

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 , αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0), \text{ οπότε}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Επομένως $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

A2. Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

A3. Οι συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες συναρτήσεις, όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$.

A4. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Για $x > 0$: $f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		○	+
$f(x)$			

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ την τιμή $f(1) = 2$.

B2. Για $x > 0$: $f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' = -(x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} > 0$

Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

B3. ◦ Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$ ως παραγωγίσιμη

◦ Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

$$\circ f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ. Rolle για την f

στο διάστημα $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$

B4. Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, άρα

$$E = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_1^e = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1+e^2}{2} \text{ τ.μ.}$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x_A = x_B = \alpha$, άρα $B(\alpha, y_B)$

$$B(\alpha, y_B) \in C_f \Leftrightarrow y_B = f(\alpha) \Leftrightarrow y_B = e^{-\alpha}, \text{ άρα } B(\alpha, e^{-\alpha})$$

$$y_\Gamma = y_B = e^{-\alpha}, \text{ άρα } \Gamma(x_\Gamma, e^{-\alpha})$$

$$\Gamma(x_\Gamma, e^{-\alpha}) \in C_g \Leftrightarrow e^{-\alpha} = g(x_\Gamma) \Leftrightarrow e^{-\alpha} = -\frac{e}{x_\Gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{e^\alpha} = -\frac{e}{x_\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$x_\Gamma = -e \cdot e^\alpha \Leftrightarrow x_\Gamma = -e^{1+\alpha}, \text{ άρα } \Gamma(-e^{1+\alpha}, e^{-\alpha})$$

Γ2. $E_{AB\Gamma\Delta} = (A\Delta) \cdot (AB) \Leftrightarrow E_{AB\Gamma\Delta} = (x_A - x_\Delta) \cdot (y_B - y_A) \Rightarrow$

$$E(\alpha) = (\alpha + e^{1+\alpha}) \cdot (e^{-\alpha} - 0) \Leftrightarrow E(\alpha) = \alpha \cdot e^{-\alpha} + e^{1+\alpha-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$E(\alpha) = \alpha \cdot e^{-\alpha} + e, \alpha > -1.$$

Γ3. Για $\alpha > -1$: $E'(\alpha) = (\alpha \cdot e^{-\alpha} + e)' = e^{-\alpha} - \alpha \cdot e^{-\alpha} = (1 - \alpha) \cdot e^{-\alpha}$

$$E'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha) \cdot e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$E'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha) \cdot e^{-\alpha} > 0 \stackrel{e^{-\alpha} > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha > 0 \stackrel{\alpha > -1}{\Leftrightarrow} -1 < \alpha < 1$$

α	-1	1	$+\infty$
$E'(\alpha)$		+	-
$E(\alpha)$			

Το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ μεγιστοποιείται όταν $\alpha = 1$, δηλαδή όταν $A(1, 0)$.

Γ4. $E_{\max} = E(1) = e + e^{-1} = e + \frac{1}{e} < 4$, αφού $e \cong 2,718$

Επομένως δεν υπάρχει θέση του σημείου A , ώστε το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ να έχει εμβαδόν 4 τ.μ.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. • Για $x \neq 0$: θέτουμε $\frac{1}{x} = u \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}, u \neq 0$

$$x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu x \Rightarrow \left(\frac{1}{u}\right)^2 \cdot f(u) = \eta\mu \frac{1}{u} \Leftrightarrow \frac{f(u)}{u^2} = \eta\mu \frac{1}{u} \Leftrightarrow$$

$$f(u) = u^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{u}, u \neq 0 \quad \text{ή} \quad f(x) = x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, x \neq 0$$

• Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| = x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \leq x^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, άρα $f(0) = 0$

$$\text{Επομένως } f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Δ2. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x| \\ \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με $f'(0) = 0$

$$(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon) : y = 0 \quad (x'x)$$

$$\Delta 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \stackrel{\frac{1}{x} = u \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0}} \frac{\eta\mu u}{u} = 1 = \lambda$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - x \right) \stackrel{\frac{1}{x} = u \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0}} \left(\frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{2} = 0 = \beta \end{aligned}$$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, την ευθεία $y = x$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [-1, 1]$

$$\triangleright g(0) = f(0) \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = 0 \cdot 1 = 0 = -g(0)$$

$\triangleright$ Για $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$:

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) = (-x)^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{-x} \cdot \sigma\upsilon\nu x = x^2 \cdot \left(-\eta\mu \frac{1}{x} \right) \cdot \sigma\upsilon\nu x \\ &= -x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \cdot \sigma\upsilon\nu x = -f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = -g(x) \end{aligned}$$

Επομένως $g(-x) = -g(x)$, για κάθε $x \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 g(x) dx \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{Θέτω } x = -u \\ dx = -du \end{array}} \\ &= \int_1^{-1} g(-u) (-du) \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l} x \\ u \end{array}} \\ &= -\int_1^{-1} -g(u) du \\ &= \int_1^{-1} g(u) du \\ &= -\int_{-1}^1 g(u) du \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$