

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 105

Αν x_0 ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \quad \text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

Επομένως $(c)' = 0$.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 74

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και, επιπλέον, ισχύει

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$,

δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, b) .

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 162

Οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ λέγεται η ευθεία $y = \ell$,

αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

A4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Λάθος



ΘΕΜΑ Β

Β1. 1^{ος} τρόπος

$$f'(x) = \left(4 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0, \quad x > 0,$$

άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$,

άρα η f είναι 1-1,

άρα **η f είναι αντιστρέψιμη**.

2^{ος} τρόπος

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{x_1} = 4 - \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} = -\frac{1}{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

άρα η f είναι 1-1,

άρα **η f είναι αντιστρέψιμη**.

3^{ος} τρόπος

$$x_1 > x_2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} > -\frac{1}{x_2} \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{x_1} > 4 - \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$,

άρα η f είναι 1-1,

άρα **η f είναι αντιστρέψιμη**.

4^{ος} τρόπος

Για $x_1, x_2 > 0$ έχουμε :

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} \neq -\frac{1}{x_2} \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{x_1} \neq 4 - \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

άρα η f είναι 1-1,

άρα **η f είναι αντιστρέψιμη**.

Εύρεση της αντίστροφης της f

1^{ος} τρόπος [γνωρίζοντας ότι η f είναι $\uparrow$ στο $A = (0, +\infty)$]

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f που είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(4 - \frac{1}{x} \right) = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{x} \right) = 4, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$D_{f^{-1}} = f(A) = (-\infty, 4)$$

Για $x > 0$ και $y < 4$ έχουμε :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 4 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 4 - y \Leftrightarrow x = \frac{1}{4 - y}, y < 4,$$

$$\text{επομένως } f^{-1}(x) = \frac{1}{4 - x}, x < 4.$$

2^{ος} τρόπος (χωρίς να γνωρίζουμε τη μονοτονία της f)

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 4 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 4 - y \Leftrightarrow x = \frac{1}{4 - y}$$

Πρέπει	$\begin{cases} 4 - y \neq 0 \\ x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 4 \\ \frac{1}{4 - y} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 4 \\ 4 - y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 4 \\ y < 4 \end{cases} \Leftrightarrow y < 4$
--------	---

$$\text{Επομένως } f^{-1}(x) = \frac{1}{4 - x}, x < 4.$$

B2. i) $D_g = D_f \cap D_{f^{-1}} = (0, +\infty) \cap (-\infty, 4) = (0, 4)$

$$g(x) = (f + f^{-1})(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x) + f^{-1}(x) \Leftrightarrow$$

$$g(x) = 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}, x \in (0, 4)$$

ii) • Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(4 + \frac{1}{4-x}\right) = \frac{17}{4}$,

άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$,

επομένως η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ ($y' y$).

• Είναι $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{4-x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(4 - \frac{1}{x}\right) = \frac{15}{4}$,

άρα $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = +\infty$,

επομένως η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 4$.

• Δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες, αφού $D_g = (0, 4)$.

B3. Για κάθε $x \in (0, 4)$:

$$g'(x) = \left(4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right)' = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(4-x)^2} > 0,$$

άρα $g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, 4)$.

Επομένως **ΔΕΝ** υπάρχουν σημεία της C_g στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) • Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, άρα από Θ. Fermat είναι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$ (1)

• Η εφαπτομένη της C_f στο $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$

$$\text{άρα } f'\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{3} + \beta = 1 \quad (2)$$

Από (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε $\frac{\alpha}{3} = -1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -3}$

Από την (1) για $\alpha = -3$ προκύπτει $\boxed{\beta = 3}$

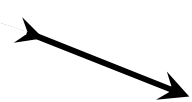
ii) Για $\alpha = -3$ και $\beta = 3$: $f'(x) = -3x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $f'(x) = (-x^3 + 3x)'$, $x \in \mathbb{R} \xrightarrow[\text{Θ.Μ.Τ.}]{\text{συνέπειες}} f(x) = -x^3 + 3x + c$, $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το 0, άρα $f(1) = 0 \Leftrightarrow -1 + 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$

Επομένως $f(x) = -x^3 + 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. $f'(x) = -3x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) = -6x$, $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\circ$	$\circ$	-
$f(x)$				

