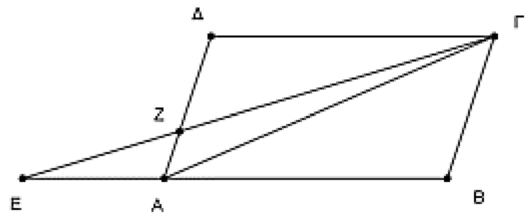
Διανύσματα

Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

Θέμα 2ο

21165. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω $\vec{AB}=\vec{\alpha}$ και $\vec{A\Delta}=\vec{\beta}$. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τέτοια ώστε $\vec{AE}=-\frac{1}{2}\vec{AB}$ και $\vec{AZ}=\frac{1}{3}\vec{A\Delta}$.



α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{EZ}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\vec{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{Z\Gamma}=2\vec{EZ}$. (Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Θέμα 2ο

15010. Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου Α, Β, Γ και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{\Gamma E}$ τέτοια ώστε $\vec{B\Delta}=\vec{BA}+\vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma E}=\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma B}$.

α) i. Να δείξετε ότι $\vec{A\Delta}=\vec{B\Gamma}$ και $\vec{AE}=\vec{\Gamma B}$. (Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα. (Μονάδες 8)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία Α Δ, και Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

Συντεταγμένες διανύσματος

Θέμα 2ο

14666. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-3)$ και $\vec{\beta}=(-2,-1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$ και $\vec{v}=5\vec{\alpha}-9\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

γ) Αν τα $\vec{\beta},\vec{w},\vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. (Μονάδες 7)

16147. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=3\vec{i}+3\sqrt{3}\,\vec{j}$, $\vec{\beta}=\sqrt{2}\,\vec{i}$, $\vec{\gamma}=-3\vec{j}$ και $\vec{\delta}=(-1,1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$. (Μονάδες 9)

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με τον θετικό ημιάξονα Ox. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 6)

16151. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,3)$ και $\vec{\beta}=(-\sqrt{3},1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$. (Μονάδες 9)

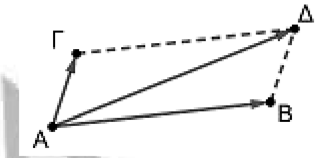
16579. Δίνονται τα σημεία Α(2,1) και Β(6,7) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\vec{AB}$. (Μονάδες 07)

β) Αν $\vec{v}=\vec{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$. (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=(-8,-12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα. (Μονάδες 10)

16580. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία Α(2,4), Β(11, 5), Γ(3, 7) και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:



α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 08)

γ) του σημείου Δ. (Μονάδες 05)

16581. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία Α(−1, 6), Β(1, 2) και Γ(3, −2).

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 07)

17070. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία και Α, Β, Γ και Δ. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

19038. Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,3)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(-5,-5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}|=5|\vec{\beta}|$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

Θέμα 4ο

17076. Δίνονται τα σημεία $A(-3,-1)$, $B(0,3)$ και $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|\geq 5$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4$.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

17077. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\lambda\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB}=(\lambda+1)\vec{i}+(\lambda+3)\vec{j}$, με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}=(\lambda-1)\vec{i}+3\vec{j}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων Α και Β ως συνάρτηση του λ. (Μονάδες 7)

γ) Για ποιες τιμές του λ η απόσταση των σημείων Α και Β είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων Α και Β να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Θέμα 2ο

14586. Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία Α είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$. (Μονάδες 8)

14953. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-2,5), B(7,8), \Gamma(1,-4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$. (Μονάδες 5)

15038. Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια, ώστε $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \beta) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$. (Μονάδες 10)

15073. Δίνονται τα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$. (Μονάδες 9)

15186. Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Β(6,3), $\Delta(1,-2)$ και Γ(9,2). Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες (4,2) και το μέσο Ν του τμήματος ΓΔ έχει συντεταγμένες (5,0). (Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{MN} = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$. (Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

15379. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (3,-1)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. (Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. (Μονάδες 12)

15463. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = (1,-2)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$. (Μονάδες 8)

15658. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,-2)$ και $\vec{\beta} = (1,1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 4)

β) Αν το σημείο Α είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, Β είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας ΑΒ,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι Α(4,- 1) και Β(3, 2). (Μονάδες 5)

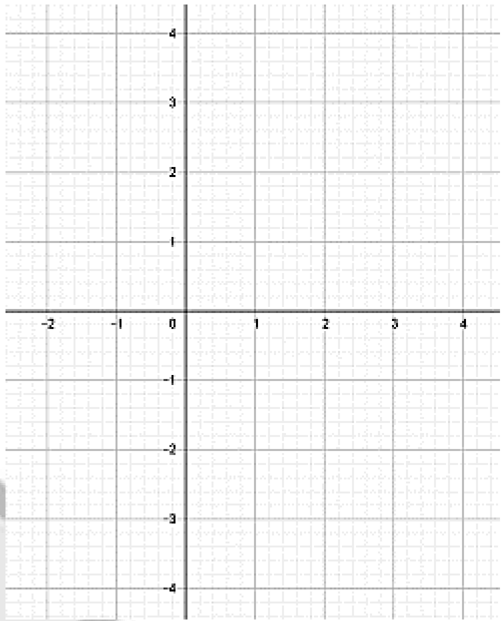
ii. να δείξετε ότι $3x_{\Gamma}+y_{\Gamma}=11$. (Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_{\Gamma},y_{\Gamma})$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και $|\overrightarrow{K\Gamma}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$. (Μονάδες 10)

15317.Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v}=(3,0)$ και $\vec{w}=(-3,4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)

β) i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$



(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα. (Μονάδες 3)

