

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 262

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246

A4. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

$$\begin{aligned} \text{B1. } w \in I &\Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow \overline{\frac{z-1}{z+1}} = -\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = \frac{1-z}{z+1} \Leftrightarrow \\ (\bar{z}-1)(z+1) &= (1-z)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z\bar{z} + \cancel{z} - \cancel{\bar{z}} - 1 = \cancel{\bar{z}} - 1 - z\bar{z} - \cancel{z} \Leftrightarrow \\ 2z\bar{z} &= 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

$$\text{B2. } |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \quad (1)$$

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \stackrel{(1)}{=} (z - \bar{z})^4 = [2\operatorname{Im}(z)i]^4 = 16 \operatorname{Im}^4(z)i^4 = 16 \operatorname{Im}^4(z) \in \mathbb{R}$$

$$\text{B3. Ισχύουν: } \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1} \quad (2) \text{ και } \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2} \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \stackrel{(2)}{=} \stackrel{(3)}{=} (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 = 4$$

B4. $w \in I$, άρα $w = \beta i$, με $\beta \in \mathbb{R}$

Έστω $u = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$

$$u - ui = \frac{i}{w} - w \Leftrightarrow x + yi - (x + yi)i = \frac{i}{\beta i} - \beta i \Leftrightarrow$$

$$x + yi - xi + y = \frac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow (x + y) + (y - x)i = \frac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{\beta} \\ y - x = -\beta \end{cases} \stackrel{(\cdot)}{\Rightarrow} y^2 - x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$$

άρα οι εικόνες του u ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x \cdot f(x) + 1 = e^x \Leftrightarrow x \cdot f(x) = e^x - 1$

- Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$
- $f(0) \stackrel{\text{f συνεχής}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$

Άρα $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Γ2. • Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$

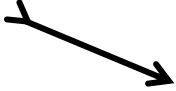
• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

$\stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = xe^x - e^x + 1, x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$\circ$	
g			

$g_{\min} = g(0) = 0$, άρα $g(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

Επομένως $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα f "1-1", άρα f αντιστρέψιμη.

$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$

$$\Gamma 3. (\varepsilon) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - 1 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow (\varepsilon) : y = \frac{1}{2}x + 1$$

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $A(0, 1)$, άρα $f(x) \geq \frac{1}{2}x + 1 \stackrel{2}{\Leftrightarrow} 2f(x) \geq x + 2$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως η εξίσωση $2f(x) = x + 2$ έχει ακριβώς μια λύση την $x = 0$.

$$\Gamma 4. \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(f(x))] \stackrel{\substack{f(x)=u \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=1}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \cdot \ln x \cdot \ln(f(x))] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(f(x))] = 0 \cdot 0 = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. 2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right)e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} \cdot f(t) \left(t + \frac{1}{t}\right) dt + 2, \quad x > 0 \quad (1)$$

Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε :

$$2f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} + \cancel{e^{f(x)} \cdot f(x) \left(x + \frac{1}{x}\right)} = \cancel{e^{f(x)} \cdot f(x) \left(x + \frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow$$

$$2f'(x) = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} \Leftrightarrow -2e^{-f(x)}f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow [2e^{-f(x)}]' = \left(x + \frac{1}{x}\right)'$$

$$\text{από συνέπειες Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι } 2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} + c \quad (2)$$

Από την (1) για $x = 1$ έχουμε :

$$2f(1) + 2e^{f(1)} = 2 \Leftrightarrow f(1) + e^{f(1)} = 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση S , με $S(x) = x + e^x, x \in \mathbb{R}$
 $S'(x) = 1 + e^x > 0$, άρα η S είναι γνησίως αύξουσα
 άρα η S είναι "1 - 1".

$$f(1) + e^{f(1)} = 1 \Leftrightarrow S(f(1)) = S(0) \stackrel{S^{-1}-1}{\Leftrightarrow} f(1) = 0$$

$$(2) \stackrel{x=1}{\Rightarrow} 2e^{-f(1)} = 2 + c \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} 2 = 2 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$(2) \stackrel{c=0}{\Rightarrow} 2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{e^{f(x)}} = \frac{x^2 + 1}{x} \Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{2} = \frac{x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right), x > 0$$

$$\Delta 2. F'(x) = \left(\int_1^x f(t) dt\right)' = f(x)$$

$$F''(x) = f'(x) = \left[\ln\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)\right]' = \frac{1}{\frac{2x}{x^2 + 1}} \cdot \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)'$$

$$= \frac{x^2 + 1}{2x} \cdot \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{2x \cdot (x^2 + 1)}$$

x	0	1	$+\infty$
$F''(x)$	+	○	-
F			

$F(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$, άρα σημείο καμπής της C_F το $\Sigma(1, 0)$

