac{0-4}{2-4}x+\beta \Leftrightarrow 2x-y+\beta=0$$

Η ε εφάπτεται του κύκλου όταν

$$d(K,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 3-1\cdot 2+\beta|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|4+\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |4+\beta|=5 \Leftrightarrow \beta+4=\pm 5 \Leftrightarrow$$

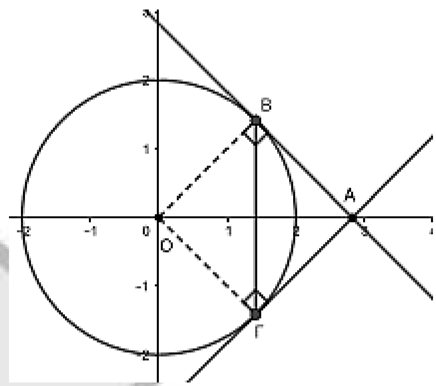
$(\beta+4=5 \Leftrightarrow \beta=1)$ ή $(\beta+4=-5 \Leftrightarrow \beta=-9)$.
Άρα οι ζητούμενες ευθείες έχουν εξίσωση $y=2x+1$ ή $y=2x-9$

γ) Παρατηρούμε ότι $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}=2\rho$, άρα η ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου, οπότε διέρχεται από το κέντρο Κ και ισχύει: $2=\lambda\cdot 3+4 \Leftrightarrow -2=3\lambda \Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{2}{3}$.

18567.Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=4$ και το σημείο $A\left(2\sqrt{2},0\right)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου C. (Μονάδες 05)
ii. Να βρείτε τις εξισώνεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Α και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 12)
β) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο Α, να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 08)

Λύση



α) i. Ο κύκλος C έχει κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 2.
Είναι $(OA)=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+0^2}=2\sqrt{2}>2=\rho$, οπότε το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου.

ii. Οι ευθείες που διέρχονται από το Α και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ, έχουν εξίσωση:
$\varepsilon: y=\lambda\left(x-2\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \lambda x-y-2\lambda\sqrt{2}=0$.
Η ε εφάπτεται του κύκλου όταν

$$d(O,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{\left|\lambda\cdot 0-0-2\lambda\sqrt{2}\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \Leftrightarrow \cancel{2}\lambda\sqrt{2}=\cancel{2}\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

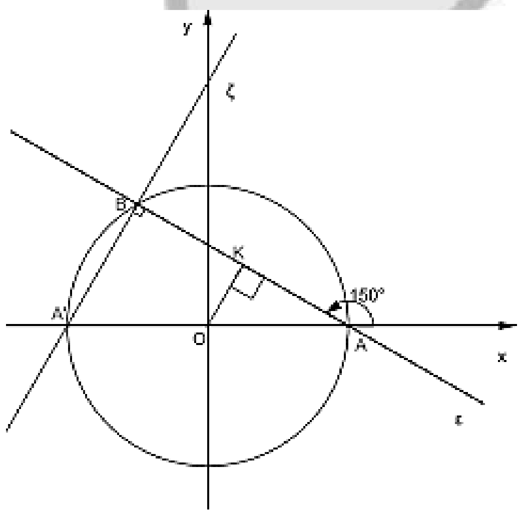
$2\lambda^2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$
Οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι ευθείες
$\varepsilon_1: x-y-2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow y=x-2\sqrt{2}$ και $\varepsilon_2: -x-y+2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow y=-x+2\sqrt{2}$.
Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν αντίστοιχα συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$. Είναι $\lambda_1\lambda_2=-1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

β) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με τον κύκλο C, τότε οι ακτίνες του κύκλου στα σημεία αυτά είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΟΓ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο. Επειδή ΟΑ = ΟΒ = 2 ως ακτίνες του κύκλου, άρα είναι ρόμβος. Επομένως το ΑΒΟΓ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή 2.
Συνεπώς $(AB O\Gamma)=2^2=4$.

18569.Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=1$.

α) Αν Α και Α΄ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Οx και Οx΄ αντίστοιχα, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Α΄ είναι Α(1,0) και Α΄(-1,0). (Μονάδες 05)
ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 150° . (Μονάδες 06)
β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο Β, να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΒ έχει μήκος $\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)
γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από τα σημεία Α΄ και Β. (Μονάδες 06)

Λύση



α) i. Τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Οx και Οx΄ έχουν τεταγμένη μηδέν. Επομένως, για y=0 έχουμε: $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$, άρα $A'(-1,0)$ και $A(1,0)$.

ii. Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi150^\circ=\varepsilon\varphi(180^\circ-30^\circ)=-\varepsilon\varphi30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε έχει

εξίσωση: $y-0=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

β) i. Αν ΟΚ το απόστημα της χορδής ΑΒ, τότε

$$(OK)=d(O,\varepsilon)=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot0+0-\frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ έχουμε:

$$(KA)^2=(OA)^2-(OK)^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow(KA)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Επειδή το Κ είναι μέσο της χορδής ΑΒ, ισχύει ότι $(AB)=2(KA)=\sqrt{3}$.

