ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.
Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x_2]$,
άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, θα είναι $f(x_2) - f(x_1) > 0$,
οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α2. Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$,
αν $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - \ell] = 0$.

Α3. Θεώρημα Fermat
Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 (εσωτερικό σημείο του Δ) και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0) = 0$.

Α4. **α.** Σωστό
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_g = D_h = (0, +\infty)$

$D_f = D_{goh} = \{ x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_f \} = \{ x \in (0, +\infty) \text{ και } \ell nx > 0 \}$

$= \{ x \in (0, +\infty) \text{ και } x > 1 \} = (1, +\infty)$

$$f(x) = (goh)(x) = g(h(x)) = g(\ell nx) = \frac{e^{\ell nx} + 1}{e^{\ell nx} - 1} = \frac{x+1}{x-1}$$

Επομένως $\boxed{\mathbf{f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \ x > 1}}$.

Β2. **1ος τρόπος**

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x+1)'\cdot(x-1) - (x+1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}, \ x > 1$$

Είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x > 1$,

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$,

άρα η f είναι 1-1,

άρα $\boxed{\text{η f αντιστρέφεται}}$.

2ος τρόπος

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + 1)(x_2 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 \cancel{-1} = \cancel{x_1 x_2} + x_1 - x_2 \cancel{-1} \Leftrightarrow$$

$$-2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

άρα η f είναι 1-1,

άρα $\boxed{\text{η f αντιστρέφεται}}$.

3ος τρόπος

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1+2}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-1} + \dfrac{2}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1},\ x > 1$

$x_1 > x_2 > 1 \Leftrightarrow x_1 - 1 > x_2 - 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1 - 1} < \dfrac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow$

$1 + \dfrac{1}{x_1 - 1} < 1 + \dfrac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα,

άρα η f είναι 1-1,

άρα $\boxed{\textbf{η f αντιστρέφεται}}$.

$\boxed{\text{Εύρεση της αντίστροφης της f}}$

1ος τρόπος (γνωρίζοντας ότι η f είναι ↓)

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\left[(x+1)\cdot\frac{1}{x-1}\right] \overset{2\cdot(+\infty)}{=} +\infty \\ &\bullet \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(A) = (1, +\infty)$$

$D_{f^{-1}} = f(A) = (1, +\infty) = D_f$

Για $x > 1,\ y > 1$ έχουμε :

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1 \Leftrightarrow$

$x\cdot(y-1) = y + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y-1},\ y > 1$

Επομένως $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1},\ x > 1.$

Είναι $D_{f^{-1}} = D_f$ και $f(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, για κάθε $x \in D_f$

επομένως $\boxed{f = f^{-1}}$.

2ος τρόπος (χωρίς να γνωρίζουμε τη μονοτονία της f)

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (y-1) = y + 1 \overset{y \neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Πρέπει } x \in D_f \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \\ \dfrac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1 \end{array}}$$

Επομένως $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$, $y > 1$ ή $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$.

Είναι $D_{f^{-1}} = D_f$ και $f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$, για κάθε $x \in D_f$

επομένως $\boxed{f = f^{-1}}$.

B3. Από το B2 ερώτημα έχουμε :

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, άρα

$\boxed{\text{η } C_f \text{ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την } x = 1}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, άρα

$\boxed{\text{η } C_f \text{ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty \text{ την } y = 1}$.

B4. $f(A) = (1, +\infty)$, άρα $f(x) > 1$, για κάθε $x > 1$.

Ισχύει $-1 \leq \text{συν}x \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $f(x) > 1 \geq \text{συν}x$, για $x > 1$, δηλαδή

$\boxed{\text{η εξίσωση } f(x) = \text{συν}x \text{ δεν έχει λύση στο διάστημα } (1, +\infty)}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) + x - 2,\ x \in [1, 2]$.

- g συνεχής στο $[1, 2]$ ως άθροισμα συνεχών
- $g(1) = f(1) + 1 - 2 = -1 < 0$ και
  $g(2) = f(2) + 2 - 2 = 2 > 0$

από Θ. Bolzano

η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$, δηλαδή

$\boxed{\text{οι } C_f \text{ και } (\varepsilon_1): y = -x + 2 \text{ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο}}$.

ii) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$ έχει εξίσωση :

$y - f(2) = f'(2)\cdot(x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = 1\cdot(x - 2) \Leftrightarrow y = x$

επομένως $\boxed{\text{η } C_f \text{ εφάπτεται στην ευθεία } (\varepsilon_2): y = x}$.