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[1, \beta]$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(1)}{\beta - 1} = \frac{F(\beta)}{\beta - 1} = \lambda_\varepsilon$$

άρα υπάρχει $\xi \in (1, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_F

στο σημείο της $M(\xi, F(\xi))$ είναι παράλληλη στην (ε)

Είναι $F''(x) < 0$ στο $[1, \beta]$, άρα η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, \beta]$, άρα το ξ είναι μοναδικό.

Δ3. Θεωρούμε συνάρτηση φ , με

$$\varphi(x) = (x-3)[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)] + (\beta-1)(x-1)(x+1)^3, x \in [1, 3]$$

- Η φ συνεχής στο $[1, 3]$ ως πράξεις συνεχών
- $\varphi(1) = -2 \cdot [F(\beta) + (1-\beta) \cdot f(\beta)] < 0$, διότι

$$\begin{aligned} 1 < \xi < \beta &\stackrel{F' \downarrow \text{ στο } [1, +\infty)}{\Rightarrow} F'(\xi) > F'(\beta) \Leftrightarrow \frac{F(\beta)}{\beta-1} > f(\beta) \Leftrightarrow \\ F(\beta) > (\beta-1) \cdot f(\beta) &\Leftrightarrow F(\beta) + (1-\beta) \cdot f(\beta) > 0 \end{aligned}$$

- $\varphi(3) = 128 \cdot (\beta-1) > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1, 3)$,

τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x_1-3)[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)] + (\beta-1)(x_1-1)(x_1+1)^3 = 0 \quad \begin{matrix} x_1-3 \neq 0 \\ x_1-1 \neq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{(x_1-3)}[F(\beta) + (1-\beta)f(\beta)]}{\cancel{(x_1-3)} \cdot (x_1-1)} + \frac{(\beta-1)\cancel{(x_1-1)}(x_1+1)^3}{(x_1-3) \cdot \cancel{(x_1-1)}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(\beta) + (1-\beta) \cdot f(\beta)}{x_1-1} + \frac{(\beta-1) \cdot (x_1+1)^3}{x_1-3} = 0$$

$$\text{άρα η εξίσωση } \frac{F(\beta) + (1-\beta) \cdot f(\beta)}{x-1} + \frac{(\beta-1) \cdot (x+1)^3}{x-3} = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$.

Δ4. Θα δείξουμε ότι :

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t \cdot f(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x x \cdot f(t) dt \leq \int_1^x t \cdot f(t) dt \Leftrightarrow$$

$$x \cdot \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t \cdot f(t) dt \leq 0 \quad (1)$$

$$\frac{t}{x} = u \Leftrightarrow t = ux$$

$$dt = x du$$

t	x	x²
u	1	x

Θεωρούμε τη συνάρτηση h ,

$$\mu\epsilon \quad h(x) = x \cdot \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t \cdot f(t) dt, \quad x > 0$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(x \cdot \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t \cdot f(t) dt \right)' \\ &= (x)' \cdot \int_1^x f(t) dt + x \cdot \left(\int_1^x f(t) dt \right)' - \left(\int_1^x t \cdot f(t) dt \right)' \\ &= \int_1^x f(t) dt + x \cdot f(x) - x \cdot f(x) = \int_1^x f(t) dt = F(x) \end{aligned}$$

$$f(A) = (-\infty, 0], \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -f(x) \geq 0$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$

$$\bullet \text{ αν } 0 < x < 1, \text{ τότε } \int_x^1 -f(t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$$

$$\bullet \text{ αν } x > 1, \text{ τότε } \int_1^x -f(t) dt > 0 \Leftrightarrow -\int_1^x f(t) dt > 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		$\circ$	
h			

$$h_{\max} = h(1) = 0$$

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι :

$$h(x) \leq 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t \cdot f(t) dt \leq 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t \cdot f(t) dt$$