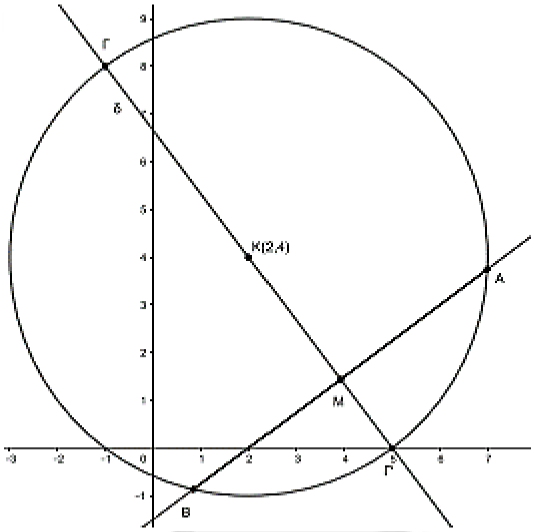
γ) Η γωνία Α΄ΒΑ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα $A'B\perp BA$ δηλαδή $\zeta\perp\varepsilon$,οπότε

$$\lambda_\varepsilon\lambda_\zeta=-1\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda_\zeta=-1\Leftrightarrow\lambda_\zeta=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}.$$

Η ευθεία ζ έχει εξίσωση $y-0=\sqrt{3}(x+1)\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$

18570.Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ και η ευθεία (ε): $3x-4y=\mu$, $\mu\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. (Μονάδες 05)
β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β
i. Να αποδείξετε ότι $-35<\mu<15$. (Μονάδες 07)
ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 04)
iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ. (Μονάδες 09)

Λύση



α) $x^2+y^2-4x-8y-5=0 \Leftrightarrow$

$x^2-4x+4+y^2-8y+16=4+16+5 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y-4)^2=25$

Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Κ(2,4) και η ακτίνα του είναι ρ=5.

β) i. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του από την ευθεία ε είναι μικρότερη της ακτίνας του. Δηλαδή $d(K,\varepsilon)<\rho \Leftrightarrow$

$$\frac{|3\cdot 2-4\cdot 4-\mu|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}<5 \Leftrightarrow \frac{|-10-\mu|}{5}<5 \Leftrightarrow |\mu+10|<25 \Leftrightarrow$$

$-25<\mu+10<25 \Leftrightarrow -35<\mu<15$

ii. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τότε οι συντεταγμένες του σημείου Κ θα επαληθεύουν την εξίσωση της. Δηλαδή $3\cdot 2-4\cdot 4=\mu \Leftrightarrow \mu=-10$ δεκτή.

iii. Το ζητούμενο σημείο Γ θα είναι η κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΓΑΒ με βάση τη χορδή ΑΒ. Άρα το Γ κα ανήκει στη μεσοκάθετο ευθεία (δ) της χορδής ΑΒ που είναι ο φορέας του αποστήματος της χορδής ΑΒ και είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε, με $\lambda_\varepsilon=\frac{3}{4}$.

Είναι $\delta\perp\varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\delta\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda_\delta=-\frac{4}{3}$ και η ευθεία δ έχει εξίσωση:

$$y-4=-\frac{4}{3}(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}=-\frac{4}{3}(x-5)$$

Τα σημεία τομής της ευθείας δ με τον κύκλο είναι τα ζητούμενα σημεία.

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-4)^2=25\\ y=-\frac{4}{3}(x-5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+\left(-\frac{4}{3}(x-5)-4\right)^2=25\ (1)\\ y=-\frac{4}{3}(x-5)\ (2)\end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow (x-2)^2+\left(\frac{-4x+20-12}{3}\right)^2=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+\left(\frac{-4x+8}{3}\right)^2=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+\left(\frac{4}{3}(x-2)\right)^2=25 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2+\frac{16}{9}(x-2)^2=25 \Leftrightarrow 9(x-2)^2+16(x-2)^2=225 \Leftrightarrow 25(x-2)^2=225 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2=9 \Leftrightarrow x-2=\pm 3 \Leftrightarrow (x-2=3 \Leftrightarrow x=5) \text{ ή } (x-2=-3 \Leftrightarrow x=-1)$$

Αν x = 5 τότε $(2)\Rightarrow y=-\frac{4}{3}(5-5)=0$ και αν x = - 1 τότε $y=-\frac{4}{3}(-1-5)=8$.

Άρα υπάρχουν δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ, τα Γ(5,0) και Γ΄(-1,8).