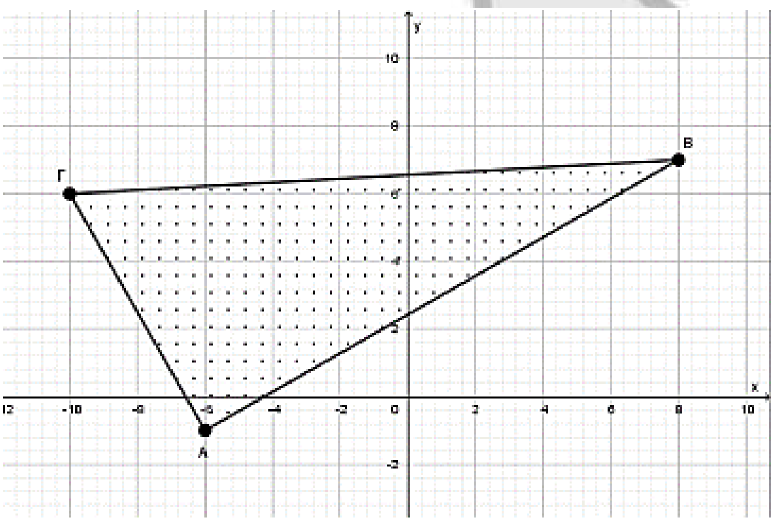
15825.Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$. (Μονάδες 7)

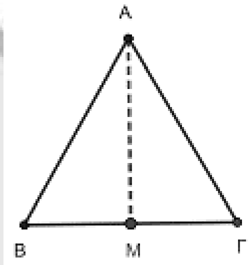
15996.Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο ΑΒΓ.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.
(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο ΑΒΓ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού. (Μονάδες 15)

16141. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.



α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)$ **ii.** $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}\right)$ **iii.** $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}\right)$

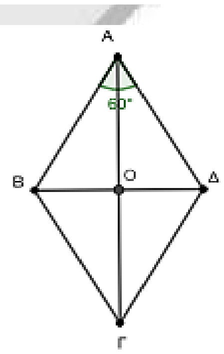
iv. $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{\Gamma M}\right)$ **v.** $\left(\overrightarrow{\Gamma M},\overrightarrow{\Gamma B}\right)$ (Μονάδες 10)

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ **ii.** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}$ **iii.** $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$

(Μονάδες 15)

16144. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $A=60^\circ$.
Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :



α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$
β) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$
γ) $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{AO}$
δ) $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OB}$
ε) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(Μονάδες 25)

16426. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-1)$ και $\vec{\beta}=(-3,2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(x,y)$ όταν $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}|=\sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

16427. Δίνονται τα σημεία Α(-2 , 3), Β (0 , 8), Γ (5 , 3) και Δ (10 , 5). Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 13)

16428. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}|=\frac{1}{2}$ και $\left|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right|$.

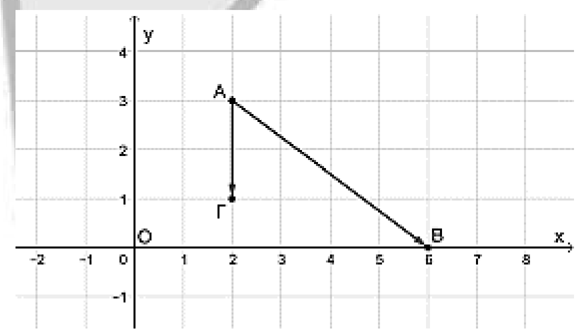
α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{3}{8}$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

17075. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}=(4,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(0,-2)$.
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.
(Μονάδες 13)



20685. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(1,1), \vec{w}=(-10,2)$ και τα σημεία Α(−1,2), Β(β, 0), Γ(0, γ).
Τα διανύσματα $\vec{u}, \overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι β = 1. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}=\frac{9}{5}$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 7)

20888. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν:
$|\vec{\alpha}|=4,\ |\vec{\beta}|=5,\ (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$.Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 15)

4ο Θέμα

18547. Δίνονται τα σημεία $A(0,-1)$, $B(\lambda,1)$ και $\Gamma(\lambda-2,\lambda-3)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία Α, Β και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $A=90^\circ$. (Μονάδες 7)

β) Για $\lambda=-2$,να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 4)

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

3ο Θέμα

18243. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2,\ |\vec{\beta}|=4,\ (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma}=\alpha-\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|,|\vec{\delta}|$. (Μονάδες 8)

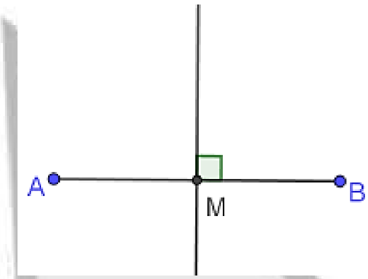
δ) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}})$. (Μονάδες 5)

Ευθεία

Εξίσωση ευθείας

2ο Θέμα

15027. Δίνονται τα σημεία Α(1,-1) και Β(3,5) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 10)

15044. Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $B(6,-1)$.

α) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, είναι το σημείο $M(3,2)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 15)

15271. Δίνονται τα σημεία Α(- 3, 2), Β(1, 6) και Γ(- 13,- 7).

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β έχει εξίσωση $y = x + 5$. (Μονάδες 7)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ. (Μονάδες 10)

15986. Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3).

