

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 142 - 143

A2. α. Ψ

β. Για να είναι το x_0 θέση σημείου καμπής της f πρέπει επιπλέον να αλλάζει το πρόσημο της f'' εκατέρωθεν του x_0 (δηλαδή πρέπει να αλλάζει η κυρτότητα της f εκατέρωθεν του x_0).

Με αντιπαράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = x^4, x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2$.

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμπής. Όμως $f''(0) = 0$.

A3. δ

A4. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\triangle BEZ$

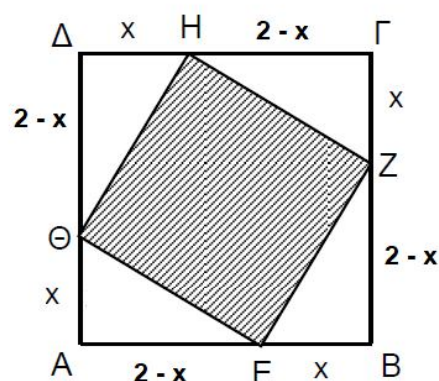
$$EZ^2 = EB^2 + BZ^2$$

$$EZ^2 = x^2 + (2 - x)^2$$

$$EZ^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2$$

$$EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$$

$$EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}, 0 \leq x \leq 2.$$



B2. Είναι $(EZHO) = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$

άρα $f(x) = 2x^2 - 4x + 4, 0 \leq x \leq 2.$



B3. $f'(x) = (2x^2 - 4x + 4)' = 4x - 4, 0 \leq x \leq 2.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	2
f'(x)		-	+
f(x)			

Τ.μ.
Τ.ελ.
Τ.μ.

Είναι $f(0) = f(2) = 4$ και $f(1) = 2$.

Το εμβαδόν του ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο για $x = 1$,
ενώ γίνεται μέγιστο για $x = 0$ ή $x = 2$.

B4. Για $x_0 \in [0, 2]$ είναι :

$$x_0 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x_0} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{x_0} \geq 1 \Leftrightarrow 4e^{x_0} \geq 4 \Leftrightarrow 4e^{x_0} + 1 \geq 5$$

Όμως $2 \leq (\text{ΕΖΗΘ}) = f(x) \leq 4$, για κάθε $x \in [0, 2]$.

Άρα $4e^{x_0} + 1 > f(x_0)$ και επομένως **δεν υπάρχει** $x_0 \in [0, 2]$
ώστε το εμβαδόν $f(x_0)$ του ΕΖΗΘ να ισούται με $4e^{x_0} + 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$

Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Ε.Τ.

άρα πρέπει $f(0) = f(3) = 2$

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 3$ είναι 8 τ.μ.

$$\int_0^3 |f'(x)| dx = 8 \Leftrightarrow -\int_0^2 f'(x) dx + \int_2^3 f'(x) dx = 8 \Leftrightarrow$$

$$-[f(x)]_0^2 + [f(x)]_2^3 = 8 \Leftrightarrow -f(2) + f(0) + f(3) - f(2) = 8 \Leftrightarrow$$

$$-f(2) + 2 + 2 - f(2) = 8 \Leftrightarrow -2f(2) = 4 \Leftrightarrow f(2) = -2$$



$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{f' \text{ συνεχής}}{=} \frac{f'(1)}{1} = -3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{f(x) - 2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x)'}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f'(x)} = -\infty$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ και $f'(x) < 0$, για $x \in (0, 1)$.

Γ2.

x	0	2	3
f'(x)	○	-	+
f(x)			

Τ.μ. Τ.ελ. Τ.μ.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 0$ και $x = 3$, ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 2$.

x	0	1	3
f'(x)			
f(x)			

σ.κ.

Η f είναι κοίλη στο $[0, 1]$, ενώ είναι κυρτή στο $[1, 3]$.

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 1$.



Γ3. • Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ ως παραγωγίσιμη

- $f(2) \cdot f(3) = -4 < 0$

από Θ. Bolzano

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 3)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

και επειδή η f είναι γν. αύξουσα στο $[2, 3]$ το x_0 είναι μοναδικό.