20091.Τα σημεία Α(-7, -1) και Β(3, -5) είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου Κ. Το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Μ. **(Μονάδες 04)**

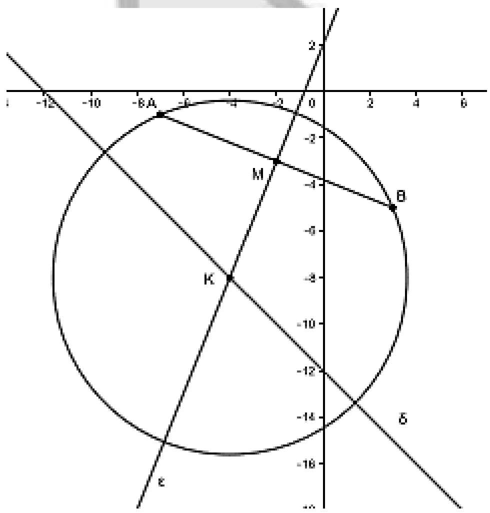
ii. Την εξίσωση της ευθείας ΚΜ. **(Μονάδες 08)**

β) Αν από το κέντρο Κ του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): $x+y=-12$, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Κ. **(Μονάδες 07)**

ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. **(Μονάδες 06)**

Λύση



α) i. $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-7+3}{2}=-2$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1-5}{2}=-3$,

άρα $M(-2,-3)$.

ii. Είναι $\lambda_{AB}=\frac{-5+1}{3+7}=-\frac{2}{5}$ και

$KM\perp AB\Leftrightarrow \lambda_{AB}\lambda_{KM}=-1\Leftrightarrow -\frac{2}{5}\lambda_{KM}=-1\Leftrightarrow \lambda_{KM}=\frac{5}{2}$.

Η ΚΜ έχει εξίσωση: $y+3=\frac{5}{2}(x+2)\Leftrightarrow y=\frac{5}{2}x+2$

β) i. Το κέντρο Κ του κύκλου ανήκει στην ευθεία δ και στην ευθεία ΚΜ. Άρα η τομή των δύο ευθειών, δηλαδή η λύση του συστήματος των δύο εξισώσεών τους, θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου Κ.

$$\begin{cases} y=\frac{5}{2}x+2 \\ x+y=-12 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{5}{2}x+2 \\ x+\frac{5}{2}x+2=-12 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{5}{2}x+2 \\ 2x+5x+4=-24 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{5}{2}x+2 \\ 7x=-28 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{5}{2}(-4)+2=-8 \\ x=-4 \end{cases}$$

άρα $K(-4,-8)$.

ii. Αρκεί να βρούμε την ακτίνα του κύκλου που είναι το μήκος του τμήματος ΚΑ.

$\rho=(KA)=\sqrt{(-4+7)^2+(-8+1)^2}=\sqrt{58}$.

Η εξίσωση του κύκλου είναι C: $(x+4)^2+(y+8)^2=58$

20229.Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2-(\lambda+8)x+\lambda y+7=0$ (1), με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. **(Μονάδες 6)**

β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. **(Μονάδες 7)**

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν. **(Μονάδες 7)**

δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για λ= 0. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα. **(Μονάδες 5)**

Λύση

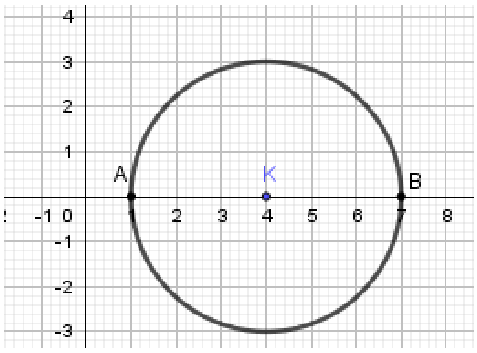
α) Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=(\lambda+8)^2+\lambda^2-4\cdot 7=\lambda^2+16\lambda+64+\lambda^2-28=2\lambda^2+16\lambda+36=2(\lambda^2+8\lambda+18)>0$

γιατί το τριώνυμο $\lambda^2+8\lambda+18$ έχει Δ = - 8 < 0, οπότε η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)\equiv\left(\frac{\lambda+8}{2},-\frac{\lambda}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{2\left(\lambda^2+8\lambda+18\right)}}{2}$.

β) Είναι $x_K=\frac{\lambda+8}{2}\Leftrightarrow\lambda=2x_K-8$ και $y_K=-\frac{\lambda}{2}\Leftrightarrow\lambda=-2y_K$, άρα $2x_K-8=-2y_K\Leftrightarrow x_K+y_K-4=0$
Οι συντεταγμένες του Κ επαληθεύουν την εξίσωση $x+y-4=0$, οπότε τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην ευθεία ε: $x+y-4=0$.

