

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 260.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 261.

Α4. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η εξίσωση γίνεται:

$$2x^2 - |w - 4 - 3i| \cdot x + 2|z| = 0$$

$$\blacksquare \text{ Πρέπει } \Delta = 0 \Leftrightarrow (-|w - 4 - 3i|)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2|z| = 0 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i|^2 = 12|z|$$

$$\Leftrightarrow |z| = \frac{|w - 4 - 3i|^2}{16} \quad (1)$$

$$\text{1ος τρόπος: Το 1 είναι διπλή ρίζα άρα } \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{|w - 4 - 3i|}{4} = 1 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i| = 4 \quad (2)$$

$$\text{2ος τρόπος: Το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης άρα } 2 - |w - 4 - 3i| + 2|z| = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2 - |w - 4 - 3i| + 2 \cdot \frac{|w - 4 - 3i|^2}{16} = 0 \Leftrightarrow 16 - 8|w - 4 - 3i| + |w - 4 - 3i|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|w - 4 - 3i| - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i| - 4 = 0 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i| = 4 \quad (2)$$

Επομένως ο γ. τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος C_2 με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2=4$.

$$\blacksquare (1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} |z| = \frac{4^2}{16} \Leftrightarrow |z| = 1$$

Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο κύκλος C_1 με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1=1$.

$$\text{B2. } (OK) = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} =$$

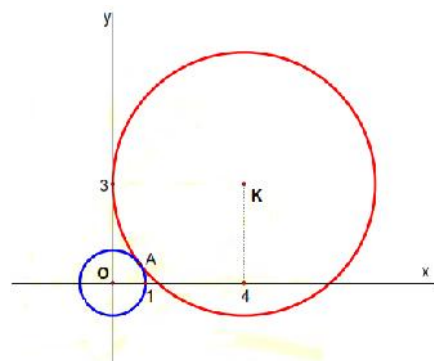
$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Είναι $(OK) = \rho_1 + \rho_2$, άρα οι κύκλοι

εφάπτονται εξωτερικά σε ένα σημείο A (Σχ.)

Επομένως υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός,

η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω



γεωμετρικούς τόπους.

B3. Έστω $M(z)$, $\Lambda(w)$ οι εικόνες των μιγαδικών z , w αντίστοιχα. Η απόσταση των εικόνων τους είναι:

$$(MA) \approx |z - w|.$$

$$|z - w|_{\max} = (B\Gamma) = 2(\rho_1 + \rho_2) = 10$$

$$\text{άρα } |z - w| \leq 10$$

$|z + w| = |z - (-w)|$ είναι η απόσταση των εικόνων

των z και $-w$. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων

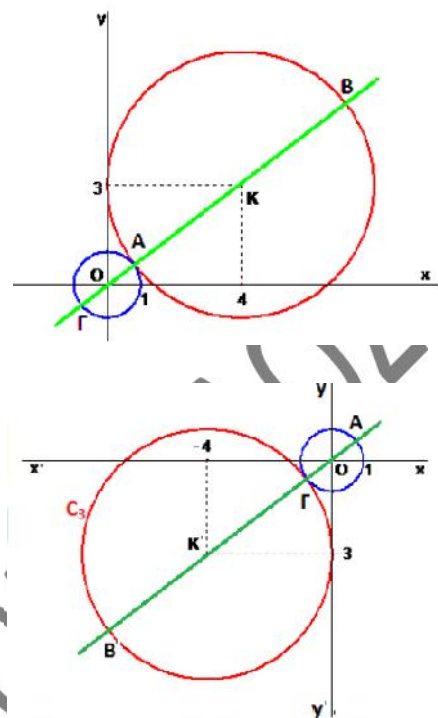
του $-w$ είναι ο κύκλος C_3 , ο συμμετρικός του C_2

ως προς το O , με κέντρο $K'(-4, -3)$ και ακτίνα

$$\rho_3 = \rho_4 = 4.$$

$$|z + w|_{\max} = (BA) = 2(\rho_1 + \rho_3) = 10$$

$$\text{άρα } |z + w| \leq 10.$$



$$\mathbf{B4.} \bullet |2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5 \Leftrightarrow |z(2z - 3 - 2\bar{z})| = 5 \Leftrightarrow |z| |2z - 2\bar{z} - 3| = 5 \stackrel{|z|=1}{\Leftrightarrow} |2(z - \bar{z}) - 3| = 5$$

$$\Leftrightarrow |2 \cdot 2Im(z) \cdot i - 3| = 5 \Leftrightarrow |-3 + 4Im(z) \cdot i| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-3)^2 + [4Im(z)]^2} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 + 16Im^2(z) = 25 \Leftrightarrow 16Im^2(z) = 16 \Leftrightarrow Im^2(z) = 1 \Leftrightarrow Im(z) = \pm 1$$

$$\bullet |z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{Re^2(z) + Im^2(z)} = 1 \Leftrightarrow Re^2(z) + 1 = 1 \Leftrightarrow Re^2(z) = 0 \Leftrightarrow Re(z) = 0$$

Επομένως $z = \pm i$.