Γ2. Είναι $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$, άρα η f' είναι γν. φθίνουσα στο $[1, 2]$

$1 \le x \le 2 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) \ge f'(2) \Leftrightarrow f'(x) \ge 1$

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $[1, 2]$,

άρα η f είναι 1-1, άρα $\boxed{\text{η } f \text{ αντιστρέφεται}}$.

$D_{f^{-1}} = f([1, 2]) \overset{f\uparrow}{=} [f(1), f(2)]$, άρα $\boxed{D_{f^{-1}} = [0, 2]}$.

Γ3. Έστω $1 < x < 2$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στα $[1, x]$ και $[x, 2]$,

άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν :

$x_1 \in (1, x)$, τέτοιο ώστε $f'(x_1) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow f'(x_1) = \dfrac{f(x)}{x - 1}$ (1)

$x_2 \in (x, 2)$, τέτοιο ώστε $f'(x_2) = \dfrac{f(2) - f(x)}{2 - x} \Leftrightarrow f'(x_2) = \dfrac{2 - f(x)}{2 - x}$ (2)

$x_1 < x_2 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x_1) > f'(x_2) \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}} \boxed{\dfrac{f(x)}{x - 1} > \dfrac{2 - f(x)}{2 - x}}$

Γ4. i. Θα δείξουμε ότι $f(x) \geq 2x - 2$, για κάθε $x \in [1, 2]$.

▹ Για $x = 1$ ή $x = 2$ ισχύει το "=", αφού $f(1) = 0$ και $f(2) = 2$.

▹ Για $x \in (1, 2)$ από το Γ3 ερώτημα έχουμε :

$$\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x} \overset{x-1>0}{\underset{2-x>0}{\Leftrightarrow}} (2-x)\cdot f(x) > [2-f(x)]\cdot(x-1) \Leftrightarrow$$

$$2f(x) \cancel{- x\cdot f(x)} > 2x - 2 \cancel{- x\cdot f(x)} + f(x) \Leftrightarrow f(x) > 2x - 2$$

Επομένως $\boxed{\mathbf{f(x) \geq 2x - 2,\ \text{για κάθε}\ x \in [1, 2]}}$

ii. $f(x) \geq 2x - 2$, για κάθε $x \in [1, 2]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$ ή 2.

Επομένως $\int_1^2 f(x)\,dx > \int_1^2 (2x-2)\,dx \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 f(x)\,dx > \left[x^2 - 2x\right]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx > 0 - (-1) \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\,dx > 1 \quad (3)$$

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$,
άρα η f είναι κοίλη στο $[1, 2]$,
άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της $(\varepsilon_2): y = x$,
με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(2, 2)$, άρα
$f(x) \leq x$, για κάθε $x \in [1, 2]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 2$.

Επομένως $\int_1^2 f(x)\,dx < \int_1^2 x\,dx \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 f(x)\,dx < \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx < \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\,dx < \frac{3}{2} \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε : $\boxed{\mathbf{1 < \int_1^2 f(x)\,dx < \frac{3}{2}}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x > 0$ είναι $f'(x) = (e^x)' = e^x$

$$(\varepsilon): y - f(x_1) = f'(x_1)\cdot(x - x_1) \overset{x_1 > 0}{\Leftrightarrow} (\varepsilon): y - e^{x_1} = e^{x_1}\cdot(x - x_1)$$

$$O(0, 0) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 0 - e^{x_1} = e^{x_1}\cdot(0 - x_1) \Leftrightarrow -e^{x_1} = -x_1\cdot e^{x_1} \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - e = e\cdot(x - 1) \Leftrightarrow \boxed{(\varepsilon): y = e\cdot x}$$

Δ2. • Για $x > 0$, είναι $f''(x) = (e^x)' = e^x > 0$,

άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ και η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε), με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(x_1, f(x_1))$.

• Για $x = 0$, είναι $f(0) = 1$ και $\Gamma(0, 1) \notin (\varepsilon)$

• Για $x < 0$, θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = e\cdot x$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - e\cdot x$, $x < 0$.

