



ΘΕΜΑ Α

A1. Όταν για κάθε x_0 που ανήκει στο A ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

A2. α. Λ

B. Σ

Γ. Λ

A3. α. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

β. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$

γ. $(\sin x)' = \cos x$

A4. Για κάθε x_0 εσωτερικό του R είναι f συνεχής ως πολυωνυμική άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 = f'(x_0)$$

$f(x) = x^2$
συνεχής

ΘΕΜΑ Β

B1.

X_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0	20	40	20	40
1	15	30	35	70
2	10	20	45	90
3	5	10	50	100
Σύνολο	50	100		

$$F_1 = 0,4 \text{ δηλ } f_1\% = 40 \text{ άρα } F_1 = 40$$

$$F_2\% = F_1\% + F_3\% \Leftrightarrow F_2\% = 70 - 40 = 30\%$$

$$F_1\% + F_2\% + F_3\% + F_4\% = 100 \Leftrightarrow F_3\% = 20$$

$$\text{Άρα } f_1 = 0,4, f_2 = 0,3, f_3 = 0,2$$

$$v_3 = 10 \text{ άρα } f_3 = v_3/v \Leftrightarrow v = 50, f_1 = v_1/v \Leftrightarrow v_1 = 20, f_2 = v_2/v \Leftrightarrow v_2 = 15$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v \Leftrightarrow v_4 = 5$$

$$N_1 = v_1, N_2 = N_1 + v_2, N_3 = N_2 + v_3, N_4 = v$$

B2. 20%

B3. $f_2\% + f_3\% + f_4\% = 60\%$

B4. 90%

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2, x \in \mathbb{R}$

Για να ανήκει το σημείο $A(-1, -2)$ στην γραφική παράσταση της f πρέπει να ισχύει $f(-1) = -2 \Leftrightarrow (-1)^3 - \lambda(-1)^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow -1 - \lambda + 2 = -2 \Leftrightarrow \lambda = 2 - 1 + 2 = 4 - 1 = 3$ (1)

Άρα για $\lambda = 3$ από (1) είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, x \in \mathbb{R}$

Γ2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x, x \in \mathbb{R}$

Η f' συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6, x \in \mathbb{R}$



Γ3.

X	$-\infty$	$\frac{2-3\sqrt{2}}{2}$	0	1	2	$\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f		0	+	+	0	-	+
f'		+	0	-	0	+	+
f''		-	-	0	+	+	+

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$

>> γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2)$

>> γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=0$ με $f(0)=2$

>> τοπικό ελάχιστο στο $x=2$ με $f(2)=-2$

$$\Gamma 4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}$$

$$\Delta 1. f'(x) = [(x^2 + 4x + 5)^{20}]' = 20 \cdot (x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x^2 + 4x + 5)' = 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (2x + 4) = 20(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot 2(x + 2) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2)$$

$\Delta 2.$ Είναι f πολυωνυμική άρα συνεχής και παραγωγίσιμη στο R.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \stackrel{y=h-2}{=} \lim_{\substack{h=y+2 \\ y \rightarrow -2}} \frac{f(y) - f(-2)}{y - (-2)} \stackrel{f \text{ παρ/μη}}{=} f'(-2) \quad (1)$$

$$\text{Η f παραγωγίσιμη με } f'(x) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2) = 40(4 - 8 + 5)^{19} \cdot (-2 + 2) = 0$$

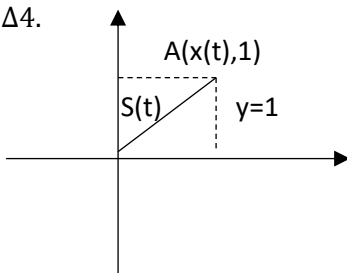
$$\text{Άρα η (1) γίνεται } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = f'(-2) = 0$$

$\Delta 3.$ Έστω $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ μία εφαπτομένη της f στο τυχαίο σημείο x_0 . Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στο άξονα x'x πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης να ισούται με 0 δηλαδή $f'(x_0) = 0$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \\ x^2 + 4x + 5 = 0, \Delta = 16 - 20 = -4 < 0, \text{ αδύνατη} \end{cases} \text{ άρα μοναδική λύση για } x_0 = -2$$

$$\text{άρα } (\varepsilon): y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \Leftrightarrow y - 1 = 0(x + 2) \Leftrightarrow y = 1$$

$\Delta 4.$



Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $s(t)^2 = x(t)^2 + 1^2 \Leftrightarrow s(t) = \sqrt{x(t)^2 + 1}$

$$S'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x(t)^2 + 1}} \cdot (x(t)^2 + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x(t)^2 + 1}} \cdot 2x(t)$$

$$\text{Για } x(t)=1 \text{ είναι } s'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+1}} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ μονάδες μήκους/χρόνου}$$