



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 105

Έστω $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$,

τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$,

δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 1$.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 77

Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

A4. α. Σωστό

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστό



ΘΕΜΑ Β

B1. $D_f = (0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

$$D_h = D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x - 2 > 0\} \\ = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x > 2\} = (2, +\infty)$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 2) = 2\ln(x - 2) - 1$$

Επομένως $\boxed{h(x) = 2\ln(x - 2) - 1, x > 2}$.

B2. $h'(x) = [2\ln(x - 2) - 1]' = 2[\ln(x - 2)]' = 2 \cdot \frac{(x - 2)'}{x - 2} = \frac{2}{x - 2}, x > 2$

$$h''(x) = \left(\frac{2}{x - 2}\right)' = -\frac{2}{(x - 2)^2}, x > 2$$

Είναι $h''(x) < 0$, για κάθε $x > 2$, άρα η h είναι κοίλη στο $(2, +\infty)$.

B3. 1^{ος} τρόπος

$$h'(x) = \frac{2}{x - 2} > 0, \text{ για } x > 2,$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, άρα η h είναι 1-1,

άρα $\boxed{\eta \ h \ \text{αντιστρέφεται.}}$

2^{ος} τρόπος

$$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow 2\ln(x_1 - 2) - 1 = 2\ln(x_2 - 2) - 1 \Leftrightarrow \\ 2\ln(x_1 - 2) = 2\ln(x_2 - 2) \Leftrightarrow \ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2) \Leftrightarrow \\ x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ άρα η } f \text{ είναι 1-1,} \\ \text{άρα } \boxed{\eta \ f \ \text{αντιστρέφεται.}}$$

3^{ος} τρόπος

$$x_1 > x_2 > 2 \Leftrightarrow x_1 - 2 > x_2 - 2 > 0 \xrightarrow{\ln \uparrow} \Leftrightarrow \ln(x_1 - 2) > \ln(x_2 - 2) \Leftrightarrow \\ 2\ln(x_1 - 2) > 2\ln(x_2 - 2) \Leftrightarrow 2\ln(x_1 - 2) - 1 > 2\ln(x_2 - 2) - 1 \Leftrightarrow \\ h(x_1) > h(x_2), \text{ άρα η } h \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (2, +\infty), \\ \text{άρα η } h \text{ είναι 1-1, άρα } \boxed{\eta \ h \ \text{αντιστρέφεται.}}$$



Εύρεση της αντίστροφης της h

1^{ος} τρόπος (γνωρίζοντας ότι η h είναι $\uparrow$)

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} [2 \ln(x-2) - 1] = \lim_{u \rightarrow 0^+} (2 \ln u - 1) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \ln(x-2) - 1] = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2 \ln u - 1) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(A) = \mathbb{R}$$

$$D_{h^{-1}} = h(A) = \mathbb{R}$$

Για $x > 2, y \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = 2 \ln(x-2) - 1 \Leftrightarrow y + 1 = 2 \ln(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{y+1}{2} = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} = x-2 \Leftrightarrow x = 2 + e^{\frac{y+1}{2}}, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Επομένως } h^{-1}(x) = 2 + e^{\frac{x+1}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

2^{ος} τρόπος (χωρίς να γνωρίζουμε τη μονοτονία της h)

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = 2 \ln(x-2) - 1 \Leftrightarrow y + 1 = 2 \ln(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{y+1}{2} = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} = x-2 \Leftrightarrow x = 2 + e^{\frac{y+1}{2}}, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Πρέπει } x \in D_h \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} + 2 > 2 \Leftrightarrow e^{\frac{y+1}{2}} > 0 \text{ που ισχύει}$$

$$\text{Επομένως } h^{-1}(x) = 2 + e^{\frac{x+1}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{B4. } \varphi(x) = (h^{-1}(x) - 3) \cdot (x^3 - 8) = \left(e^{\frac{x+1}{2}} - 1 \right) \cdot (x^3 - 8), x \in \mathbb{R}$$

- η φ είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ ως πράξεις συνεχών
- η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων
- $\varphi(-1) = \varphi(2) = 0$

άρα

ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Rolle για την φ στο $[-1, 2]$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ (ως παραγωγίσιμη)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (e^{x+1} + \lambda x) = 1 - \lambda$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha} = 0$$

$$\bullet f(-1) = \frac{\alpha \cdot (-1) + \alpha}{-1 + \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

Γ2. Για $\lambda = 1$ είναι $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + x, & x < -1 \\ \frac{\alpha \cdot (x+1)}{x + \alpha}, & x \geq -1 \end{cases}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^{x+1} + x}{x + 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^{x+1} + 1}{1} = 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{\alpha(x+1)}{x + \alpha}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\alpha}{x + \alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1} = 2 \Leftrightarrow 2\alpha - 2 = \alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = 2$$

ε : η εφαπτομένη της C_f στο $A(-1, 0)$

$$\varepsilon: y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon: y - 0 = 2 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon: y = 2x + 2}$$



Γ3. • Κατακόρυφες ασύμπτωτες

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

- Πλάγιες / οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\triangleright \text{ στο } -\infty : \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + x}{x} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+1} + 1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x+1} + x - x) \stackrel{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} = 0$$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$.

$$\triangleright \text{ στο } +\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 2$.