γ) Για $\lambda=-8$ είναι $x^2+y^2-8y+7=0$ (1) και για $\lambda=0$ είναι $x^2+y^2-8x+7=0$ (2)
Αφαιρώντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει: $-8y+8x=0\Leftrightarrow y=x$, τότε η (2) γίνεται:
$x^2+x^2-8x+7=0\Leftrightarrow 2x^2-8x+7=0\Leftrightarrow x=2\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Δύο από τους κύκλους διέρχονται από τα σημεία $\Gamma\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2},2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $\Delta\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2},2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Για να διέρχονται όλοι οι κύκλοι από τα σημεία αυτά πρέπει: $\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-(\lambda+8)\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\lambda\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+7=0\Leftrightarrow$....ισχύει και
$\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-(\lambda+8)\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\lambda\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+7=0\Leftrightarrow$....ισχύει.

δ) Για $\lambda=0$ είναι $x^2+y^2-8x+7=0\Leftrightarrow(x-4)^2+y^2=9$, ο κύκλος έχει κέντρο Κ(4,0) και ακτίνα $\rho=3$.
Τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων βρίσκονται πάνω στην ΟΚ. Οπότε το σημείο του που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Ο(0, 0), είναι το Α(1, 0) και το σημείο του που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση είναι το Β(7, 0).



21154. **Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\alpha x-4\alpha y=0$ (1) όπου α είναι πραγματικός αριθμός.**
α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 8)
β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α. (Μονάδες 6)
γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος (α). (Μονάδες 5)
δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα x΄x. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι $x^2+y^2-4\alpha x-4\alpha y=0\Leftrightarrow x^2-4\alpha x+4\alpha^2+y^2-4\alpha y+4\alpha^2=8\alpha^2\Leftrightarrow(x-2\alpha)^2+(y-2\alpha)^2=8\alpha^2$.
Η (1) είναι εξίσωση κύκλου όταν $8\alpha^2>0\Leftrightarrow\alpha\neq0$.

β) Ο κύκλος έχει κέντρο Κ(2α,2α) και ακτίνα $R=\sqrt{8\alpha^2}=2|\alpha|\sqrt{2}$.

γ) Είναι $x_K=2\alpha=y_K$, $\alpha\neq0$. Επομένως, τα κέντρα των κύκλων κινούνται πάνω στην ευθεία y = x με εξαίρεση το σημείο Ο(0,0), αφού είναι $x\neq0$ και $y\neq0$.

δ) Για να εφάπτεται κάποιος από τους κύκλους που ορίζονται από την εξίσωση (1) στον άξονα x΄x, θα πρέπει να ισχύει: $|y_K| = R \Leftrightarrow |2\alpha| = 2|\alpha|\sqrt{2} \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = \sqrt{2}$ άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται του άξονα x΄x.

21276.Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- **τη γραμμή γ_1, κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: Α (λ-1, 2λ+1), $\lambda \in \mathbb{R}$.**
- **τη γραμμή γ_2, που περνάει από το σταθμό Σ (- 4, 2) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1,3)$.**

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2.
(Μονάδες 10)

β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο Κ(1, 1) του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2. Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (Μονάδες 9)

γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $x_A = \lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = x_A + 1$ και $y_A = 2\lambda - 1 = 2(x_A + 1) + 1 \Leftrightarrow y_A = 2x_A + 3$.

Επειδή οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση $y = 2x + 3$, η γραμμή γ_1 είναι ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 3$.

Είναι $\lambda_{\gamma_2} = \lambda_{\vec{u}} = \dfrac{3}{-1} = -3$, άρα $\gamma_2 : y - 2 = -3(x + 4) \Leftrightarrow y = -3x - 10 \Leftrightarrow 3x + y + 10 = 0$

β) $d(K,\gamma_1) = \dfrac{|2\cdot 1 - 1\cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ και $d(K,\gamma_2) = \dfrac{|3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{14}{\sqrt{10}} = \dfrac{7\sqrt{10}}{5}$.

Επειδή $\dfrac{4\sqrt{5}}{5} < \dfrac{7\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow d(K,\gamma_1) < d(K,\gamma_2)$ προφανώς συμφέρει η σύνδεση του σταδίου με τη γραμμή γ_1.

γ) Το κέντρο του ζητούμενου κύκλου που ορίζει το κυκλικό πάρκο γύρω από το στάδιο, είναι το σημείο Κ(1, 1). Εφόσον ο κύκλος αυτός εφάπτεται στη γραμμή γ_1, η ακτίνα του λόγω του ερωτήματος (β), είναι $\rho = d(K,\gamma_1) = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, οπότε C: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{16}{5}$.

