



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2025
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 , αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0), \text{ οπότε}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Επομένως $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 143

Κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ , είναι τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με μηδέν.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδες 128 - 129

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

➤ συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και

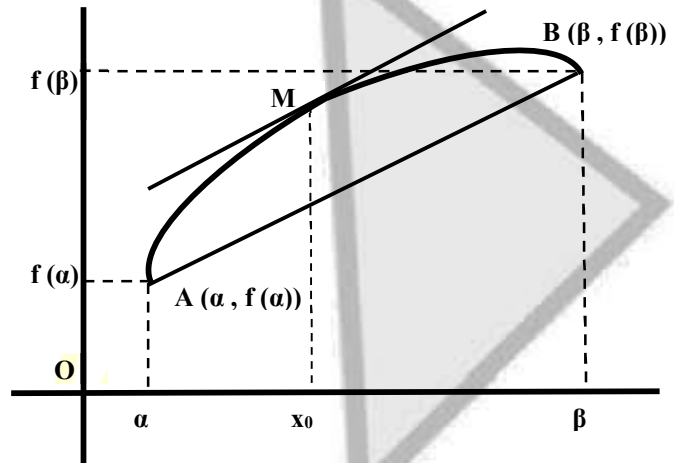
➤ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Γεωμετρική Ερμηνεία Θ.Μ.Τ.**

Αν η C_f είναι μια συνεχής γραμμή από το $A(\alpha, f(\alpha))$ στο $B(\beta, f(\beta))$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ που είναι παράλληλη στην ευθεία AB , με $x_0 \in (\alpha, \beta)$.



A4. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_f = (0, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } \underbrace{e^x + 1 > 0}_{\text{ΙΣΧΥΕΙ}}\} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x + 1) = \ln(e^x + 1)$$

Επομένως $\boxed{(f \circ g)(x) = \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R}}.$

B2. 1^{ος} τρόπος

$$(f \circ g)'(x) = [\ln(e^x + 1)]' = \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$$

άρα η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η $f \circ g$ είναι 1-1,

άρα $\boxed{\text{η } f \circ g \text{ είναι αντιστρέψιμη}}.$

2^{ος} τρόπος

$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Leftrightarrow \ln(e^{x_1} + 1) = \ln(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow$$

$$e^{x_1} + 1 = e^{x_2} + 1 \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ άρα η } f \circ g \text{ είναι 1-1,}$$

άρα $\boxed{\text{η } f \circ g \text{ είναι αντιστρέψιμη}}.$

**3ος τρόπος**

$x_1 > x_2 \xLeftrightarrow{e^x \uparrow} e^{x_1} > e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} + 1 > e^{x_2} + 1 \xLeftrightarrow{\ln x \uparrow} \ln(e^{x_1} + 1) > \ln(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow (\text{fog})(x_1) > (\text{fog})(x_2),$
 άρα η fog είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η fog είναι 1-1,
 άρα **η fog είναι αντιστρέψιμη**.

4ος τρόπος

Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$x_1 \neq x_2 \xRightarrow{e^x \text{ 1-1}} e^{x_1} \neq e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} + 1 \neq e^{x_2} + 1 \xRightarrow{\ln x \text{ 1-1}} \ln(e^{x_1} + 1) \neq \ln(e^{x_2} + 1) \Leftrightarrow (\text{fog})(x_1) \neq (\text{fog})(x_2),$
 άρα η fog είναι 1-1, άρα **η fog είναι αντιστρέψιμη**.

Εύρεση της αντίστροφης της fog**1ος τρόπος (γνωρίζοντας ότι η fog είναι $\uparrow$)**

$$\left. \begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (\text{fog})(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) \stackrel{e^x + 1 = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ \ln(e^x + 1) = 1}} \ln u = 0 \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{fog})(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) \stackrel{e^x + 1 = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \ln(e^x + 1) = +\infty}} \ln u = +\infty
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$D_h = (\text{gof})(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$$

Για $x \in \mathbb{R}$ και $y > 0$ έχουμε : $y = (\text{fog})(x) \Leftrightarrow y = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1), y > 0$

Επομένως **$h(x) = \ln(e^x - 1), x > 0$** .

