

# ΘΕΜΑ Α

[A1] σελ. 30 σχολικό βιβλίο

[A2] σελ. 22 σχολικό βιβλίο

[A3] α)  $\Lambda$

β)  $\Sigma$

γ)  $\Sigma$

δ)  $\Lambda$

ε)  $\Sigma$

# ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + 10, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } a \in \mathbb{R}$$

**B1** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη ως πολυώνυμο 3ου βαθμού, στο  $\mathbb{R}$ , με:

$$f'(x) = (2x^3 + ax^2 - 12x + 10)' = 6x^2 + 2ax - 12, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**B2** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $x_0 = 1$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ , συνεπώς:

$$\begin{aligned} f'(1) = 0 &\Rightarrow 6 \cdot 1^2 + 2 \cdot a \cdot 1 - 12 = 0 \Rightarrow 6 + 2a - 12 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2a - 6 = 0 \Rightarrow \frac{2a}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow \boxed{a = 3} \end{aligned}$$

**B3** Για  $a = 3$ , η  $f$  γίνεται:  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10, \quad x \in \mathbb{R}$ , και η  $f'$ :

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \frac{6 \cdot (x^2 + x - 2)}{6} = 0 \\ &\Rightarrow \underline{x^2 + x - 2 = 0} \end{aligned}$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \text{ και } \underline{f'(x) = 6 \cdot (x+2) \cdot (x-1)} \quad (*)$$

| x       | $-\infty$                                                                           | -2                                                                                  | 1                                                                                   | $+\infty$ |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $f'(x)$ | +                                                                                   | 0                                                                                   | 0                                                                                   | +         |
| $f(x)$  |  |  |  |           |

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-2, 1)$

Η  $f$  παραβιάζει τοπικό μέγιστο, στο  $x_1 = -2$ , το:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 10 = \\ &= 2(-8) + 3 \cdot 4 + 24 + 10 = \\ &= -16 + 12 + 24 + 10 = \\ &= -4 + 34 = 30 \end{aligned}$$

Η  $f$  παραβιάζει ~~το~~ τοπικό ελάχιστο, στο  $x_2 = 1$ , το:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 10 = \\ &= 2 + 3 - 12 + 10 = \\ &= 5 - 2 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{B4} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 \cdot (x+2)}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} [6 \cdot (x+2)] = \\ &= 6 \cdot (1+2) = 6 \cdot 3 = 18. \end{aligned}$$

# ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Σύμφωνα με τον πίνακα που μας δίνεται, έχουμε:

$$x_3 = \frac{20+16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$x_4 = \frac{24+20}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

$$x_3 \cdot v_3 = 18 \cdot v_3 \quad \text{και} \quad x_4 \cdot v_4 = 22 \cdot 5 = 110$$

Επίσης,  $\bar{x} = 14$ , συνεπώς:

$$\bar{x} = 14 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i}{v} = 14 \Rightarrow \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = 14$$

$$\Rightarrow \frac{200 + 210 + 18 \cdot v_3 + 110}{40 + v_3} = 14 \Rightarrow 520 + 18 \cdot v_3 = 14 \cdot (40 + v_3)$$

$$\Rightarrow 520 + 18v_3 = 560 + 14v_3 \Rightarrow 18v_3 - 14v_3 = 560 - 520$$

$$\Rightarrow \frac{4 \cdot v_3}{4} = \frac{40}{4} \Rightarrow \boxed{v_3 = 10}$$

Επομένως,  $x_3 \cdot v_3 = 180$  και  $v = 50$ .

| Κλάσεις<br>[ , ) | Κεντρική τιμή<br>$x_i$ | Συχνότητα<br>$v_i$ | $x_i \cdot v_i$ |
|------------------|------------------------|--------------------|-----------------|
| [8, 12)          | 10                     | 20                 | 200             |
| [12, 16)         | 14                     | 15                 | 210             |
| [16, 20)         | 18                     | 10                 | 180             |
| [20, 22]         | 22                     | 5                  | 110             |
| ///              | Σύνολο                 | 50                 | 700             |

Γ3

$$\begin{aligned} S^2 &= \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot v_i}{V} - (\bar{x})^2 = \\ &= \frac{100 \cdot 20 + 196 \cdot 15 + 324 \cdot 10 + 484 \cdot 5}{50} - 14^2 = \\ &= \frac{2000 + 2940 + 3240 + 2420}{50} - 196 = \\ &= \frac{10600}{50} - 196 = 212 - 196 = 16 \end{aligned}$$

Γ4.  $CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{S^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{16}}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \approx 0,29$  ή  $29\% > 10\%$ ,  
άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

# ΘΕΜΑ Δ

**Δ1** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = A_f$ ,  $f \in \mathcal{C}^1$

$$f'(x) = \left( \frac{-1}{x^2} \right)' = \frac{\overbrace{(-1)'}^0 \cdot x^2 - (-1) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2 \cdot x}{x^4} = \frac{2}{x^3}, \quad x \neq 0.$$

$$\bullet f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$\bullet f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} < 0 \Rightarrow x^3 < 0 \Rightarrow x < 0$$

Συνεπώς, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0)$ .

**Δ2** Παρατηρώ πως :

$$\bullet f(-4) = \frac{-1}{(-4)^2} = \frac{-1}{16}$$

$$\bullet f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\bullet -4, -1 \in (-\infty, 0) \text{ και } f \downarrow \text{ στο } (-\infty, 0).$$

} (\*)

Από την (\*), προκύπτει:

$$-4 \leq x \leq -1 \Rightarrow f(-4) \leq f(x) \leq f(-1) \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq \frac{-1}{16}$$

**Δ3** Για  $x=1$ , η  $f$  γίνεται:  $f(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$ .

Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο σημείο  $M(1, f(1))$  είναι της μορφής:  $(\varepsilon): y = \lambda x + \theta$ , με  $\lambda = f'(1) = \frac{2}{1^3} = \frac{2}{1} = 2$ , άρα:

$$y = 2 \cdot x + \theta.$$

Όπως  $M(1, -1) \in (\varepsilon)$ , άρα:  $-1 = 2 \cdot 1 + \theta \Rightarrow \theta = -1 - 2 \Rightarrow \boxed{\theta = -3}$

Τελικά, (ε):  $y = 2x - 3$ .

Δ4 με βάση το Δ3, έχουμε:

$$y_i = 2 \cdot x_i - 3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Επομένως:  $\bar{y} = 2 \cdot \bar{x} - 3$  και  $S_y = 121 \cdot S_x$

$$\bar{y} = 2 \cdot 4 - 3$$

$$S_y = 2 \cdot 2$$

$$\bar{y} = 8 - 3$$

$$S_y = 4$$

$$\bar{y} = 5$$

$$CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ ή } 80\% > 10\% .$$