α) i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η $(\varepsilon): y = 2x - 1$. (Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Γ $(2^{100}, 5)$ ανήκει στην ευθεία (ε). (Μονάδες 13)

16002. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(3,- 2) και Γ(5, 2). Αν το σημείο $M\left(3,\frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι Β(1,- 1). (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ. (Μονάδες 10)

18236. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(- 1, 5) και Β(2, 1). Αν οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1 : y = -x + 4$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι Γ(4, 0). (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε:

i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ (Μονάδες 6)

ii. την εξίσωση του ύψους ΒΔ. (Μονάδες 7)

18351. Δίνονται τα σημεία Α(-1,5), Β(3,3). Να υπολογίσετε:

α) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ. (Μονάδες 8)

γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 9)

21162. Δίνονται τα σημεία Α(3,2) και Β(-1,-6). Να βρεθούν:

α) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. (Μονάδες 8)

γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 9)

21662. Δίνεται η ευθεία ε: $-x+y-2=0$ και τα σημεία Α(-5,1) και Β (-3,5).
α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Β. (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε:
i. την εξίσωση της ευθείας ε΄ που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ε. (Μονάδες 5)
ii. το σημείο τομής των ευθειών ε και ε΄. (Μονάδες 5)
iii. το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ε. (Μονάδες 5)

21964. Δίνονται το σημείο Α(4,-2) και η ευθεία (ε_1) με εξίσωση: $x-y+2=0$. Να βρείτε:
α) την ευθεία (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1). (Μονάδες 6)
β) το σημείο τομής Β, των ευθειών (ε_1) και (ε_2): $y=-x+2$. (Μονάδες 8)
γ) το συμμετρικό Γ του σημείου Α, ως προς την ευθεία (ε_1). (Μονάδες 11)

22071. Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις $x+2y+1=0$ και $2x+y+5=0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο Κ(1,2).
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Η κορυφή Α του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Α(-3, 1). (Μονάδες 08)
ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Γ(5, 3). (Μονάδες 07)
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του ΒΓ και ΓΔ. (Μονάδες 10)

22092. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφή Α(1,4). Η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $3x-2y+5=0$ και η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $y=x+2$.
α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(-1,1)$. (Μονάδες 12)
β) Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ. (Μονάδες 13)

4ο Θέμα

14970. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο Μ(2, 1).
α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:
i. Την εξίσωση της.
ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες. (Μονάδες 6) (2+4)
β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.
i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.
ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.
iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται. (Μονάδες 19) (6+7+6)

14978. Δίνονται τα σημεία Α(1,1) ,Β(3,3) .
α) Αν Μ(x, y) σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα. (Μονάδες 6)
β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. (Μονάδες 4)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ. (Μονάδες 8)
δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

15042. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο του επιπέδου Μ, τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}$.
α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Μ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του ΒΓ. (Μονάδες 2)
γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\kappa$ και $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\lambda$.
Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι $\kappa=\lambda=0$. (Μονάδες 7)
ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες. (Μονάδες 8)

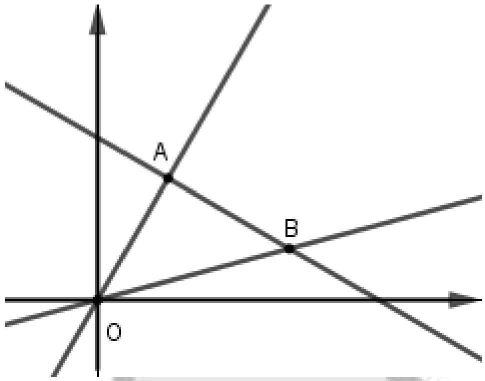
15029. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ καθώς και τη γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$. (Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι $εφ15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. (Μονάδες 6)



15275. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο Μ(2, 1).

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της. (Μονάδες 2)

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες. (Μονάδες 5)

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 6)

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται. (Μονάδες 6)

16003. Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $ε_α:(α-4)x-2αy+α+4=0,\ α\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν α = 0 και όταν α = 1 και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο Μ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το Μ. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx, Οy στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι $0<α<4$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει (ΟΑ)= 2(ΟΒ) (Μονάδες 5)

17078. Δίνονται τα σημεία $A(3,2α)$, $B(4,α)$, $Γ(α+1,1-α)$ και $Δ(α,1)$, με $α\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και β έχει εξίσωση $y=-αx+5α$. (Μονάδες 6)

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν $α=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. (Μονάδες 7)

iii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο όταν $α\neq\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό:
«Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο.»
Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

18568. Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $Γ(3,-2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 04)

β) Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα y΄y σε ένα σημείο Δ και η ευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα σημείο Ε, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε. (Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AΔ}=2\overrightarrow{ΔB}$ και $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EΓ}$. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ. (Μονάδες 05)

Γενική μορφή ευθείας

2ο Θέμα

15657. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+y=6$ και $\varepsilon_1: x-2y=-2$

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3: 3x-y=4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 13)

16766. Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε1) και (ε_2) είναι κάθετες. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στον άξονα x΄x. (Μονάδες 9)

22072. Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ και (2): $(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 10)

4ο Θέμα

15253. Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2-1)x+(3\mu^2-2\mu-1)y-5\mu^2+4\mu+1=0$ (1), όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε:

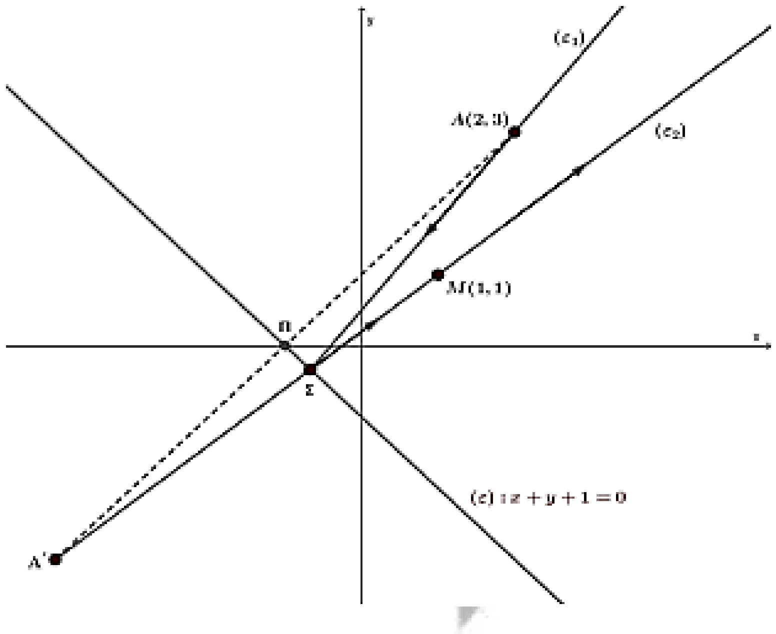
i. είναι παράλληλες στον x΄x. (Μονάδες 4)

ii. είναι παράλληλες στον y΄y. (Μονάδες 4)

iii. διέρχονται από το (0,0). (Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο. (Μονάδες 8)

15439. Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x+y+1=0$, , μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.



