

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$2xf(x) + x^2[f'(x) - 3] = -f'(x) \Leftrightarrow (x^2)'f(x) + x^2f'(x) - 3x^2 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [x^2f(x) - x^3 + f(x)]' = 0$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. είναι: $x^2f(x) - x^3 + f(x) = c$

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχω: } f(1) - 1 + f(1) = c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$x^2f(x) - x^3 + f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2f(x) + f(x) = x^3 \Leftrightarrow (x^2 + 1)f(x) = x^3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \\ f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} \right)' = \frac{3x^2(x^2 + 1) - (x^3)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \\ = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \text{ και το } = \text{ ισχύει μόνο για } x = 0. \text{ Άρα } f \text{ γν. αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = 0 = \beta$$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = 0 = \beta$$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$.

$$\Gamma 3. f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 5(x^2 + 1)^3 - 8 \leq 8(x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5(x^2 + 1)^3 \leq 8[(x^2 + 1)^2 + 1] \Leftrightarrow \frac{(x^2 + 1)^3}{(x^2 + 1)^2 + 1} \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow f(x^2 + 1) \leq f(2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\Gamma 4. \text{ Έστω συνάρτηση } h, \text{ με } h(x) = x \int_0^{x^3 - x} f(t) dt, x \in [0, 1]$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής άρα ή συνάρτηση f_1 , με $f_1(x) = \int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη

στο $[0, 1]$, άρα και συνεχής.

• η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις των συνεχών f_1, f_2 με $f_2(x) = x^3 - x$ και f_3 , με $f_3(x) = x$.

• η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = xf(x^3 - x)(3x^2 - 1) + \int_0^{x^3-x} f(t) dt$$

$$\bullet h(0) = 0 \cdot \int_0^0 f(t) dt = 0 \text{ και } h(1) = 1 \cdot \int_0^0 f(t) dt = 0$$

Άρα από Θεώρημα Rolle η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t) dt = -\xi(3\xi^2 - 1)f(\xi^3 - \xi).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, άρα η f_1 , με $f_1(t) = \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}$ συνεχής ως πράξεις συνεχών άρα η f_2 , με

$$f_2(u) = \int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \text{ συνεχής ως παραγωγίσιμη, επομένως η } f_3, \text{ με}$$

$$f_3(u) = \int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du, \quad \text{παραγωγίσιμη.}$$

$$f(x) = x + \int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du \quad (1)$$

$$\text{Παραγωγίζουμε και έχουμε } f'(x) = 1 + \int_1^x \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt, \quad x > 0 \quad (2)$$

$$\text{Παραγωγίζουμε και έχουμε για κάθε } x > 0, f''(x) = \frac{(f'(x))^2 - 1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f''(x) = (f'(x))^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow f(x)f''(x) + 1 = (f'(x))^2$$

Δ2.α. Είναι $f(x)f'(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$, άρα $f(x) \neq 0$ και $f'(x) \neq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$, άρα από συνέπειες Θ. Bolzano, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } f(1) = 1 + \int_1^1 \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du = 1 > 0, \text{ επομένως } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$, άρα από συνέπειες Θ. Bolzano η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } f'(1) = 1 + \int_1^1 \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt = 1 > 0, \text{ επομένως } f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\beta. (f'(x))^2 = 1 + f''(x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα $f'(x) = \sqrt{1 + f(x)f''(x)}$

Η f' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + f(x)f''(x)} = \sqrt{1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x)} = \\ &= \sqrt{1 + f(0)f''(0)} = f(0)=0 \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\Delta 3. \alpha. g'(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{f''(x)f'(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} \stackrel{(2)}{=} \frac{-1}{f^2(x)}$$

$$g(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{1}{1} = 1 \text{ και } g'(1) = \frac{-1}{f^2(1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

(ε): εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(1, g(1))$

$$(ε): y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Η g είναι κυρτή άρα η C_g βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής M , άρα $g(x) \geq 2 - x$, για κάθε $x > 0$.

$$\beta. \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι: } g(x) \geq 2 - x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} 2 - x \stackrel{f'(x) > 0}{\Leftrightarrow} f'(x) \geq (2 - x)f(x)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι: } f'(0) > (2 - 0)f(0) \text{ άρα } f'(x) \geq (2 - x)f(x), \text{ για κάθε } x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f'(x) - (2-x)f(x) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$ και το $=$ δεν ισχύει παντού.

$$\text{Επομένως } \int_0^1 [f'(x) - (2-x)f(x)] dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) dx - \int_0^1 (2-x)f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f(x)]_0^1 > \int_0^1 (2-x)f(x) dx \Leftrightarrow f(1) - f(0) > \int_0^1 (2-x)f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 > \int_0^1 (2-x)f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 (2-x)f(x) dx < 1$$

Δ4. Είναι $h(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$

$$E = \int_0^1 [f'(x)]^3 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 f'(x) dx = \left[[f'(x)]^2 f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left([f'(x)]^2 \right)' f(x) dx =$$

$$\stackrel{(2)}{=} [f'(1)]^2 f(1) - [f'(0)]^2 f(0) - \int_0^1 2f'(x)f''(x)f(x) dx = 1^2 \cdot 1 - \int_0^1 2f'(x) \left[[f'(x)]^2 - 1 \right] dx =$$

$$= 1 - 2 \int_0^1 \left[[f'(x)]^3 - f'(x) \right] dx = 1 - 2 \underbrace{\int_0^1 [f'(x)]^3 dx}_E + 2 \int_0^1 f'(x) dx$$

$$\text{Άρα } E = 1 - 2E + 2 \int_0^1 f'(x) dx \Leftrightarrow E + 2E = 1 + 2[f(x)]_0^1 \Leftrightarrow 3E = 1 + 2f(1) - 2f(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3E = 1 + 2 \Leftrightarrow 3E = 3 \Leftrightarrow E = 1 \text{ τ.μ.}$$