Παραβολή

2ο Θέμα

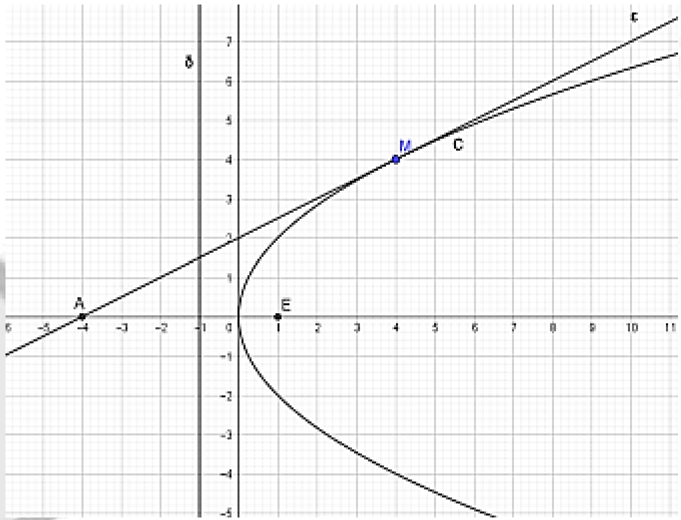
18242.Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C. **(Μονάδες 8)**
β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της Μ(4,4). **(Μονάδες 8)**
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C, τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε). **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$ οπότε η εστία έχει συντεταγμένες Ε(1,0) και η διευθετούσα είναι η δ: x = - 1.

β) Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1) \Leftrightarrow 4y = 2(x + 4) \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$.

γ)



20235.Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.
α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. **(Μονάδες 10)**
β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: 8x – 2y + 3 = 0. **(Μονάδες 15)**

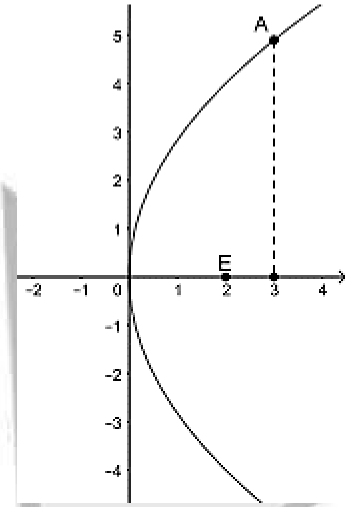
Λύση

α) Είναι $2p = 8 \Leftrightarrow p = 4$ οπότε η εστία έχει συντεταγμένες Ε(2,0) και η διευθετούσα είναι η δ: x = - 2.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής C στο $\left(\frac{1}{8}, 1\right)$ είναι η ευθεία $\varepsilon_1 : y \cdot 1 = 4\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y = 4x + \frac{1}{2}$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 4$.

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{8}{-2} = 4$, οπότε $\lambda_\varepsilon = \lambda_1 \Leftrightarrow \varepsilon // \varepsilon_1$.

21306.Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x, κορυφή O(0,0) και εστία E(2,0), όπως στο διπλανό σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy.



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A\left(3, 2\sqrt{6}\right)$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο A.

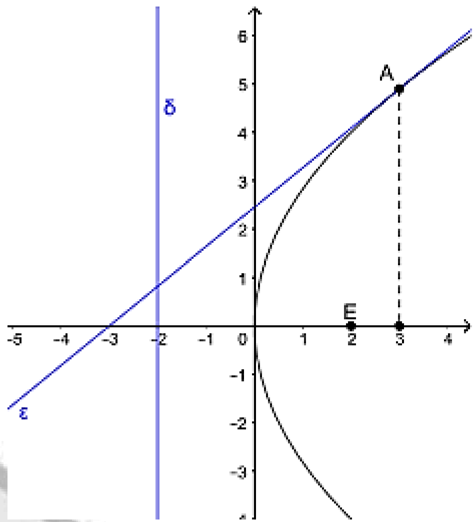
(Μονάδες 09)

Λύση

α) Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x και κορυφή O(0,0) έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Άρα $\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$, οπότε η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2 \cdot 4x = 8x$.

Το σημείο $A(3, y_A)$ της παραβολής έχει $y_A > 0$, εφόσον βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy. Οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής.

Επομένως $y_A^2 = 8 \cdot 3 = 24 \Leftrightarrow y_4 = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ και $A\left(3, 2\sqrt{6}\right)$



β) Η διευθετούσα (δ) της παραβολής είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{p}{2} = -2$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο της A έχει εξίσωση:

$y \cdot 2\sqrt{6} = 4(x+3) \Leftrightarrow y\sqrt{6} - 2x - 6 = 0$.

21307.Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο E (0,3) και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία A(6,3) και B(- 6,3), αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 05)

Λύση

α) Είναι $2p = 12 \Leftrightarrow p = 6$, Η εστία είναι η $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ή $E(0,3)$.