α) i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1,0)$. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου Α ως προς την ευθεία (ε) είναι το σημείο $A'(-4.-3)$.

(Μονάδες 5)

β) i. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2) η οποία διέρχεται από τα σημεία Α΄, Σ, Μ, , τότε να βρείτε την εξίσωσή της. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε). (Μονάδες 5)

γ) Αν $\Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της προσπίπτουσας ακτίνας (ε_1). (Μονάδες 4)

15475. Δύο εργοστάσια Α και Β τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες Α(2,1), Β(4,3), βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια. (Μονάδες 8)

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση ε:$y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια. (Μονάδες 10)

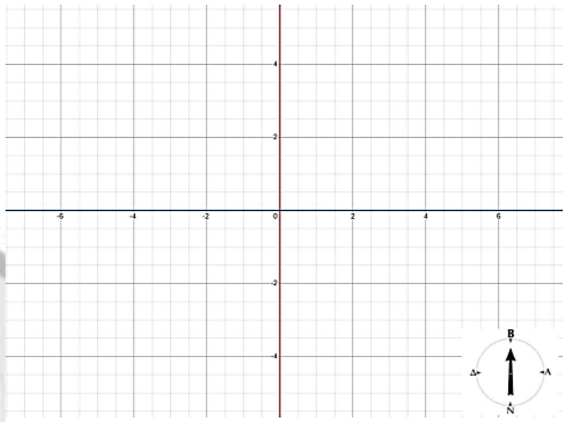
γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι Ν(4,1), να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό. (Μονάδες 7)

16477. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy , η εξίσωση ευθείας ε_λ: $\lambda x+(1-\lambda)y+2=0$ όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ . Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο Ο(0,0) .

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ . (Μονάδες 10)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο. (Μονάδες 5)

β) Ένα ρυμουλκό πλοίο Ρ βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ . Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το Ρ έχει εξίσωση $x+y+4=0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ρ όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους. (Μονάδες 10)



18244. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2: y=x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 6)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι 15° . (Μονάδες 3)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. (Μονάδες 10)

21160. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Οxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία Ο(0, 0), Β(κ, 0) και Γ(0,2κ) όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου ΟΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ, τότε:

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΖ. (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΒΓ που διέρχεται από το Ο. (Μονάδες 7)
γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 8)

Εμβαδόν τριγώνου

2ο Θέμα

15440. Δίνονται τα σημεία $A(0,2), B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 9)
β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)

16194. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 8\chi+\psi-28=0$, $(\varepsilon_2): \chi-\psi+1=0$, $(\varepsilon_3): 3\chi+4\psi+5=0$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 09)
β) Αν το σημείο τομής είναι το Μ(3,4) να υπολογίσετε:
i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)
ii. Την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία (ε_3). (Μονάδες 08)

16425. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\frac{2}{3}x+1$ και $\varepsilon_2: x=\frac{3}{2}y+9$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. (Μονάδες 12)
β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2. (Μονάδες 13)

16759. Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x-2y=-1$, $2x+y=4$ και $y=-1$ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$. (Μονάδες 9)
γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε_3). (Μονάδες 8)

16769. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,7), Β(-1,5) και Γ(3,3).
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 09)
β) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε να υπολογίσετε:
i. Τις συντεταγμένες του Μ.
ii. Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 16)

16771. Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Γ(4,-1) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$.
α) Να βρεθεί το σημείο Β. (Μονάδες 09)
β) Αν Β(5,0):
i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 08)
ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 08)

16774. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2,5), Β(3,6) και Γ(-1,-2).
α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 07)
β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το Α. (Μονάδες 09)
γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 09)

16810. Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία Α(1,1), Β(5,2), Γ(0,-2) και Δ(8,0).
α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α). (Μονάδες 15)

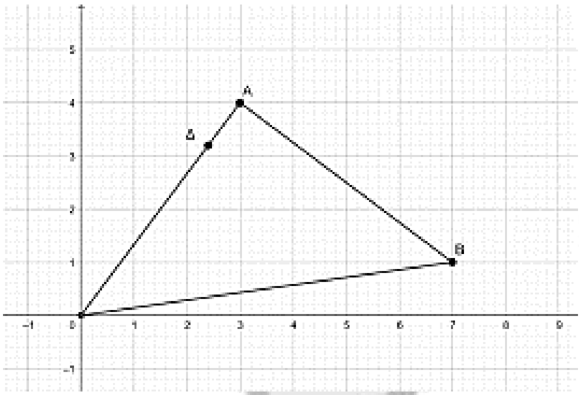
18240. Δίνεται το σημείο Α(1, 2) και η ευθεία (ε): y =x + 3.