Γ4. Είναι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq \eta\mu x - 2 \leq -1$

1^{ος} τρόπος

Για $x < -1$ είναι :

$$f'(x) = (e^{x+1} + x)' = e^{x+1} + 1 \text{ και } f''(x) = (e^{x+1} + 1)' = e^{x+1} > 0$$

Η f είναι κυρτή το $(-\infty, -1]$ και η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(-1, 0)$, άρα $f(x) \geq 2x + 2$, για κάθε $x \leq -1$.

$$\text{Είναι } f(t) \geq 2t + 2 \stackrel{t = \eta\mu x - 2 \leq -1}{\Leftrightarrow} f(\eta\mu x - 2) \geq 2(\eta\mu x - 2) + 2 \Leftrightarrow$$

$$f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 4 + 2 \Leftrightarrow f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = f(\eta\mu x - 2) - 2\eta\mu x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$g(x) = f(\eta\mu x - 2) - 2\eta\mu x + 2 \stackrel{\eta\mu x - 2 \leq -1}{=} e^{\eta\mu x - 2 + 1} + \eta\mu x - 2 - 2\eta\mu x + 2 = e^{\eta\mu x - 1} - \eta\mu x$$

$$\text{Για } u \in \mathbb{R} \text{ είναι } e^u \geq u + 1 \stackrel{u = \eta\mu x - 1}{\Rightarrow} e^{\eta\mu x - 1} \geq \eta\mu x \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\eta\mu x - 2) - 2\eta\mu x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Για κάθε $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $x \neq y$ είναι :

$$|g(x) - g(y)| \leq (x - y)^2 \Leftrightarrow |g(x) - g(y)| \leq |x - y|^2 \Leftrightarrow \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \leq |x - y| \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right| \leq |x - y| \Leftrightarrow -|x - y| \leq \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \leq |x - y|$$

$\lim_{x \rightarrow y} (-|x - y|) = \lim_{x \rightarrow y} |x - y| = 0$, άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{g(x) - g(y)}{x - y} = 0, \text{ άρα } g'(y) = 0, \text{ για κάθε } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Επομένως η g είναι σταθερή στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii) $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \eta\mu\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, άρα $g(x) = 1$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Είναι $f(x) \cdot \eta\mu x = 1$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \xRightarrow{\eta\mu x \neq 0} f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Δ2. Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι : $f'(x) = \left(\frac{1}{\eta\mu x}\right)' = -\frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} < 0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα η f είναι "1-1".

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta\mu x} = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0 \text{ και } \eta\mu x > 0 \\ \bullet f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [1, +\infty)$$



~σελίδα 7 από 10~

$$\Delta 3. f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{f \downarrow} f\left(\frac{\pi}{6}\right) > f(\alpha) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2 > f(\alpha) > 1 \Rightarrow f(\alpha) - 2 < 0$$

1^{ος} τρόπος

Στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$[f(\alpha) - 2] \cdot (x - \sqrt{2}) + \left[f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}\right] \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ , με

$$\varphi(x) = [f(\alpha) - 2] \cdot (x - \sqrt{2}) + \left[f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}\right] \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right] \text{ ή}$$

$$\varphi(x) = [f(\alpha) - 2] \cdot (x - \sqrt{2}) - \frac{\pi}{12} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right]$$

• η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right]$ ως πολυωνυμική

• $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = [f(\alpha) - 2] \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right) > 0$, διότι $f(\alpha) - 2 < 0$ και $\frac{\pi}{4} < \sqrt{2}$

$$\varphi(\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{12} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) < 0, \text{ διότι } \frac{\pi}{4} < \sqrt{2}$$