Το σημείο (x_0 , 3) ανήκει στην παραβολή, άρα: $x_0^2 = 12 \cdot 3 = 36 \Leftrightarrow x_0 = \pm 6$.

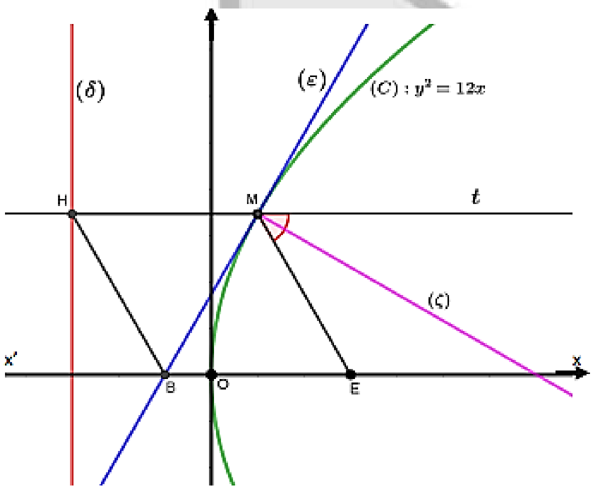
Επομένως A(6, 3) και B(−6, 3) είναι τα ζητούμενα σημεία.

β) Η ε_1 έχει εξίσωση $x\cdot 6=6(y+3)\Leftrightarrow x=y+3\Leftrightarrow y=x-3$ και η ε_2 έχει εξίσωση $x\cdot(-6)=6(y+3)\Leftrightarrow -x=y+3\Leftrightarrow y=-x-3$

γ) Είναι $\begin{cases}y=x-3\\ y=-x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-3\\ x-3=-x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-3\\ 2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-3\\ x=0\end{cases}$, άρα το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι το σημείο (0, −3).

4ο Θέμα

15394. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή $C:\ y^2=12x$ με εστία Ε και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M\left(1,2\sqrt{3}\right)$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄xστο σημείο Β. Από το σημείο Μ φέρνουμε ημιευθεία Mt παράλληλη προς τον άξονα x΄x, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Η.



α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y=\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β, Η, Ε. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΕΒΗ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $\widehat{EMt}$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι $2p=12\Leftrightarrow p=6$.

Η ε έχει εξίσωση $y\cdot 2\sqrt{3}=6(x+1)\Leftrightarrow y=\dfrac{6}{2\sqrt{3}}(x+1)\Leftrightarrow\ y=\dfrac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}(x+1)=\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{3}$

β) Είναι $\dfrac{p}{2}=3$, οπότε η εστία Ε έχει συντεταγμένες (3,0) και η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση x = -3.

Για y =0 η ε γίνεται: $0=\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}\cdot x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-1$ < άρα $B(-1,0)$.

Η ευθεία Mt έχει εξίσωση $y=2\sqrt{3}$, οπότε το Η έχει συντεταγμένες $\left(-3,2\sqrt{3}\right)$.

γ) Είναι $(MH)=1+3=4$ και $(BE)=1+3=4$. Επειδή ΜΗ//ΒΕ και $(MH)=(BE)$, το τετράπλευρο ΜΕΒΗ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $(ME)=\sqrt{(3-1)^2+\left(0-2\sqrt{3}\right)^2}=4$, άρα το ΜΕΒΗ έχει επιπλέον και δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής, γνωρίζουμε ότι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) στο σημείο επαφής Μ, διχοτομεί την γωνία $\widehat{EMt}$ όπου Ε η εστία της παραβολής. Αρκεί λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) στο Μ.

Είναι $\varepsilon\perp\zeta\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon\lambda_\zeta=-1\Leftrightarrow\lambda_\zeta=-\dfrac{1}{\lambda_\varepsilon}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε η (ζ) έχει εξίσωση:

$$y-2\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

18372.Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Α(-2,- 2), Β(0,- 4) και την παραβολή $y^2 = 4x$.
α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 09)
β) Να βρείτε το σημείο Μ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ΑΒ. (Μονάδες 08)
γ) Αν Μ(1,-2) και Κ είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 08)

Λύση

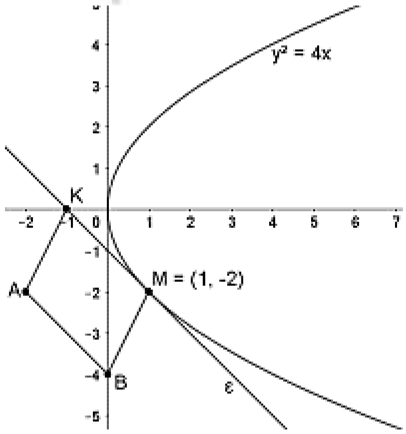
α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$.

