



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 92.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

A4. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Σωστό*, δ. Λάθος, ε. Λάθος.

*έπρεπε να δίνεται ότι η μεταβλητή είναι ποσοτική διακριτή.

ΘΕΜΑ Β

B1. $f'(x) = [2e^x(2x - 3)]' = 2e^x(2x - 3) + 4e^x = 2e^x(2x - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \frac{1}{2}]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2}, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = \frac{1}{2}$ την τιμή $f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{1}{2}}\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) = 2\sqrt{e}(-2) = -4\sqrt{e}$.

B2. $P(A) = x_1 = \frac{1}{2}$

$P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}} = -\frac{-4\sqrt{e}}{6\sqrt{e}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

B3. Έστω ότι A, B είναι ασυμβίβαστα. Ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1 \rightarrow \text{ΑΤΟΠΟ}$

Άρα, τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

B4. $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$

• $B - A \subseteq B \Rightarrow P(B - A) \leq P(B) \Leftrightarrow P(A' - B') \leq \frac{2}{3} \quad (1)$

ή $A' - B' \subseteq A' \Rightarrow P(A' - B') \leq P(A') \Leftrightarrow P(A' - B') \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \quad (1)$

• Θα δείξουμε ότι $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq P(B - A) \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{2}{3} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$ που ισχύει διότι
 $A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$ άρα $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \quad (2)$

Από (1) και (2): $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \leq \frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $F_5 = 1$ και $F_5\% = 100$

Από τους τύπους Vieta έχουμε:



$$\begin{cases} F_3 + F_5 = \frac{8}{5} \\ F_3 \cdot F_5 = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \xLeftrightarrow{F_5=1} \begin{cases} F_3 + 1 = \frac{8}{5} \\ F_3 = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ \kappa = 1 \end{cases}$$

$$F_5\% = 100 \Leftrightarrow \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \xLeftrightarrow{\kappa=1} \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$$

$$\Delta=289 \text{ και } \lambda=10 \text{ ή } \lambda=-7$$

$$\text{Ομως } F_1\% = \lambda \geq 0, \text{ άρα } \lambda = 10$$

$$\Gamma 2. f_1\% = F_1\% = \lambda = 10$$

$$F_2\% = 3\lambda + 10 = 40$$

$$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 40 - 10 = 30$$

$$F_3\% = 100F_3 = 60$$

$$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 60 - 40 = 20$$

$$F_4\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 90$$

$$f_4\% = F_4\% - F_3\% = 90 - 60 = 30$$

$$f_5\% = F_5\% - F_4\% = 100 - 90 = 10$$

Γ3.

$$\bullet 25\% = f_1\% + \frac{f_2\%}{2} \Rightarrow x_2 = 16 \quad (1)$$

$$\bullet 25\% = \frac{f_4\%}{2} + f_5\% \Rightarrow x_4 = 24 \quad (2)$$

$$\bullet x_4 - x_2 = 2c \xLeftrightarrow{(1),(2)} 2c = 8 \Leftrightarrow 1\eta \text{ κλάση: } [\alpha, \alpha + 4), 2\eta \text{ κλάση: } [\alpha + 4, \alpha + 8)$$

$$x_2 = \frac{\alpha + 4 + \alpha + 8}{2} \Leftrightarrow 16 = \frac{2\alpha + 12}{2} \Leftrightarrow 2\alpha + 12 = 32 \Leftrightarrow 2\alpha = 20 \Leftrightarrow \alpha = 10$$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$\frac{f_i}{n}\%$	F_i	$\frac{F_i}{n}\%$
[10,14)	12	10	0.1	10
[14,18)	16	30	0.4	40
[18,22)	20	20	0.6	60
[22,26)	24	30	0.9	90
[26,30)	28	10	1	100
ΣΥΝΟΛΑ	-	100	-	-

Γ4. Το 40% ($f_4\% + f_5\%$) των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22.

Στο 40% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν 800 παρατηρήσεις

Στο 100% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν n παρατηρήσεις

$$40n = 800 \cdot 100 \Leftrightarrow 40n = 80000 \Leftrightarrow n = 2000$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.α.

$$\bullet P(\omega_1) = P(-1) = f(-1) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\bullet P(\omega_2) = P(0) = f(0) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} + 1 \right)' = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$



$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$$

$$\bullet P(\omega_4) = 1 - P(\omega_1) - P(\omega_2) - P(\omega_3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

Δ1.β.

$$\bullet f'(\omega) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2} \leq 0 \xLeftrightarrow[\omega^2+1>0] 1-\omega^2 \leq 0 \Leftrightarrow \omega^2 \geq 1 \Leftrightarrow |\omega| \geq 1 \Leftrightarrow \omega \geq 1 \text{ ή } \omega \leq -1$$

$$\text{Άρα } A = \{-1, \omega_3, \omega_4\} \text{ και } P(A) = P(-1) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\bullet f(\omega) > 1 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega^2+1} + 1 > 1 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega^2+1} > 0 \xLeftrightarrow[\omega^2+1>0] \omega > 0$$

$$\text{Άρα } B = \{\omega_3, \omega_4\} \text{ και } P(B) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\bullet x^2 + \omega x \geq -\frac{1}{4}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + \omega x + \frac{1}{4} \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Πρέπει } \Delta \leq 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \omega^2 \leq 1 \Leftrightarrow |\omega| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \omega \leq 1$$

$$\text{Άρα } \Gamma = \{-1, 0\} \text{ και } P(\Gamma) = P(-1) + P(0) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\bullet A - B = \{-1\} \text{ και } P(A - B) = P(-1) = \frac{1}{6}$$

Δ2.

$$\bullet f'(x_0) = \varepsilon \varphi 45^\circ = 1 \Rightarrow \frac{1-x_0^2}{(x_0^2+1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x_0^2+1)^2 = 1-x_0^2 \Leftrightarrow x_0^4 + 2x_0^2 + 1 = 1-x_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0^4 + x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(x_0^2 + 3) = 0 \xLeftrightarrow[x_0^2+3 \neq 0] x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

$$f(0) = 1 \text{ και } f'(0) = 1, \text{ άρα } (\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1$$

Δ3. $\omega_i = -1, 0, \omega_3, \omega_4$

$$\bullet M_1 \sqsubseteq \varepsilon \Leftrightarrow y_1 = \omega_1 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\bullet M_2 \sqsubseteq \varepsilon \Leftrightarrow y_2 = \omega_2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\bullet M_3 \sqsubseteq \varepsilon \Leftrightarrow y_3 = \omega_3 + 1$$

$$\bullet M_4 \sqsubseteq \varepsilon \Leftrightarrow y_4 = \omega_4 + 1$$

Είναι $1 < \omega_3 < \omega_4$, άρα $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$

$$R_y = y_4 - y_1 \Leftrightarrow 5 = (\omega_4 + 1) - 0 \Leftrightarrow 5 = \omega_4 + 1 \Leftrightarrow \omega_4 = 4$$

$$\bullet \delta_{\omega_k} = \frac{0+\omega_3}{2} = \frac{\omega_3}{2}$$

$$\bullet \delta_{y_k} = \frac{1+\omega_3+1}{2} = \frac{2+\omega_3}{2}$$

$$\text{Είναι } 2\delta_{\omega_k} = \delta_{y_k} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\omega_3}{2} = \frac{2+\omega_3}{2} \Leftrightarrow 2\omega_3 = 2+\omega_3 \Leftrightarrow \omega_3 = 2$$