α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε) . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην (ε) . (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) ,(ε) . (Μονάδες 10)

17805. Δίνεται το τρίγωνο ΑΟΒ με Α(3, 4), Β(7,1), Ο η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$ της πλευράς ΑΟ.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$. (Μονάδες 9)

γ) Δίνεται ότι $(OAB)=\frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Να δείξετε ότι $(A\Delta B)=\frac{1}{5}(OAB)$. (Μονάδες 10)

18979. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+3y=5$ και $\varepsilon_2: 4x+6y=8$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,1) είναι σημείο της ευθείας ε_1. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε_2. (Μονάδες 10)

20885. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(-3, -1) και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x΄x και y΄y, είναι: Ε = 8. (Μονάδες 13)

21963. Δίνονται τα σημεία $A(1,-4)$, $B(-3,-4)$ και $\Gamma(1,4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{\Gamma A}$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 11)

4ο Θέμα

15194. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1,1), Β(4,4) και Γ(3,1).

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε σημείο Κ της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε (ΚΑ) = (ΚΒ) . Τι ιδιότητα έχει το σημείο Κ ; (Μονάδες 9)

15273. Θεωρούμε τα σταθερά σημεία Α(3,4), Β(2,5) και Γ(- 2,2) και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha-1,\ 3\alpha+1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει (ΜΒΓ) = (ΑΒΓ) . Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά; (Μονάδες 8)

15380. Δίνονται τα σημεία Α(1,3), Β(−2,2) και η ευθεία ε: $3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε. (Μονάδες 8)
β) Για $\alpha = 4$
i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 8)
ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

15433. Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία Α(−1,−2) και Β(3,1). Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση δ: $x + y - 1 = 0$.
α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ:
i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο. (Μονάδες 8)
ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς. (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι ίσο με 8. (Μονάδες 10)

15681. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B\left(\frac{\alpha}{2},\beta\right)$ και $M\left(\frac{\alpha}{2},0\right)$ που α, β, σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.
α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές και το σημείο Μ είναι το μέσο της βάσης του ΟΑ. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών ΟΒ και ΑΒ είναι ΟΒ : $2\beta x - \alpha y = 0$ και ΑΒ: $2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)
γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΟΒ και d_2 η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΑΒ, να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$. (Μονάδες 8)
δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί; (Μονάδες 3)

15987. Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3)
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η (ε): y=2 x−1. (Μονάδες 8)
β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο Γ (2^{100} , 5) ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων Ο(0,0). (Μονάδες 8)
γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ. (Μονάδες 9)

16057. Δίνονται τα σημεία Α(2,0), Β(3,4) και $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α και έχουν κλίση λ. (Μονάδες 5)
ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο Α, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β, έχει εξίσωση (ε):$15x - 8y - 30 = 0$. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Α και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο Β . (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ). (Μονάδες 7)

17694. Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες Α(3,6) και Β(7,-2).
α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή. (Μονάδες 12)
β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που

ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη. (Μονάδες 13)

17695. Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία Α και Β. Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία. (Μονάδες 8)
β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται; (Μονάδες 7)
γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή t=2. (Μονάδες 5)
δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε: $4x+3y+7=0$ 4x+3y+7=0 ισούται με 6. (Μονάδες 5)

22073. Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο Λ(2,6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π(λ-1, 2+λ), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του. (Μονάδες 07)
ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι. (Μονάδες 05)
β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:
i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι; (Μονάδες 06)
ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι. (Μονάδες 07)

22262. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(-2, 1), Β(1, 5) και Γ(5, -1).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)
γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 8)
δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $(\text{ΜΑΒ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ})$. (Μονάδες 7)

22265. Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία Α(1, –1), Β(2, 2) και Γ(μ–1, 3μ–2), $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 6)
γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό. (Μονάδες 5)
δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Β και από τις οποίες το σημείο Α, απέχει απόσταση ίση με 1. (Μονάδες 8)

22266. Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x-(\lambda-2)y+\lambda-7=0$ (Ε) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x-8y+3=0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 7)
γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε); (Μονάδες 7)
δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ζ). (Μονάδες 5)

3ο Θέμα

15152. Δίνονται τα σημεία Α(1,3), Β(−2,2) και η ευθεία ε: 3x + y + α = 0 με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β. (Μονάδες 5)
β) Για ποιες τιμές του α, η απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε. (Μονάδες 8)
γ) Για α = 4 να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 12)

Κωνικές τομές

Κύκλος

2ο Θέμα

15028. Έστω κύκλος C με κέντρο K(1,2) και ακτίνα ρ=2 και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y-1=0$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K(1,2) από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2. (Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C. (Μονάδες 8)

15680. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$ με κέντρο $K(1,\,2)$ και η ευθεία ε: $3x+4y+1=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho=2$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$. (Μονάδες 10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 5)

15994. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4x+3=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 13)

β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιανδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες. (Μονάδες 12)

16773.α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το O(0,0) και διέρχεται από το σημείο A(1,2). (Μονάδες 08)

β) Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=5$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενής του στο σημείο A. (Μονάδες 09)

ii. Να βρεθεί το σημείο B, το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο. (Μονάδες 08)

16808. Τα σημεία A(-8, 1), B(4, 5) και Γ(-4, 9) είναι σημεία ενός κύκλου C.

α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 10)

17317. Δίνεται ο κύκλος C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ και η ευθεία ε: $3x-4y=8$.

α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του. (Μονάδες 5)

β) Αν K(1,2), να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{13}{5}$. (Μονάδες 13)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. (Μονάδες 7)

18238. Δίνονται τα σημεία A(1,3) και B(- 3,5).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(K\Lambda)=\sqrt{5}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB. (Μονάδες 10)

18239. Δίνεται το σημείο K(- 3,1) και η ευθεία (ε): $4x-3y+5=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε). (Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε). (Μονάδες 10)

18241. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α) τον κύκλο C . (Μονάδες 9)

β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον y΄y και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx΄ και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

18700. Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται το σημείο Α(3, −4).