Είναι $\frac{p}{2} = 1$, οπότε η εστία Ε έχει συντεταγμένες (1,0) και η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση x = - 1.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ δίνεται από την εξίσωση:
$yy_1 = 2(x+x_1) \Leftrightarrow y = \frac{2}{y_1} + \frac{2x_1}{y_1}$.Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{2}{y_1}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι $\lambda_{AB} = \frac{-4+2}{0+2} = -1$.

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην ΑΒ πρέπει $\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = -1 \Leftrightarrow y_1 = -2$.

Επειδή όμως το σημείο Μ ανήκει στην παραβολή θα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή $y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow 4 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1$, άρα $M(1,-2)$.



γ) Η εφαπτομένη ευθεία (ε) της παραβολής στο σημείο της Μ(1,-2) έχει εξίσωση $y(-2) = 2(x+1) \Leftrightarrow y = -x-1$.
Για y = 0 είναι $-x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
Επομένως το σημείο τομής με τον άξονα x΄x είναι το Κ(-1.0).
Είναι $(KM) = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ και
$(AB) = \sqrt{(0+2)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$.
Τα τμήματα ΑΒ και ΚΜ είναι ίσα και παράλληλα, επομένως το τετράπλευρο ΑΒΜΚ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

20092.Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M\left(\frac{1}{4},1\right)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση $\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.
α) i. Να δείξετε ότι h ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ από την ε. (Μονάδες 07)
ii. Αν η ευθεία ε τέμνει του άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι (ΜΓΔ) = 5 τ.μ. (Μονάδες 05)
β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθεία ζ της παραβολής με ζ παράλληλή στην ε. (Μονάδες 08)
ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών η και ε; (Μονάδες 05)

Λύση

α) i. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής $y_2 = 4x$ και της ευθείας ε είναι αδύνατο.

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ 4x - 3y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{4} = x \\ y^2 - 3y + 12 = 0 \end{cases}$$

Το τριώνυμο $y^2 - 3y + 12$, έχει $\Delta < 0$ άρα η εξίσωση $y^2 - 3y + 12 = 0$ είναι αδύνατη, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Είναι $d(M,\varepsilon) = \dfrac{\left|4\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot 1 + 12\right|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{10}{5} = 2$.

ii. Στην ε για y=0 έχουμε $4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ και για x = 0 έχουμε $-3y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = 4$, άρα Γ(-3,0) και Δ(0,4).

Είναι $\overrightarrow{M\Gamma} = \left(-3 - \frac{1}{4}, 0 - 1\right) = \left(-\frac{13}{4}, -1\right)$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (0+3, 4-0) = (3,4)$.

Είναι $\det\left(\overrightarrow{M\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{13}{4} & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -13 + 3 = -10$ και $(M\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{M\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}\right)\right| = 5$.

β) i. Έστω $K(x_1, y_1)$ με $y_1 \neq 0$ τυχαίο σημείο της παραβολής.

Η εφαπτομένη της παραβολής στο Κ έχει εξίσωση $yy_1 = 2(x + x_1) \Leftrightarrow y = \frac{2}{y_1}x + \frac{2x_1}{y_1}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_\zeta = \frac{2}{y_1}$ και $\lambda_\varepsilon = \frac{4-0}{0+3} = \frac{4}{3}$.

ε//ζ$\Leftrightarrow$ $\lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 4y_1 = 6 \Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{2}$.

Επειδή το Κ είναι σημείο της παραβολής, ισχύει ότι $y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4x_1 \Leftrightarrow \frac{9}{4} = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{9}{16}$.

Τότε η ζ έχει εξίσωση $y = \dfrac{2}{\frac{3}{2}}x + \dfrac{2\frac{9}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}x + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 12y = 16x + 9 \Leftrightarrow 16x - 12y + 9 = 0$

ii. Για να βρούμε την απόσταση των ευθειών η και ε, αρκεί να βρούμε ένα σημείο, έστω Λ, της η και να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ε.

Για x = 0 η ζ γίνεται $-12y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}$, άρα $\Lambda\left(0, \frac{3}{4}\right)$.

$$d(\zeta,\varepsilon) = d(\Lambda,\varepsilon) = \frac{\left|4\cdot 0 - 3\cdot\frac{3}{4} + 12\right|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{\left|-\frac{9}{4} + \frac{48}{4}\right|}{5} = \frac{39}{20}$$

1ο Θέμα

21152.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x έχει εξίσωση $x=x_0$.

iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα η $\vec{\eta}=(A,B)$.

iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2=4x$ έχει εστία το σημείο Ε(1,0).

v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y-y_0=\lambda(x-x_0)$. (Μονάδες 15)

Λύση

α) i. Σωστό
Σελίδα 19 σχολικό βιβλίο.
ii. Λάθος.
Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_o,y_o)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x έχει εξίσωση $y=yo$.
iii. Λάθος
Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta}=(A,B)$.
iv. Σωστό
Σελίδα 91 σχολικό βιβλίο.
v. Σωστό
Σελίδα 83 σχολικό βιβλίο.