$g'(x) = (-e^{-x} + 2 - e\cdot x)' = e^{-x} - e$, $x < 0$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = e \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > e \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$

x	$-\infty$	-1	0
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗		↘

▹ $\Delta_1 = (-\infty, -1]$: Η g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1

• $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(-e^{-x} + 2 - ex) = \lim_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\cdot\left(-1 + \frac{2 - ex}{e^{-x}}\right)\right] = -\infty$$

διότι $$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\frac{2 - ex}{e^{-x}} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{-e}{-e^{-x}} = 0,$$

άρα $$\lim_{x\to-\infty}\left(-1 + \frac{2 - ex}{e^{-x}}\right) = -1 < 0$$

• $g(-1) = 2$

Είναι $g(\Delta_1) = (-\infty, 2]$ και $0 \in g(\Delta_1)$,

άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta_1$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

▹ $\Delta_2 = (-1\ ,\ 0)$: Η g συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (-e^{-x} + 2 - ex) = 2 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-e^{-x} + 2 - ex) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow g(\Delta_2) = (1\ ,\ 2)$$

$0 \notin g(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_2.

Συμπερασματικά

η C_f και η ευθεία (ε) έχουν εκτός από το σημείο $A(1, e)$ ένα ακριβώς ακόμη κοινό σημείο $B(x_0\ , f(x_0))$, με $x_0 < -1$.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = f(x) - e\cdot x,\ x \in IR$.

Η h είναι συνεχής στο IR, ως διαφορά συνεχών και έχει μοναδικές ρίζες τις $x_1 = 1$ και x_0 όπως βρήκαμε στο Δ2.

Από συνέπειες Θ. Bolzano, η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(x_0\ ,\ 1)$ και επειδή $x_0 < 0 < 1$ με $h(0) = f(0) = 1 > 0$ θα είναι $h(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_0\ ,\ 1)$.

Είναι $h(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_0\ ,\ 1]$, άρα

$$E = \int_{x_0}^{1} h(x)\,dx = \int_{x_0}^{1} [f(x) - ex]\,dx = \int_{x_0}^{1} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{1} ex\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx - \left[e\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{1}$$

$$= \int_{x_0}^{0} (-e^{-x} + 2)\,dx + \int_{0}^{1} e^{x}\,dx - \left(\frac{e}{2} - \frac{e\cdot x_0^{\,2}}{2}\right)$$

$$= \left[e^{-x} + 2x\right]_{x_0}^{0} + \left[e^{x}\right]_{0}^{1} - \frac{e}{2} + \frac{e\cdot x_0^{\,2}}{2}$$

$$= 1 - e^{-x_0} - 2x_0 + e - 1 - \frac{e}{2} + \frac{e\cdot x_0^{\,2}}{2}$$

$$= \boxed{\left(\frac{e\cdot x_0^{\,2}}{2} - 2x_0 - e^{-x_0} + \frac{e}{2}\right) \text{τ.μ.}} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} h(x_0) = 0 \ \Leftrightarrow \\ -e^{-x_0} + 2 - ex_0 = 0 \ \Leftrightarrow \\ -e^{-x_0} = ex_0 - 2 \end{array}}$$

$$\text{ή } E \overset{(3)}{=} \frac{e\cdot x_0^{\,2}}{2} - 2x_0 + ex_0 - 2 + \frac{e}{2} = \boxed{\left(\frac{e\cdot x_0^{\,2}}{2} + (e-2)\cdot x_0 + \frac{e-4}{2}\right) \text{τ.μ.}}$$

Δ4. Το κινητό1 κινείται στη C_f και $Δ\,(x_2\,, f(x_2))$ είναι μία τυχαία του θέση.

$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -e^{-x} + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} = 2 \;\Leftrightarrow\; -x = \ell n2 \;\Leftrightarrow\; x = -\ell n2$

Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $Z\,(-\ell n2\,, 0)$, άρα $x_2 \in [x_0\,, -\ell n2]$

Το κινητό2 κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε), από το Β στο Ο και $E\,(x_3\,, ex_3)$ είναι η αντίστοιχη θέση του, με $x_3 \in [x_0\,, 0]$.