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α ανήκει στον κύκλο C. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο Α. (Μονάδες 10)

19039. Δίνεται η εξίσωση $(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4 \quad (1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(−1,1) και ακτίνα R = 2. (Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του κύκλου (K,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με −1. (Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 8)

21962. Δίνονται τα σημεία Α(0,3), Β(3,4) και Γ(1,0).

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{ΒΑΓ}$ είναι ορθή. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το μέσο Κ της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ. (Μονάδες 7)

21965. Δίνονται τα σημεία Α(2, -4) και Β(0, -2)

α) Να βρείτε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 5)

γ) Αν (ζ): $y = x - 4$ και (ε): $y = 2x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ), (ε). (Μονάδες 9)

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ε) είναι η $(x-2)^2+(y+2)^2=4$. (Μονάδες 7)

22147. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-x-y-\frac{7}{2}=0 \ (1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα R = 2.(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K,R). (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο Α. (Μονάδες 8)

4ο Θέμα

14954. Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0$ και $(\varepsilon_2): (\mu+1)x + (\mu-1)y - \mu + 1 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξτε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45^o για κάθε τιμή της παραμέτρου μ. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. (Μονάδες 9)

14984. Θεωρούμε τα σημεία Α(− 2,− 3) και Β(7, 9). Έστω S το σύνολο των σημείων Μ που είναι κορυφές των τριγώνων ΑΜΒ ώστε (ΑΜΒ) = 12 τ.μ.

α) Να αποδείξτε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 9)

γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα ΑΧΒΥ υπάρχουν, αν το Χ πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Υ σημείο της (ε_2), που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2; Εξηγήστε. (Μονάδες 7)

15030. Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία ε: $2x + y + 5 = 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες (η_1),(η_2) που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών (η_1),(η_2). (Μονάδες 6)

15080. Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$ (1) και $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ (2).

α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα Κ(1,0), Λ(3,0) και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

β) i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ). (Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2. (Μονάδες 9)

15081. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K(-\sqrt{2},0), \Lambda(3\sqrt{2},0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1, \rho_2 = 3$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2. (Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες. (Μονάδες 7)

15082. Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις: $C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$ και $C_2: (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου Κ, Λ, τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2, αντίστοιχα. Ακολούθως να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 5)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων. (Μονάδες 8)

15177. Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση $c_1: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση

$\overrightarrow{NA}^2 - \overrightarrow{NB}^2 = 4$, ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y = -x - 2$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R = 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 6)

γ) i. Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2. (Μονάδες 6)

15189. Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Κ και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο ΑΒ έχει εξίσωση C: $x^2 + (y+1)^2 = 5$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1 : x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y + 7 = 0$. (Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C. (Μονάδες 6)

15272. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ(3, 2) βρίσκεται έξω από τον κύκλο. (Μονάδες 7)
γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το Μ. (Μονάδες 12)

15432. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\kappa x - 2\kappa y + 4 = 0$ (1) με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου. (Μονάδες 3)
γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων. (Μονάδες 7)
δ) Για κ = 1 να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο Γ(2,2). (Μονάδες 8)

15628. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4-2k)x - 2(1+k)y + 5 - 2k = 0$ (I), όπου $k \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η (I) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k-2, k+1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε k > 0. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε k > 0. (Μονάδες 7)
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε k > 0. (Μονάδες 8)

15646. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $C_1 : (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

α) Να δείξετε ότι τα κέντρα ΚΛ, των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας xOy του συστήματος συντεταγμένων. (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε τα σημεία τομής Β, Γ, των κύκλων C_1 και C_2. (Μονάδες 7)
γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα ΒΓ, να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.. (Μονάδες 10)

15993. Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

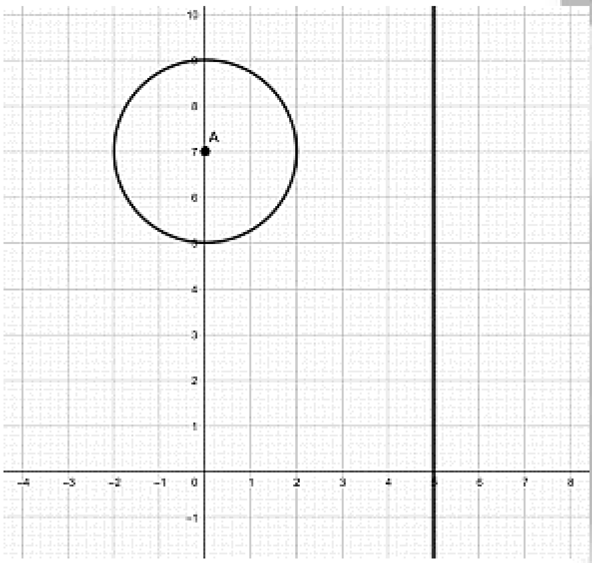
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 03)
β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. (Μονάδες 10)

γ) Αν Α(1,0) και Β(3,0) είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων. (Μονάδες 07)

δ) Αν ένα σημείο Μ(α, β) επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$.

(Μονάδες 05)

15791.Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου Α και την ευθεία (ε) : x = 5.



α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1. (Μονάδες 3)

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1, y_1)$.

i. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1, y_1)$ και ακτίνα 2 . (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου ΑΒ σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου Β.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β)i. με ακτίνα 2 , που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε). (Μονάδες 10)

16191.Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(5,5).

α) Αν για το σημείο Μ(x, ψ) ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 32$,να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6\psi - 6x + 10 = 0 \ (1)$.

(Μονάδες 08)

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 03)

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(3,3) και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$.