β) Σελίδα 60 σχολικό βιβλίο – Εξίσωση ευθείας.

Έλλειψη

2ο Θέμα

20883.Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $C: 16x^2 + 25y^2 = 400$.

α) Να βρείτε τα μήκη ΒΒ΄, ΑΑ΄ του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της Ε και Ε΄. (Μονάδες 12)

β) Αν Ε΄(-3,0) και Ε(3,0), να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο Ε΄ και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το Ε και είναι παράλληλη στον άξονα y΄y. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $C: 16x^2 + 25y^2 = 400 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400} \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Είναι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, $\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \gamma = 3$

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι (Α΄Α) = 2α = 2·5 = 10,

το μήκος του μικρού άξονα είναι (Β΄Β) = 2β = 2·4 = 8 και οι εστίες είναι Ε΄(-3,0) και Ε(3,0).

β) Θέλουμε η Ε΄ να είναι εστία της ζητούμενης παραβολής, άρα $\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = -6$ και η παραβολή έχει εξίσωση $y^2 = 2(-6)x = -12x$.

21308.Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης και την απόστασή τους. (Μονάδες 09)

β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης. (Μονάδες 08)

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της Β(0,4). (Μονάδες 08)

Λύση

α) Είναι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, $\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \gamma = 3$

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι οι $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$. Η απόσταση των εστιών είναι $2\gamma = 2 \cdot 3 = 6$.

β) Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος 2β = 2 · 4 = 8.

Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος 2α = 2 · 5 = 10

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο Β έχει εξίσωση: $\frac{x \cdot 0}{25} + \frac{y \cdot 4}{16} = 1 \Leftrightarrow y = 4$

Υπερβολή

2ο Θέμα

16128.Δίνεται η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε΄ και Ε. (Μονάδες 10)

β) Αν το Ν είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $\left|(NE')-(NE)\right|$. (Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C). (Μονάδες 10)

Λύση

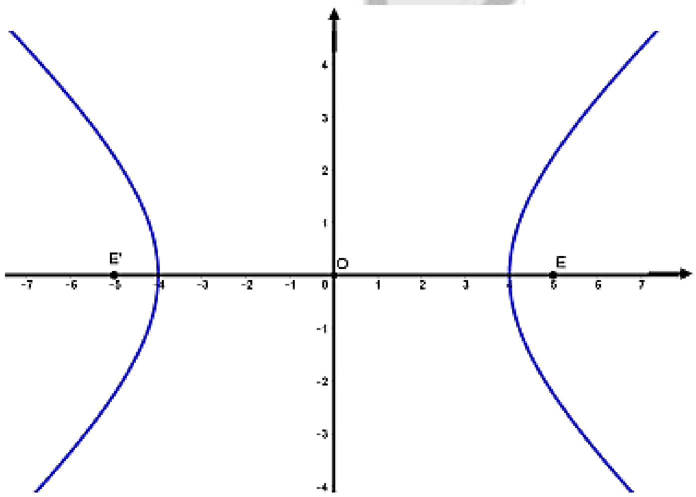
α) Είναι $\alpha^2=16 \Leftrightarrow \alpha=4$, $\beta^2=9 \Leftrightarrow \beta=3$ και $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=25 \Leftrightarrow \gamma=5$

Οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής από τις εστίες ισούται με 2α. Έτσι, θα έχουμε ότι $\left|(NE')-(NE)\right|=2\cdot 4=8$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $(-\alpha,0)$ και $(\alpha,0)$, δηλαδή στα $(-4,0)$ και $(4,0)$.

Αν x = 0 τότε $-\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow y^2=-\beta^2$ αδύνατο, άρα η υπερβολή δεν τέμνει τον y΄y.



3ο Θέμα

17944.Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής (C): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, εστιακή απόσταση $EE'=2\sqrt{7}$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2, \beta=\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Α ' της υπερβολής (C).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C). (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Ισχύει ότι η εστιακή απόσταση είναι $2\gamma=2\sqrt{7}\Leftrightarrow\gamma=\sqrt{7}$.

Για την εκκεντρότητα της υπερβολής ισχύει ότι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha=2$.

Είναι $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2=\left(\sqrt{7}\right)^2-2^2=7-4=3\Leftrightarrow\beta=\sqrt{3}$

β) i) Οι κορυφές της υπερβολής έχουν συντεταγμένες Α(2 , 0) , Α' (−2, 0).

ii) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι $\varepsilon_1: y=\frac{\beta}{\alpha}x=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ και $\varepsilon_2: y=-\frac{\beta}{\alpha}x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$

γ) Η γραφική παράσταση και τα υπόλοιπα στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.