

[A3] α) n

β) n

γ) 2

δ) 2

[A1] σελ. 65 σχολικών

$$[A2] \quad \bar{x} = \frac{x_1 w_1 + \dots + x_v w_v}{w_1 + \dots + w_v} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i w_i}{\sum_{i=1}^v w_i}$$

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[B1] Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυώνυμο 3ου βαθμού, με:

$$f'(x) = x^2 - 6x + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[B2] • $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		Τ.Κ.	Τ.Κ.	

• $f \nearrow (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$

• $f \searrow (1, 5)$

• Η f παρουσιάζει, στο $x_0 = 5$, τοπικό

ελάχιστο, εο $f(5) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + \frac{1}{3} =$
 $= \frac{125}{3} - \frac{75}{1} + \frac{25}{1} + \frac{1}{3} = \frac{125 - 225 + 75 + 1}{3} =$
 $= \frac{-24}{3} = -8.$

• Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, στο $x_0=1$, το $f(1)$, ή:

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - 3 + 5 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

B3 • Το αντίστοιχο με ζητούμενο $x_0=0$, ως f , είναι το:

$$f(0) = \frac{1}{3} \quad \text{και, άρα, } (0, \frac{1}{3}).$$

• $f'(0) = 5$.

• Έστω $(\varepsilon)y = f'(0) \cdot x + b$ - εξίσωση της εφαπτομένης
ως C_f στο $(0, \frac{1}{3})$. Τότε:

$$(0, \frac{1}{3}) \in (\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{3} = 5 \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{3}}$$

• Άρα, $\boxed{y = 5 \cdot x + \frac{1}{3}}$

B4 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = (-1)^2 - 6(-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12.$

ΘΕΜΑ Γ

$$\boxed{\Gamma 1} \quad S = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$$

$$\underline{x^2 + 6x - 7 = 0}$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 8}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

$$\text{Άρα, } x^2 + 6x - 7 = (x-1) \cdot (x+7) \quad (*)$$

$$\bullet S \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+7)}{2 \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+7}{2} \right) = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 4}$$

$\boxed{\Gamma 2}$

$$CV = 20\% = \frac{20}{100} = 0,2 \Rightarrow CV = 0,2 \Rightarrow \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{2}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{|\bar{x}|} = \frac{2}{10} \Rightarrow |\bar{x}| \cdot \frac{2}{2} = \frac{40}{2} \Rightarrow |\bar{x}| = 20 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 20 \\ \bar{x} = -20 \end{cases}$$

Επειδή όλες οι παρατηρήσεις είναι θετικοί αριθμοί, θα ισχύει ότι και το άρροισμά τους θα είναι θετικός αριθμός. Επομένως, $\boxed{\bar{x} = 20}$.

Γ3

$$\bar{x} = \frac{22+18+20+K+14+16}{5} \Rightarrow 5 \cdot 20 = 90 + K$$

$$\Rightarrow 90 + K = 100 \Rightarrow \boxed{K=10}$$

Γ4

Έστω y_i , $i=1, \dots, 5$ οι νέες τιμές, τότε:

$$y_i = 1,1 \cdot x_i \text{ και } \begin{cases} s' = 1,1 \cdot s = 1,1 \cdot 5 = 4,4 \\ \bar{y} = 1,1 \cdot \bar{x} = 22. \end{cases}$$

$$CV' = \frac{\frac{1,1 \cdot s}{1,1 \cdot |\bar{x}|}}{\frac{s}{|\bar{x}|}} = CV = 20\%.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Το $\triangle OAB$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο, συνεπώς από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow 10^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 100 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{100 - x^2}$$

$\xrightarrow[\text{πλευράς}]{y \text{ μήκος}}$ $y = \sqrt{100 - x^2}$

Πρέπει $x > 0$ και $x < 10$.

Πράγματι:

$$100 - x^2 > 0 \Rightarrow 10^2 - x^2 > 0 \Rightarrow (10 - x) \cdot (10 + x) > 0$$

x	$-\infty$	-10	10	$+\infty$	
$10-x$	+	+	0	-	
$10+x$	-	0	+	+	
$100-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα, $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$,
 $A_f = (0, 10)$

Δ2 Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x) = (\sqrt{100 - x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot (100 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(8) = \frac{-8}{\sqrt{100 - 64}} = \frac{-8}{\sqrt{36}} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$

(D3)

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - 8}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{100 - x^2} - 8}{x - 6} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{100 - x^2} - 8) \cdot (\sqrt{100 - x^2} + 8)}{(x - 6) \cdot (\sqrt{100 - x^2} + 8)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{100 - x^2})^2 - 8^2}{(x - 6) \cdot (\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{100 - x^2 - 64}{(x - 6) \cdot (\sqrt{100 - x^2} + 8)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{36 - x^2}{(x - 6) \cdot (\sqrt{100 - x^2} + 8)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(6 - x) \cdot (6 + x)}{(x - 6) \cdot (\sqrt{100 - x^2} + 8)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-\cancel{(x - 6)} \cdot (x + 6)}{(\cancel{x - 6}) \cdot (\sqrt{100 - x^2} + 8)} = - \frac{6 + 6}{\sqrt{100 - 6^2} + 8} = - \frac{12}{8 + 8} =$$

$$= - \frac{12}{16} = - \frac{3}{4}.$$

(D4) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}, x \in (0, 10).$

$$\rightarrow \sqrt{100 - x^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in (0, 10)$$

$$\rightarrow x > 0 \Rightarrow -x < 0.$$

Συνεπώς, $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} < 0$, για κάθε $x \in (0, 10)$, άρα $f \downarrow (0, 10)$.

Ισχύει: $x_1 < x_3 < x_2 \xrightarrow{f \downarrow} f(x_1) > f(x_3) > f(x_2).$