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): λx + ψ = 2 εφάπτεται του κύκλου (1). (Μονάδες 07)

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την ΑΒ γωνία 45° ; (Μονάδες 07)

15826.Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0 \ (1)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου Κ και την ακτίνα ρ. (Μονάδες 7)

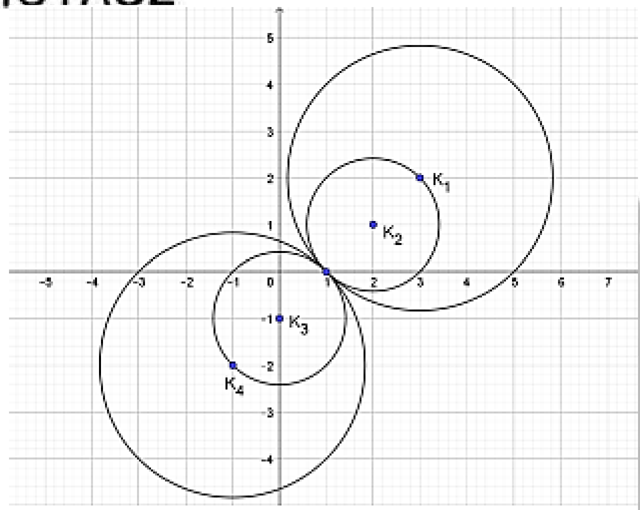
β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda = 0$; (Μονάδες 3)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ. Αξιοποιώντας το σχήμα,

i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 5)

iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: $x + y - 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1). (Μονάδες 5)



18237. Θεωρούμε τα σημεία Α(-1, 2), Β(3, 2), Γ(1, 4).

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 7)

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία ε: $y = x + 1$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

18247. Δίνονται τα σημεία Ο(0,0), Α(α,0) και Β(0,β) όπου α, β > 0.

α) Να βρείτε συναρτήσει των α, β

i. τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 5)

ii. την απόσταση (ΟΜ). (Μονάδες 5)

β) Αν $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $(OM) = \frac{(AB)}{2}$. (Μονάδες 5)

ii. να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΑΒ. (Μονάδες 7)

18415. Δίνεται η εξίσωση $(x - 3\lambda)^2 + (y + 2\lambda)^2 = 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία ε: $2x + 3y = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

18416. Δίνεται η εξίσωση $x(x - 4) + y(y - 2) = 2(x + y - 4)$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ (3,2) και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$. (Μονάδες 6)

β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο ΑΒ. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y = \lambda x + 4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}$. (Μονάδες 6)

18567. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=4$ και το σημείο $A\left(2\sqrt{2},0\right)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι εξωτερικό του κύκλου C. (Μονάδες 05)
ii. Να βρείτε τις εξισώνεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο Α και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 12)
β) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο Α, να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 08)

18569. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=1$.

α) Αν Α και Α΄ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Οx και Οx΄ αντίστοιχα, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Α΄ είναι Α(1,0) και Α΄(-1,0). (Μονάδες 05)
ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το Α και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 150°. (Μονάδες 06)
β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο Β, να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΒ έχει μήκος $\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)
γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από τα σημεία Α΄ και Β. (Μονάδες 06)

18570. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ και η ευθεία (ε): $3x-4y=\mu,\ \mu\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. (Μονάδες 05)
β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β
i. Να αποδείξετε ότι $-35<\mu<15$. (Μονάδες 07)
ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 04)
iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ. (Μονάδες 09)

20091. Τα σημεία Α(-7, -1) και Β(3, -5) είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου Κ. Το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ.
α) Να βρείτε:
i. Τις συντεταγμένες του σημείου Μ. (Μονάδες 04)
ii. Την εξίσωση της ευθείας ΚΜ. (Μονάδες 08)
β) Αν από το κέντρο Κ του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): $x+y=-12$, τότε:
i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Κ. (Μονάδες 07)
ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 06)

20229. Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2-(\lambda+8)x+\lambda y+7=0$ (1), με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. (Μονάδες 6)
β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. (Μονάδες 7)
γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν. (Μονάδες 7)
δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για λ= 0. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

21154. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\alpha x-4\alpha y=0$ (1) όπου α είναι πραγματικός αριθμός.
α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 8)
β) Να προσδιορίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α. (Μονάδες 6)
γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος (α). (Μονάδες 5)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα x΄x. (Μονάδες 6)

21276. Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή γ_1, κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: Α (λ-1, 2λ+1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- τη γραμμή γ_2, που περνάει από το σταθμό Σ (- 4, 2) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1,3)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2. (Μονάδες 10)

β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο Κ(1, 1) του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2. Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (Μονάδες 9)

γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1. (Μονάδες 6)

21349. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο Ο θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ε) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0 \ (1)$ και $4x + 3y - 10 = 0 \ (2)$ αντίστοιχα.

α) i. Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα R του κύκλου (C). (Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία. (Μονάδες 4)

iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία Α και Β στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C). (Μονάδες 5)

β) Αν είναι Α(1,2) και Β(4, −2), τότε:

iv. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$. (Μονάδες 5)

v. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ διέρχεται από το σημείο Ο. (Μονάδες 6)

22264. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0 \ (1), \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας ε: $x + y + 2 = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Για λ = 1, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 9)

Παραβολή

2ο Θέμα

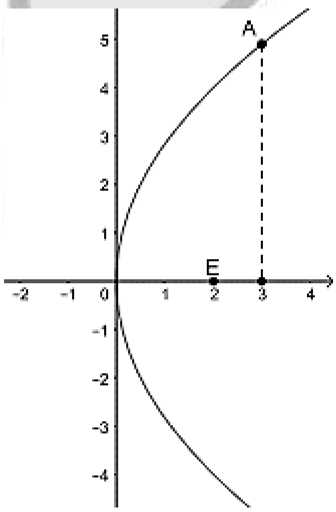
18242. Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C. (Μονάδες 8)
β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της Μ(4,4). (Μονάδες 8)
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C, τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε). (Μονάδες 9)

20235. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $\left(\frac{1}{8},1\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε: 8x – 2y + 3 = 0. (Μονάδες 15)

21306. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x, κορυφή O(0,0) και εστία Ε(2,0), όπως στο διπλανό σχήμα. Το σημείο Α της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy.