2ος τρόπος (χωρίς να γνωρίζουμε τη μονοτονία της fog)

$$y = (\text{fog})(x) \Leftrightarrow y = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^y - 1$$

$$\boxed{\text{Πρέπει } e^y - 1 > 0 \Leftrightarrow e^y > 1 \Leftrightarrow e^y > e^0 \Leftrightarrow y > 0}$$

$$\text{άρα } \ln e^x = \ln(e^y - 1) \Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1)$$

$$\boxed{\text{Πρέπει } x \in D_{\text{fog}} \Leftrightarrow \ln(e^y - 1) \in \mathbb{R} \text{ που ισχύει}}$$

Επομένως **$h(x) = \ln(e^x - 1), x > 0$** .



$$\text{B3.i)} \quad h'(x) = [\ln(e^x - 1)]' = \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1} > 0, \text{ για } x > 0$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad h''(x) &= \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x)' \cdot (e^x - 1) - e^x \cdot (e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x \cdot (e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0, \text{ για } x > 0 \end{aligned}$$

άρα η h είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και η C_h δεν έχει σημεία καμπής.

$$\text{B4. } D_h = (0, +\infty)$$

- κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - 1) \stackrel{e^x - 1 = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty$$

άρα η C_h έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ ($y'y$).

- πλάγιες / οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(e^x - 1)]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - 1) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - 1) - \ln e^x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x - 1}{e^x} \stackrel{\frac{e^x - 1}{e^x} = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow 1}} \ln u = 0 = \beta$$

άρα η C_h έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(\alpha \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x \right)' = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}.$

Είναι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, άρα
η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι

$$(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow \boxed{(\varepsilon) : y = x}$$

Γ2. $f''(x) = (\alpha x^3 + 3x^2 + x + 1)' = 3\alpha x^2 + 6x + 1, x \in \mathbb{R}.$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 36 - 12\alpha$, άρα

$$f \text{ κυρτή στο } \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \text{ και } 3\alpha > 0 \Leftrightarrow 6 - 12\alpha \leq 0 \text{ και } \alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$3 - 12\alpha \leq -36 \text{ και } \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 3 \text{ και } \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 3$$

άρα η ελάχιστη τιμή του α ώστε η f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ είναι $\alpha = 3$.

Για $\alpha = 3$ είναι : $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x, x \in \mathbb{R}$ και

$$f'(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Γ3. $\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu f(x) \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{f(x)=u \\ x \rightarrow 0}} \eta \mu u = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \ln[f(x) - x] \stackrel{f(x)-x=u}{=} \lim_{\substack{f(x)-x=u \\ x \rightarrow 0}} \ln u = -\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln[f(x) - x]} = 0 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0} \ln[f(x) - x]} \right\} \Rightarrow$$

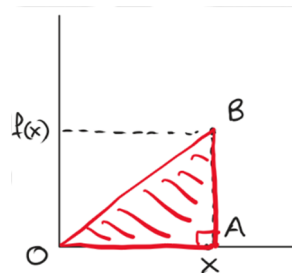
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu f(x)}{\ln[f(x) - x]} = \lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln[f(x) - x]} = 0 \cdot 0 = 0$$

Γ4. $E = \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x)$, άρα $E(t) = \frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot f(x(t))$

$$E'(t) = \frac{1}{2} \cdot x'(t) \cdot f(x(t)) + \frac{1}{2} \cdot x(t) \cdot f'(x(t)) \cdot x'(t) \Rightarrow$$

$$E'(t) = f(x(t)) + x(t) \cdot f'(x(t)) \text{ και τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ που } x(t_0) = 2$$

$$E'(t_0) = f(x(t_0)) + x(t_0) \cdot f'(x(t_0)) = f(2) + 2 \cdot f'(2) = 24 + 2 \cdot 39 = 102 \text{ cm}^2/\text{sec}$$





ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Είναι $e^{f(x)-1} + x - \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε $g(x) = e^{f(x)-1} + x - \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $g(x) \geq g(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.

$$g'(x) = (e^{f(x)-1} + x - \sqrt{x^2 + 1})' = e^{f(x)-1} \cdot f'(x) + 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

από Θ. Fermat

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow e^{f(0)-1} \cdot f'(0) + 1 - \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{1-1} \cdot f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(0) = -1}$$

$$\text{ii) } f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1} + \alpha x)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \alpha, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1}} + \alpha = -1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

Δ2. Είναι $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$,

άρα $\sqrt{x^2 + 1} > x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.



