



ε κ π α ί δ ε υ σ η
ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Σάββατο 8 Ιουνίου 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΕΠΑ.Λ.

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελ. 28 σχολικό βιβλίο

A2. Ορισμοί σελ. 59 σχολικό βιβλίο

A3. α→Λάθος

β→Σωστό

γ→Λάθος

δ→Λάθος

ε→Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$B1. \quad CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow \frac{s}{CV} = \frac{\sqrt{s^2}}{CV} = \frac{\sqrt{4}}{0,2} = \frac{2}{0,2} \Leftrightarrow \bar{x} = 10$$

$$B2. \quad \bar{x} = \frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} = 10 \Leftrightarrow \frac{52+\kappa}{6} = 10 \Leftrightarrow 52+\kappa = 60 \Leftrightarrow \kappa = 8$$

B3. Οι τιμές σε αύξουσα σειρά: 7, 8, 10, 11, 11, 13

$n=6$ (άρτιος) Μεσαίες παρατηρήσεις: $3^{\eta} \rightarrow 10$ και $4^{\eta} \rightarrow 11$

$$\delta = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$$

$$R = t_{\text{MAX}} - t_{\text{MIN}} = 13 - 7 = 6$$

$$B4. \quad x_i' = x_i - 2 \quad \text{Άρα: } \bar{x}' = \bar{x} - 2 \quad \text{και } s' = s$$

$$\text{Επομένως: } CV' = \frac{s'}{\bar{x}'} = \frac{s}{\bar{x} - 2} = \frac{2}{10 - 2} = \frac{2}{8} = 0,25 \text{ ή } 25\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, γιατί $CV > 10\%$.

ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned}\Gamma 1. \quad f'(x) &= \left(\sqrt{x^2 - 2x + 10} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} \cdot (x^2 - 2x + 10)' = \\ &= \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{2(x - 1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}.\end{aligned}$$

$$\Gamma 2. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)		○	
f(x)			

T.E.

$$\text{T.E.} \rightarrow f(1) = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 10} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Από ορισμό T.E. } f(x) \geq \text{T.E.} \Rightarrow f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 3.$$

Γ3. Εξίσωση εφαπτομένης: $y = \lambda x + \beta$

$$\lambda = f'(5) = \frac{5 - 1}{\sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 10}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

$$y = f(5) = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 10} = \sqrt{25} = 5$$

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow 5 = \frac{4}{5} \cdot 5 + \beta \Leftrightarrow 5 - 4 = \beta \Leftrightarrow \beta = 1$$

$$\text{Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η: } y = \frac{4}{5} \cdot x + 1$$

Γ4. Σημείο A (σημείο τομής με τον άξονα x'x) $\rightarrow y = 0$

$$y = \frac{4}{5} \cdot x + 1 \xRightarrow{y=0} 0 = \frac{4}{5} \cdot x + 1 \Leftrightarrow -\frac{4}{5} \cdot x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Άρα το σημείο A είναι το: } A\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$$

Σημείο B (σημείο τομής με τον άξονα y'y) $\rightarrow x = 0$

$$y = \frac{4}{5} \cdot x + 1 \xRightarrow{x=0} y = \frac{4}{5} \cdot 0 + 1 \Leftrightarrow y = 1$$

$$\text{Άρα το σημείο B είναι το: } B(0, 1)$$

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για $\lambda = 3$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

$$f'(x) = (x^3)' - (3x^2)' + (3x)' = 3x^2 - 6x + 3.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	+
$f(x)$			

Οι τιμές $x_1 = \frac{3}{8}$ και $x_2 = \frac{5}{6}$, ανήκουν στο διάστημα $(-\infty, 1]$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.

$$\text{Άρα } \frac{3}{8} < \frac{5}{6} \xrightarrow{f \text{ γν. αύξουσα}} f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right).$$

Α2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-6x+3}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2-2x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x^2-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{\left[(\sqrt{x})^2-1^2\right] \cdot x(x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(x-1) \cdot x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{x} = \frac{3(\sqrt{1}+1)}{1} = 3 \cdot 2 = 6$$

Α3. Ελάχιστος συντελεστής διεύθυνσης. Άρα μελέτη ως προς τα ακρότατα της παραγώγου της f .

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad (f'(x))' = f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+
$f'(x)$			

T.E.

Για $x = 1$ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f γίνεται ελάχιστος.

$$y = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \Leftrightarrow y = 1.$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το: $(1, 1)$.

Δ4. Για να μην παρουσιάζει η f ακρότατα θα πρέπει η $f'(x)$ να μην αλλάζει πρόσημο.

Επειδή η $f'(x)$ είναι δευτεροβάθμια παράσταση, θα πρέπει η εξίσωση $f'(x) = 0$ να έχει διακρίνουσα $\Delta \leq 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda = 0$$

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \lambda \leq 0 \Leftrightarrow 36 - 12\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \frac{36}{12} \leq \lambda \Leftrightarrow \lambda \geq 3$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του λ για να μην έχει ακρότατα η f είναι $\lambda = 3$.