▷ Για κάθε $x_1 \in (2, x_0) \cup (x_0, 3)$ είναι $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_1)} \in \mathbb{R}$

▷ $2 < x < x_0 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$

$x_0 < x < 3 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$, διότι $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x \in (2, x_0)$

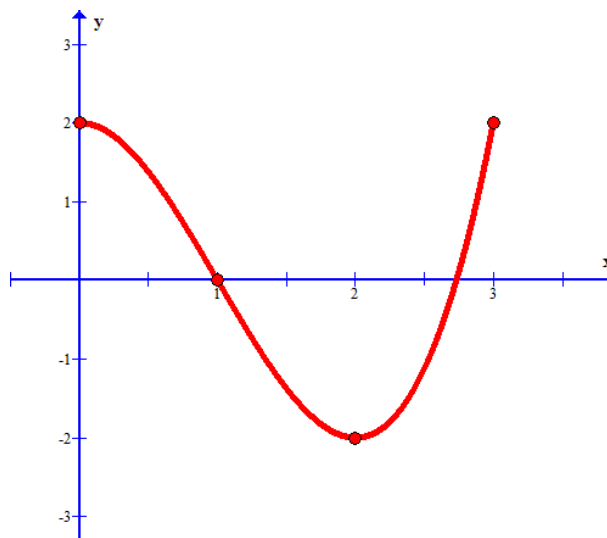
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, διότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x \in (x_0, 3)$

Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)}$, άρα το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

Επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$, για το οποίο δεν υπάρχει

το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

Γ4.





ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στο διάστημα $(0, 2]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3x^2 + 2) = 2 = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$

η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

Στο διάστημα $(0, 2)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

Επομένως **η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0, 2]$.**

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\alpha - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \alpha - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = \alpha - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= f(0) = 2 \\ \alpha - 1 &= 2 \Leftrightarrow \alpha = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Δ3. Στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι :

$$f'(x) = \left(3 - \frac{\eta\mu x}{x} \right)' = - \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)' = - \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} = \frac{\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$$

Θεωρούμε συνάρτηση g , με $g(x) = \eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$$g'(x) = (\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - (\sigma\upsilon\nu x - x \cdot \eta\mu x) = x \cdot \eta\mu x$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0
x		-	○
$\eta\mu x$		-	○
$g'(x) = x \cdot \eta\mu x$		+	○
$g(x)$		↗	

$$-\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \xrightarrow{g \uparrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0.$$



Στο $(0, +\infty)$ είναι :

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x = \underbrace{3x}_{\text{θετικός}} \cdot (x - 2)$$

- Για $0 < x < 2$ είναι $x - 2 < 0$, άρα $f'(x) < 0$
- Για $x > 2$ είναι $x - 2 > 0$, άρα $f'(x) > 0$

Επομένως έχουμε :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	2	$+\infty$
f'(x)		-	-	+
f(x)				

Η συνεχής f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$,
ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$$\Delta 4. \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right]_0^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \xRightarrow{f \downarrow} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{\pi} \geq f(x) \geq 2$$

Το "=" ισχύει
μόνο για $x = -\frac{\pi}{2}$

Το "=" ισχύει
μόνο για $x = 0$

$$\text{Άρα } \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2 dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(3 - \frac{2}{\pi}\right) dx \Leftrightarrow$$

$$[2x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 < \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx < \left[3x - \frac{2x}{\pi}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \Leftrightarrow \pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^2 f(x) dx < \frac{3\pi}{2} - 1$$

Δ5. Για κάθε $x \in (0, 1)$ έχουμε :

- $0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{\pi}{2} \cdot x > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} \cdot x < 0$
- $0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 > -x > -1 \xrightarrow{e^x \uparrow} e^0 > e^{-x} > e^{-1} \Leftrightarrow 1 > e^{-x} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow$
 $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} \cdot e^{-x} < -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} \cdot e^{-x} < 0$

Επομένως είναι $-\frac{\pi}{2} \cdot x, -\frac{\pi}{2} \cdot e^{-x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, άρα και 1-1.

$$f\left(-\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2} \cdot e^{-x}\right) \xrightarrow{1-1} -\frac{\pi}{2} \cdot x = -\frac{\pi}{2} \cdot e^{-x} \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} - x = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = e^{-x} - x$, $x \in [0, 1]$

Είναι $\varphi'(x) = (e^{-x} - x)' = -e^{-x} - 1 < 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$

άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$

- Η φ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών

- $\varphi(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$

$$\varphi(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$,

τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$

και επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα το x_0 είναι μοναδικό.

Επομένως η εξίσωση $f\left(-\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2} \cdot e^{-x}\right)$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, 1)$.