Δ3. Η εξίσωση γράφεται :

$$F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x) = F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x) \quad (1)$$

• αν $x = 0$ ή $x = \pi$, τότε $\eta\mu x = 0$ και η (1) επαληθεύεται

• αν $x \in (0, \pi)$, τότε $\eta\mu x \neq 0$ και $\eta\mu^2x < 2\eta\mu^2x < 3\eta\mu^2x$

□ η συνάρτηση F είναι συνεχής στο διάστημα $[\eta\mu^2x, 2\eta\mu^2x]$

□ η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\eta\mu^2x, 2\eta\mu^2x)$

οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι :

υπάρχει $x_1 \in (\eta\mu^2x, 2\eta\mu^2x)$, τέτοιο ώστε :



$$F'(x_1) = \frac{F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x)}{2\eta\mu^2x - \eta\mu^2x} \Leftrightarrow f(x_1) = \frac{F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x} \quad (2)$$

□ η συνάρτηση F είναι συνεχής στο διάστημα $[2\eta\mu^2x, 3\eta\mu^2x]$

□ η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2\eta\mu^2x, 3\eta\mu^2x)$

οπότε εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι :

υπάρχει $x_2 \in (2\eta\mu^2x, 3\eta\mu^2x)$, τέτοιο ώστε :

$$F'(x_2) = \frac{F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x)}{3\eta\mu^2x - 2\eta\mu^2x} \Leftrightarrow f(x_2) = \frac{F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x} \quad (3)$$

$$\text{Είναι } x_1 < x_2 \xLeftrightarrow[f \downarrow]{(2)} f(x_1) > f(x_2) \xLeftrightarrow{(3)}$$

$$\frac{F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x} > \frac{F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x)}{\eta\mu^2x} \quad \eta\mu^2x > 0 \Leftrightarrow$$

$$F(2\eta\mu^2x) - F(\eta\mu^2x) > F(3\eta\mu^2x) - F(2\eta\mu^2x)$$

άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(0, \pi)$.

Επομένως **μοναδικές ρίζες** $x = 0$ και $x = \pi$.



Δ4. $0 \leq x \leq 1 \xRightarrow{f \downarrow} f(0) \geq f(x) \Leftrightarrow 1 \geq f(x) \Leftrightarrow 1 - f(x) \geq 0$
(στην τελευταία σχέση το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$)

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu u \leq u$, για κάθε $u \geq 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $u = 0$
άρα $\eta\mu(1 - f(x)) \leq 1 - f(x)$, για κάθε $x \in [0, 1]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$
άρα $x \cdot \eta\mu(1 - f(x)) \leq x - x \cdot f(x)$, για κάθε $x \in [0, 1]$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$
Επομένως $\int_0^1 x \cdot \eta\mu(1 - f(x)) dx < \int_0^1 [x - x \cdot f(x)] dx$ (4)

$$\begin{aligned} \int_0^1 [x - x \cdot f(x)] dx &= \int_0^1 (x + x^2 - x \cdot \sqrt{x^2 + 1}) dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx \rightarrow \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \int_1^2 \sqrt{u} \frac{du}{2} \leftarrow \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \int_1^2 u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} [u\sqrt{u}]_1^2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \cdot (2\sqrt{2} - 1) \\ &= \frac{5}{6} - \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} = \frac{5 - 4\sqrt{2} + 2}{6} = \frac{7 - 4\sqrt{2}}{6} \quad (5) \end{aligned}$$

Θέτω $x^2 + 1 = u$

Είναι $2x dx = du \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2}$

- Για $x = 0$ είναι $u = 1$
- Για $x = 1$ είναι $u = 2$

Από (4) και (5) προκύπτει ότι $\int_0^1 x \cdot \eta\mu(1 - f(x)) dx < \frac{7 - 4\sqrt{2}}{6}$.