Οι τεταγμένες των Δ, Ε είναι ίσες, άρα $f(x_2) = ex_3 \;\Leftrightarrow\; -e^{-x_2} + 2 = ex_3$

1ος τρόπος

$$-e^{-x_2} + 2 = ex_3 \;\Leftrightarrow\; x_3 = \frac{2 - e^{-x_2}}{e} \;\Leftrightarrow\; x_3 = \frac{2}{e} - e^{-1-x_2}$$

Άρα η οριζόντια απόστασή τους $(ΔΕ) = |x_3 - x_2| = \dfrac{2}{e} - e^{-1-x_2} - x_2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση d, με $d(x) = \dfrac{2}{e} - e^{-1-x} - x,\; x \in [x_0\,, -\ell n2]$.

$$d΄(x) = \left(\frac{2}{e} - e^{-1-x} - x\right)' = e^{-1-x} - 1,\;\; x \in [x_0\,, 0].$$

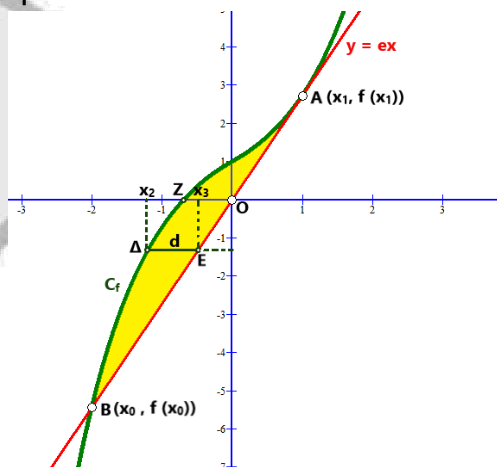
$d΄(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-1-x} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-1-x} = 1 \;\Leftrightarrow\; -1 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1$

$d΄(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-1-x} - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; e^{-1-x} > 1 \;\Leftrightarrow\; -1 - x > 0 \;\Leftrightarrow\; x < -1$

x	x_0		-1		$-\ell n2$
d΄(x)		+	0	-	
d (x)		↗		↘	

Η d παρουσιάζει μέγιστο για x = -1 την τιμή

$$d(-1) = -e^0 + \frac{2}{e} - (-1) = -1 + \frac{2}{e} + 1 = \frac{2}{e}$$



Επομένως

η μέγιστη απόσταση των δύο κινητών κατά τη διάρκεια της κίνησής τους είναι $\dfrac{2}{e}$ μονάδες.

2^ος^ τρόπος

$-e^{-x_2} + 2 = ex_3 \Leftrightarrow e^{-x_2} = 2 - ex_3 \Leftrightarrow$

$-x_2 = \ell n(2 - ex_3) \Leftrightarrow x_2 = -\ell n(2 - ex_3)$

Άρα η οριζόντια απόστασή τους $(\Delta E) = |x_3 - x_2| = x_3 + \ell n(2 - ex_3)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση d, με $d(x) = x + \ell n(2 - ex)$, $x \in [x_0\ , 0]$.

$$d'(x) = (x + \ell n(2 - ex))' = 1 + \frac{-e}{2 - ex} = \frac{2 - ex - e}{2 - ex},\quad x \in [x_0\ ,0].$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - ex - e = 0 \Leftrightarrow ex = 2 - e \Leftrightarrow x = \frac{2 - e}{e}$$

$$d'(x) > 0 \overset{2 - ex > 0}{\Leftrightarrow} 2 - ex - e > 0 \Leftrightarrow ex < 2 - e \Leftrightarrow x < \frac{2 - e}{e}$$

x	x_0		$\frac{2-e}{e}$		0
$d'(x)$		+	0	-	
$d(x)$		↗		↘	

Η d παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{2 - e}{e}$ την τιμή

$$d\left(\frac{2 - e}{e}\right) = \frac{2 - e}{e} + \ell n\left(2 - e\frac{2 - e}{e}\right) = \frac{2 - e}{e} + \ell ne$$

$$= \frac{2 - e}{e} + 1 = \frac{2 - e + e}{e} = \frac{2}{e}$$

Επομένως

η μέγιστη απόσταση των δύο κινητών κατά τη διάρκεια της κίνησής τους είναι $\frac{2}{e}$ μονάδες.