α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A\left(3, 2\sqrt{6}\right)$. (Μονάδες 10)
β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της. (Μονάδες 06)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο Α. (Μονάδες 09)

21307. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο Ε (0,3) και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία Α(6,3) και Β(- 6,3), αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)
γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2). (Μονάδες 05)

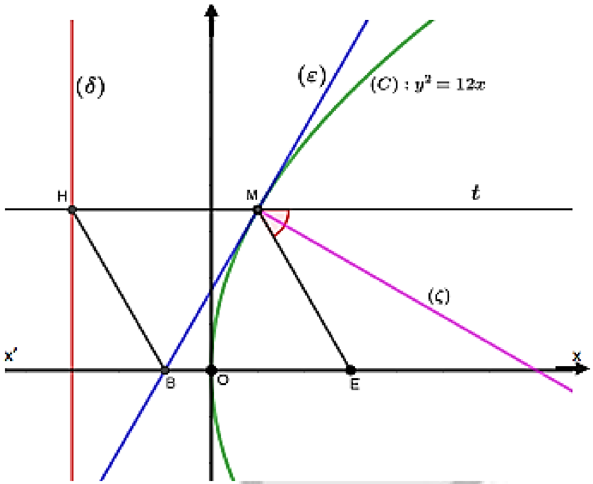
22190. Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση $y^2 = x \ (1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε και την εξίσωση της διευθετούσας (δ). (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Α(1,-1) είναι σημείο της παραβολής. (Μονάδες 05)
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της Α(1,-1). (Μονάδες 08)

22267. Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x \ (1)$.

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ………………….. Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες Ε(….., …..) και η διευθετούσα έχει εξίσωση …………». (Μονάδες 09)
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο Α(1, -2). (Μονάδες 08)
γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x’x είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής. (Μονάδες 08)

15394. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 12x$ με εστία Ε και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M\left(1, 2\sqrt{3}\right)$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β. Από το σημείο Μ φέρνουμε ημιευθεία Mt παράλληλη προς τον άξονα x΄x, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο Η.



α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β, Η, Ε. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΕΒΗ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $\hat{EMt}$. (Μονάδες 6)

18372. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Α(-2,- 2), Β(0,- 4) και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 09)

β) Να βρείτε το σημείο Μ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ΑΒ. (Μονάδες 08)

γ) Αν Μ(1,-2) και Κ είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 08)

20092. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση $\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$.

α) i. Να δείξετε ότι h ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ από την ε. (Μονάδες 07)

ii. Αν η ευθεία ε τέμνει του άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι (ΜΓΔ) = 5 τ.μ. (Μονάδες 05)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθεία ζ της παραβολής με η παράλληλή στην ε. (Μονάδες 08)

ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών η και ε; (Μονάδες 05)

22275. Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της Ε και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 2) και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

21152.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$.

iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα η $\vec{\eta} = (A, B)$.

iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο Ε(1,0).

v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$. (Μονάδες 15)

Έλλειψη

2ο Θέμα

20883. Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $C:16x^2+25y^2=400$.

α) Να βρείτε τα μήκη ΒΒ΄, ΑΑ΄ του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της Ε και Ε΄. (Μονάδες 12)

β) Αν Ε΄(-3,0) και Ε(3,0), να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο Ε΄ και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το Ε και είναι παράλληλη στον άξονα y΄y. (Μονάδες 13)

21308. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης και την απόστασή τους. (Μονάδες 09)

β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης. (Μονάδες 08)

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της Β(0,4). (Μονάδες 08)

22192. Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1\ (1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β(0,9) είναι σημείο της έλλειψης. (Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της Β(0,9). (Μονάδες 10)

22268. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\ (1)$.

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται ……………….. Οι εστίες της Ε και Ε΄ , έχουν συντεταγμένες Ε(….., …..) και Ε΄(….., …..) .
Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με ….. και η εκκεντρότητα της είναι ίση με ………».
(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της Β(0,-2). (Μονάδες 10)

4ο Θέμα

22273. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\ (1)$.

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

ii. Των εστιών Ε και Ε' της έλλειψης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

Υπερβολή

2ο Θέμα

16128. Δίνεται η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε΄ και Ε. (Μονάδες 10)

β) Αν το Ν είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $\left|(NE')-(NE)\right|$. (Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C). (Μονάδες 10)

22196. Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2-y^2=25\ (1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄. (Μονάδες 10)
β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2) της υπερβολής. (Μονάδες 10)
γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ε_1), (ε_2); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

22269. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4}-y^2=1\ (1)$.

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :
i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.
ii. Την εκκεντρότητά της.
iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A\left(\sqrt{5},\frac{1}{2}\right)$.
(Μονάδες 10)

3ο Θέμα

17944. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής (C): $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, εστιακή απόσταση $EE'=2\sqrt{7}$ και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2,\ \beta=\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)
β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Α ' της υπερβολής (C).
ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C). (Μονάδες 8)
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της. (Μονάδες 9)

1ο Θέμα

21973. α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}|=\lambda|\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.
ii. Η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του Α (x_1, y_1), έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.
iii. Η διευθετούσα της παραβολής $y^2=2px$, έχει εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$.
iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.
v. Η εξίσωση: $x^2+y^2=\alpha^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.
(Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(x_0, y_0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y-y_0=\lambda(x-x_0)$. (Μονάδες 15)