

ΘΕΜΑ Α

- A1. Ιδιότητα u σελ 65 Σχολ
A2. Ορισμός σελ 87 Σχολ
A3. Ορισμός σελ 27 Σχολ
A4.
α". Λάθος
β". Σωστό
γ". Σωστό
δ". Λάθος
ε". Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x - 3 \implies f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

B2. Για τη μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων, βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_1 = 3 \quad \text{και} \quad x_2 = -1$$

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

- Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$.
- Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[-1, 3]$.

Ακρότατα:

- Παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση $x = -1$ με τιμή:

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{8}{3}$$

- Παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση $x = 3$ με τιμή:

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 3(3) + 1 = 9 - 9 - 9 + 1 = -8$$

B3. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Υπολογίζουμε τις τιμές:

- $f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - 0^2 - 3(0) + 1 = 1$
- $f'(0) = 0^2 - 2(0) - 3 = -3$

Συνεπώς: $y - 1 = -3x \implies y = -3x + 1$.

B4. Ζητείται το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} \quad \left[\text{Μορφή } \frac{0}{0} \right]$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή (με ρίζες το -1 και το 3):

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -1 - 3 = -4$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \bar{X} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 t_i \Leftrightarrow 4 = \frac{4+5+4+k+0+3+7}{7} \Leftrightarrow 23+k=28 \Leftrightarrow k=5$$

$\Gamma 2.$ Το δείγμα μεγέθους 7 (περιττός) σε αύξουσα διάταξη είναι: 0, 3, 4, 4, 5, 5, 7

Άρα η διάμεσος είναι $\delta = t_4 = 4$

$\Gamma 4.$

$$s^2 = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{X})^2 = \frac{(4-0)^2 + (4-3)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (4-5)^2 + (4-5)^2 + (4-7)^2}{7} = \\ = \frac{16+1+0+0+1+1+9}{7} = 4$$

$$\Gamma 5. CV = \frac{s}{|\bar{X}|} = \frac{2}{4} = 0.5 \quad \text{Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές αφού } CV > 0.1.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \text{ Το εμβαδόν είναι } E = xy \Leftrightarrow 100 = xy \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$$

$$\text{Η περίμετρος είναι } \Pi = 2x + 2y = 2x + 2\frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x} \quad x > 0.$$

$\Delta 2.$

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x} \quad x > 0$$

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}, \quad \Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 10 \quad \text{άρα } x = 10$$

$$\Pi'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 100 \Leftrightarrow |x| > 10 \Leftrightarrow x > 10$$

Άρα η Π είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 10]$ και γνησίως αύξουσα στο $[10, +\infty)$.

Έτσι παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x=10$. Τότε $y=100/10=10$ άρα τετράγωνο.

$\Delta 3.$

Στο $(0, 10)$ η Π είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$$\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$$

$$x_1 - x_2 < 0, \quad \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$$

$$\text{Άρα } A < 0$$

Δ4. Ζητείται το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\frac{2(x^2-100)}{x^2}}{\sqrt{10x} - 10} = \lim_{x \rightarrow 10} \left[\frac{2(x-10)(x+10)}{x^2 \cdot (\sqrt{10x} - 10)} \right]$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση $(\sqrt{10x} + 10)$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 10} \left[\frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2 \cdot (10x - 100)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \left[\frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2 \cdot (x-10)} \right] \end{aligned}$$

Απλοποιούμε τον παράγοντα $(x-10)$:

$$= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2} = \frac{2(10+10)(\sqrt{100} + 10)}{10 \cdot 10^2} = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5} = 0,8$$