Από Θ. Bolzano, η φ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$

και επειδή η φ είναι πολυωνυμική 1^{ου} βαθμού η ρίζα αυτή είναι μοναδική

2^{ος} τρόπος

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } h, \text{ με } h(x) = \frac{f(\alpha) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{2}}, x \in \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$$

$$\text{ή } h(x) = \frac{f(\alpha) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{-\frac{\pi}{12}}{x - \sqrt{2}}, x \in \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) = A$$



$$h'(x) = \left(\frac{f(\alpha) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{-\frac{\pi}{12}}{x - \sqrt{2}} \right)' = -\frac{f(\alpha) - 2}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2} + \frac{\frac{\pi}{12}}{\left(x - \sqrt{2}\right)^2} > 0$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left(\frac{f(\alpha) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{-\frac{\pi}{12}}{x - \sqrt{2}} \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \left(\frac{f(\alpha) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{-\frac{\pi}{12}}{x - \sqrt{2}} \right) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(A) = \mathbb{R}$$

Είναι $0 \in h(A)$,

άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A

και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

3^{ος} τρόπος

$$\frac{f(\alpha) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{-\frac{\pi}{12}}{x - \sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(\alpha) - 2] \cdot (x - \sqrt{2}) - \frac{\pi}{12} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(\alpha) - 2] \cdot x - \sqrt{2} \cdot [f(\alpha) - 2] - \frac{\pi}{12}x + \frac{\pi^2}{48} = 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(\alpha) - 2] \cdot x - \frac{\pi}{12}x = \sqrt{2} \cdot [f(\alpha) - 2] - \frac{\pi^2}{48} \Leftrightarrow$$

$$\left(f(\alpha) - 2 - \frac{\pi}{12}\right)x = \sqrt{2} \cdot [f(\alpha) - 2] - \frac{\pi^2}{48} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} \cdot [f(\alpha) - 2] - \frac{\pi^2}{48}}{f(\alpha) - 2 - \frac{\pi}{12}}$$



Αρκεί να δείξουμε ότι : $\frac{\pi}{4} < \frac{\sqrt{2} \cdot [f(\alpha) - 2] - \frac{\pi^2}{48}}{f(\alpha) - 2 - \frac{\pi}{12}} < \sqrt{2}$

$$\bullet \frac{\pi}{4} < \frac{\sqrt{2} \cdot [f(\alpha) - 2] - \frac{\pi^2}{48}}{f(\alpha) - 2 - \frac{\pi}{12}} \stackrel{f(\alpha)-2-\frac{\pi}{12}<0}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{4} \cdot [f(\alpha) - 2] - \cancel{\frac{\pi^2}{48}} > \sqrt{2} \cdot [f(\alpha) - 2] - \cancel{\frac{\pi^2}{48}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot [f(\alpha) - 2] > \sqrt{2} \cdot [f(\alpha) - 2] \stackrel{f(\alpha)-2<0}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{4} < \sqrt{2}, \text{ που ισχύει}$$

$$\bullet \frac{\sqrt{2} \cdot [f(\alpha) - 2] - \frac{\pi^2}{48}}{f(\alpha) - 2 - \frac{\pi}{12}} < \sqrt{2} \stackrel{f(\alpha)-2-\frac{\pi}{12}<0}{\Leftrightarrow} \cancel{\sqrt{2} \cdot [f(\alpha)-2]} - \frac{\pi^2}{48} > \cancel{\sqrt{2} \cdot [f(\alpha)-2]} - \frac{\pi\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\pi^2}{48} > -\frac{\pi\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \sqrt{2}, \text{ που ισχύει}$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$

Δ4. i) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left[\frac{1}{2} \ln(1 - \sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin x) \right]' = \frac{1}{2} [\ln(1 - \sin x)]' - \frac{1}{2} [\ln(1 + \sin x)]' \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - \sin x)'}{1 - \sin x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + \sin x)'}{1 + \sin x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\eta\mu x}{1 - \sin x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta\mu x}{1 + \sin x} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x \cdot \left(\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x \cdot \frac{1 + \sin x + 1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \eta\mu x \cdot \frac{2}{1 - \sin^2 x} = \frac{\eta\mu x}{1 - \sin^2 x} = h(x) \end{aligned}$$

άρα η H είναι μια παράγουσα της h στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.



ii) Είναι $h(x) = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu x} = f(x), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu x} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Αναζητώ το πρόσημο της $q(x) = f(x) - 2$, στο $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \xrightarrow{f \downarrow} f\left(\frac{\pi}{6}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2 \geq f(x) \geq 1 \Rightarrow 0 \geq q(x)$$

$$\begin{aligned} E &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |q(x)| dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} -q(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [2 - f(x)] dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \\ &= [2x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - [H(x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi - \frac{\pi}{3} - H\left(\frac{\pi}{2}\right) + H\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3})\right) \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΔΙΟΤΙ

$$\circ H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \cancel{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \cancel{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \circ H\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} \ln\left(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2 - \sqrt{3}}{2} - \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{2} \ln \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3})^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln(2 - \sqrt{3}) = \ln(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$