

ΘΕΜΑ Α**A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 28-29**A2.** Σχολικό βιβλίο σελ. 87**A3. α.** Λάθος (σχολικό σελ. 96)**β.** Σωστό (σχολικό σελ. 40)**γ.** Λάθος (σχολικό σελ. 86-87)

A4. α. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x \neq 0$

β. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β**B1**

Είναι $\bar{x} = \frac{25+10+5+20+15}{5} = 15$

και $R = \max - \min = 25 - 5 = 20$

B2

Έχουμε

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(25-15)^2 + (10-15)^2 + (5-15)^2 + (20-15)^2 + (15-15)^2}{5} = \\ &= \frac{10^2 + 0^2 + (-5)^2 + 10^2 + 5^2}{5} = \\ &= \frac{100 + 25 + 100 + 25}{5} = \frac{250}{5} = 50 \end{aligned}$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

B3

$$\text{Είναι } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,47 = 47\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ Γ**Γ1**

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 18x + \alpha$

Από την υπόθεση δίνεται

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -15 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15$$

Γ2

Η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ και παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

$$\text{Έχουμε } f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 1 = 8 - 36 + 30 + 1 = 3$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 15 = 12 - 36 + 15 = -9$$

Η εφαπτομένη έχει τη μορφή $y = \lambda \cdot x + \beta$ με $\lambda = f'(2)$.

δηλαδή έχουμε την ευθεία $y = -9x + \beta$

Το σημείο $M(2, f(2)) = M(2, 3)$ ανήκει στην ευθεία, επομένως οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν.

Αντικαθιστούμε $x = 2$ και $y = f(2) = 3$ και προκύπτει

$$3 = -9 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 3 = -18 + \beta \Leftrightarrow \beta = 21$$

Γ3

$$\text{Η παράγωγος μηδενίζεται αν } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 6x + 5) = 0$$

που έχει λύσεις $x_1 = 1$ και $x_2 = 5$

Η μονοτονία της συνάρτησης φαίνεται στον παρακάτω πίνακα



	$-\infty$	1	5	$+\infty$
f'	+	○	○	+
f	↗	↘	↗	

Επομένως

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[5, +\infty)$

και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 5]$

Στο $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 1 = 8$

Στο $x = 5$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 1 = 125 - 225 + 75 + 1 = -24$

Γ4

Έχουμε διαδοχικά

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 18x + 15}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-5)}{x+1} = \frac{3 \cdot (1-5)}{1+1} = -6$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Η f έχει νόημα αν ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν.

Ο παρονομαστής μηδενίζεται αν $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot (x+1) - (x+1)' \cdot x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Δ2

Είναι $f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}$ και

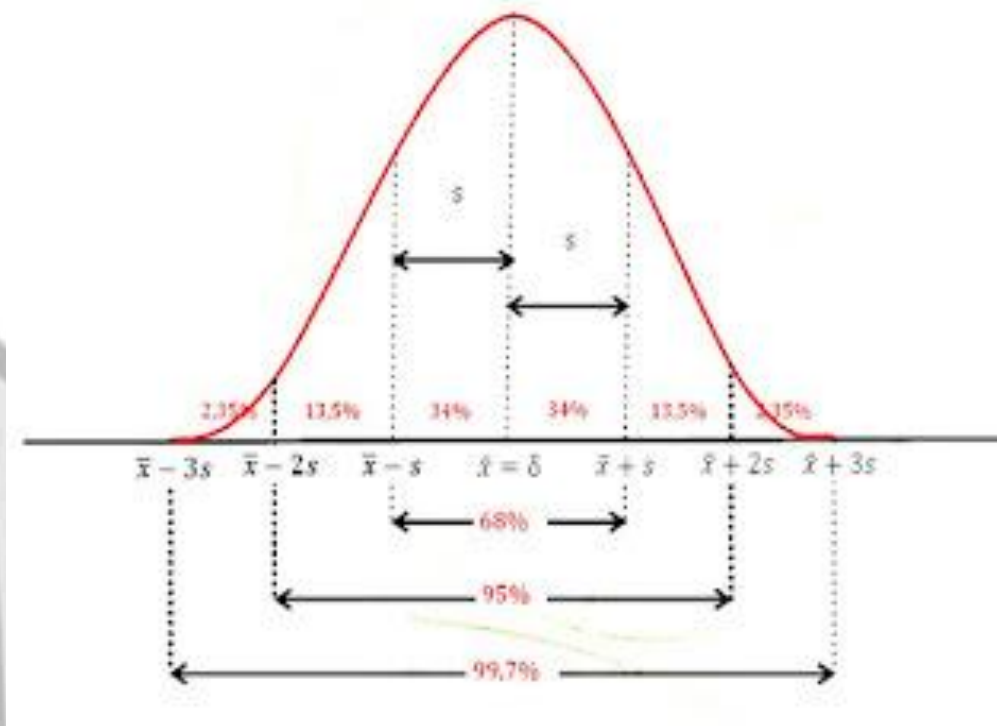
$$f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Επομένως

$$\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9 \text{ και}$$

$$s = \frac{1}{2 \cdot f'(1)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Δ3



Έχουμε ότι

$$\bar{x} - s = 9 - 2 = 7$$

$$\bar{x} - 2s = 9 - 4 = 5$$

$$\bar{x} - 3s = 9 - 6 = 3$$

$$\bar{x} + s = 9 + 2 = 11$$

$$\bar{x} + 2s = 9 + 4 = 13$$

$$\bar{x} + 3s = 9 + 6 = 15$$

Σύμφωνα με τους τύπους της κανονικής κατανομής

από $\bar{x} - s$ μέχρι $\bar{x} + s$ υπάρχει το 68% των μαθητών

Από $\bar{x} - 2s$ μέχρι $\bar{x} - s$ υπάρχει το 13,5% των μαθητών.

Συνολικά δηλαδή από 5 μέχρι 11 έχουμε το 81,5% των μαθητών, δηλαδή

$$\frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 81,5 \cdot 20 = 1630 \text{ μαθητές}$$

Πάνω από $15 = \bar{x} + 3s$ υπάρχει το 0,15% των μαθητών, δηλαδή



$$\frac{0,15}{100} \cdot 2000 = 0,15 \cdot 20 = 3 \text{ μαθητές}$$

Δ4

$$\bar{y} = \bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12 \text{ λεπτά}$$

$$S_y = S_x = 2 \text{ λεπτά}$$