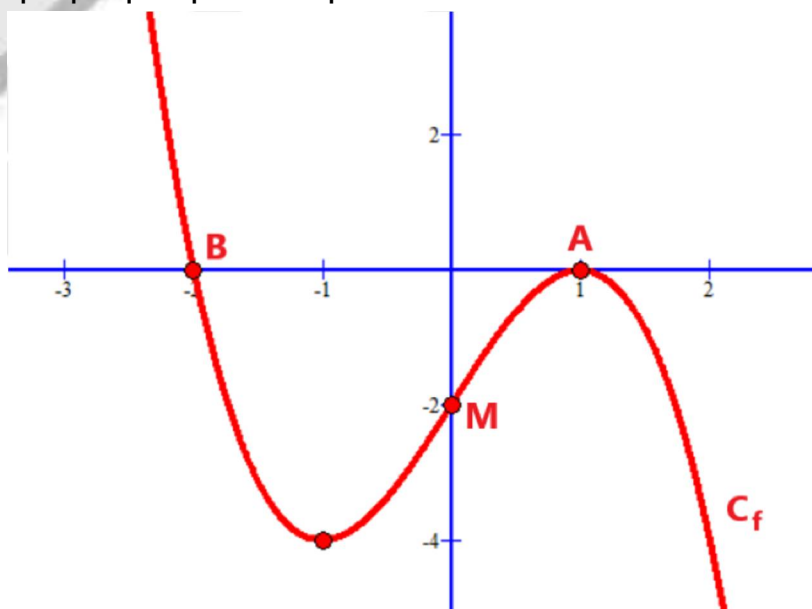
Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$,
ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = -1$ την τιμή $f(-1) = -4$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$ την τιμή $f(1) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	○	-
f(x)	↪		↩

- Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, ενώ η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.
 $f(0) = -2$, άρα η C_f έχει σημείο καμπής το $M(0, -2)$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \cdot (x+2) = 0 \Leftrightarrow$
 $x-1=0$ ή $x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$,
άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1, 0)$ και $B(-2, 0)$.
- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$ και
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$,
άρα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- Η f είναι πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού, άρα δεν έχει ασύμπτωτες.
- Γραφική παράσταση



Γ3. Είναι $f(x) < 0$ για τιμές του x κοντά στο 1, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + f(x))}{|f(x)| \cdot (x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\ln(1 + f(x))}{-f(x)} \cdot \frac{1}{(x - 1)^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + f(x))}{-f(x)} & \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{\substack{u=f(x) \\ x \rightarrow 1}} \frac{\ln(1 + u)}{-u} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ \text{DL'H}} } \frac{1}{-1} = -1 < 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} & = +\infty \end{aligned}$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + f(x))}{|f(x)| \cdot (x - 1)^2} = \boxed{-\infty}$

Γ4. 1^{ος} τρόπος

Για $x \geq 0$ είναι $e^x \geq 1$ και $x + 1 \geq 1$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

$$f(e^x) = f(x + 1) \stackrel{f \downarrow \text{ στο } [1, +\infty)}{\Leftrightarrow_{1-1}} e^x = x + 1$$

Ισχύει $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα η εξίσωση $f(e^x) = f(x + 1)$ στο $[0, +\infty)$ έχει μοναδική λύση $x = 0$.

2^{ος} τρόπος

Προφανής λύση το $x = 0$.

Ισχύει $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

Για $x > 0$ είναι $e^x > x + 1 > 1$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, άρα $f(e^x) < f(x + 1)$

και η εξίσωση δεν έχει λύσεις στο $(0, +\infty)$.

Άρα η εξίσωση $f(e^x) = f(x + 1)$ στο $[0, +\infty)$ έχει μοναδική λύση $x = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $x \cdot f'(x) - f(1 - x) = x^2 + 2x - 3, x \in [0, 1]$ (1)

$$(1) \xrightarrow{x=0} -f(1) = -3 \Leftrightarrow f(1) = 3$$

$$(1) \xrightarrow{x=1} f'(1) - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = f'(1)$$

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$,
 - Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$,
- άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1) - f(0) \Leftrightarrow f'(\xi) = 3 - f'(1) \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) + f'(1) = 3$$

Δ2. i) Η f' είναι συνεχής στο $(0, 1]$ ως παραγωγίσιμη και

$f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, 1]$,

άρα από συνέπειες του Θ. Bolzano προκύπτει ότι

η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, 1]$.

Από Δ1 είναι $f'(\xi) + f'(1) = 3 > 0$, με $\xi \in (0, 1)$.

Αφού τα $f'(\xi)$ και $f'(1)$ είναι ομόσημοι και έχουν άθροισμα θετικό

θα είναι $f'(\xi) > 0$ και $f'(1) > 0$

Επομένως $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, 1]$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

$$\text{ii)} \quad 0 \leq x \leq 1 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 3$$

$$\Delta 3. E = \int_0^1 |f(x) - 3| dx \quad f(x) \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$E = \int_0^1 [3 - f(x)] dx \Leftrightarrow$$

$$E = \int_0^1 3 dx - \underbrace{\int_0^1 f(x) dx}_I \Leftrightarrow$$

$$E = 3 - I \quad (3)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (1) κατά μέλη έχουμε

$$\int_0^1 [x \cdot f'(x) - f(1-x)] dx = \int_0^1 (x^2 + 2x - 3) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 x \cdot f'(x) dx - \int_0^1 f(1-x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$[x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx - \int_1^0 f(u) (-du) = \frac{1}{3} + 1 - 3 \Leftrightarrow$$

$$[x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f(u) du = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$f(1) - I - I = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$3 - 2I = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$2I = \frac{14}{3} \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{7}{3}$$

Από την (3) για $I = \frac{7}{3}$ έχουμε : $E = 3 - \frac{7}{3} \Leftrightarrow E = \frac{2}{3} \text{ τ.μ.}$

Θέτουμε $1 - x = u$
Είναι $dx = -du$

x	0	1
u	1	0