



ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Πέμπτη, 09/06/2016

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Θεωρία, στη σελίδα 260 του σχολικού βιβλίου (Θ. Fermat).

A2. Θεωρία, στη σελίδα 169 του σχολικού βιβλίου.

A3. Θεωρία-Ορισμός, στη σελίδα 280 του σχολικού βιβλίου.

A4.

α. Λάθος.

β. Λάθος.

γ. Σωστό.

δ. Λάθος.

ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2^ο

B1. Το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης f είναι $D_f = (1, 5) \cup (5, 9]$.

Το σύνολο τιμών A είναι $A = f(D_f) = (-2, 5]$

B2. Έχουμε:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$

β) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$)

γ) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 3 = \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

δ) $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 4 \neq \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 2$ (Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$)

ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = 3$



B3.

α) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \text{ και } f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (1, 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (2, 3)$$

β) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)} = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (5, 7)$$

γ) θέτουμε $f(x) = u$ και έχουμε $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = u_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 5 = u_0$.

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 5} f(u) = 3$$

B4. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 3$ και $x_2 = 7$ αφού:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 \text{ (Δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{)} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 4 \neq \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 2 \text{ (Δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 7} f(x) \text{)}$$

$$x_3 = 4$$

B5. Τα σημεία στα οποία έχουμε $f'(x) = 0$ είναι $x_4 = 6$, αφού από την παρατήρηση του $x_5 = 8$

δοσμένου σχήματος σε αυτά δέχεται οριζόντια εφαπτομένη παράλληλη με τον άξονα $x'x$ οπότε (και επειδή στα σημεία αυτά είναι συνεχής) θα έχουμε $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Γ1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1» και επομένως είναι αντιστρέψιμη.

Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{y}, \text{ αν } y \geq 0 \\ x = -\sqrt[3]{-y}, \text{ αν } y < 0 \end{cases}$$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, \text{ αν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, \text{ αν } x < 0 \end{cases}$$



Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολωνυμική) με $f'(x) = 3x^2 > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $x \in (0, +\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο 0 είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3$, $x \geq 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με

$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{1}{2}x^2, \quad x \geq 0$$

Η συνάρτηση $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$) με

$g''(x) = -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$ (αφού $\eta\mu x < x \Leftrightarrow -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$, η ισότητα $\eta\mu x = x$ ισχύει μόνο για $x = 0$). Άρα η συνάρτηση $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα έχουμε:

$$x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0, \text{ δηλαδή η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty)$$

$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0$. Επομένως για κάθε $x > 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Γ3. Έστω $M(x(t_0), y(t_0))$ το σημείο της καμπύλης στο οποίο την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε $x'(t_0) = y'(t_0)$. Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $y(t) = x^3(t)$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή για κάθε $t \geq 0$ έχουμε:

$$y'(t) = [x^3(t)]' \Leftrightarrow y'(t) = 3x^2(t) \cdot x'(t)$$

Για $t = t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 3x^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα δεκτή τιμή η $x(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $y(t_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$. Επομένως το ζητούμενο σημείο

της καμπύλης για το οποίο $x'(t_0) = y'(t_0)$ είναι $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Γ4. Για το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)g(-x)dx$ (αφού η g είναι άρτια $g(x) = g(-x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$) θέτουμε:

$$-x = u \Leftrightarrow x = -u$$

$$dx = -du$$

$$x = -1 \Leftrightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Leftrightarrow u = -1$$

Άρα έχουμε διαδοχικά:



$$I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)g(-x)dx = \int_{-1}^1 x^3 g(-x)dx = -\int_{-1}^1 (-u)^3 g(u)du = \int_{-1}^1 (-u)^3 g(u)du = -\int_{-1}^1 u^3 g(u)du = -I$$

Επομένως $I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δ1.

- Για κάθε $x \in (0,1)$ η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $(0,1)$).
- Για κάθε $x > 1$ η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $(0,1)$).

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο $x_0 = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = (D' L) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$f(1) = 1$$

Άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, επομένως είναι συνεχής και στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ και άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες για $x_0 > 0$. Θα εξετάσουμε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0 = 0$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} + 1 = -\infty$$

Επομένως η ευθεία $x = 0$ (δηλαδή ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Δ2.

- Για $x \in (0,1)$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,1)$) με :

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x \in (0,1)$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e \notin (0,1)$$



Άρα $f'(x) \neq 0, x \in (0,1)$. Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$

Για $x > 1$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(1, +\infty)$ με :

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1} \right)' = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}, x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x-1-x\ln x, x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0, +\infty)$) με :

$$h'(x) = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x, x > 0$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Έχουμε:

- $x > 1 \Rightarrow h'(x) < 0$, άρα η $h(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ (αφού είναι και συνεχής στο $[1, +\infty)$) και άρα:

$$x > 1 \Rightarrow h(x) < h(1) \Rightarrow h(x) < 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

$$\text{Επομένως } h(x) < 0, x \in (0, +\infty) \text{ άρα } f'(x) = \frac{h(x)}{x(x-1)^2} < 0, x > 1.$$

Το μοναδικό πιθανό κρίσιμο σημείο είναι το $x_0 = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x(2x-1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{2x(x-1)} = -\frac{1}{2}$$

Άρα η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το $x_0 = 1$.

Δ3. i) Αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ (αφού η f είναι συνεχής στο 1). Άρα έχουμε:

$$\bullet \quad f((0,1]) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1] \text{ επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ και } f(1) = 1.$$

Αφού $0 \in (-\infty, 1]$ η f θα έχει μία ρίζα η οποία θα είναι μοναδική αφού η f είναι «1-1» ως γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

Αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ (αφού η f είναι συνεχής στο 1). Άρα έχουμε:

$$\bullet \quad f([1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = (0, 1] \text{ επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \text{ Όμως } 0 \notin (0, 1] \text{ και άρα } f \text{ δεν έχει ρίζα στο } [1, +\infty).$$

Άρα η f έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0,1]$

ii) Το Εμβαδόν του χωρίου είναι $E(\Omega) = \int_{x_0}^1 |f(x)| dx, x_0 \in (0,1]$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ έχουμε:



$$x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x) \geq 0$$

Άρα :

$$E(\Omega) = \int_{x_0}^1 f(x) dx = \int_{x_0}^1 \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) dx = \int_{x_0}^1 \frac{\ln x}{x} dx + \int_{x_0}^1 1 dx = \int_{x_0}^1 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + [x]_{x_0}^1 = I + 1 - x_0$$

$$I = \int_{x_0}^1 \ln x \cdot (\ln x)' dx = \left[\ln^2 x \right]_{x_0}^1 - \int_{x_0}^1 \ln x \cdot (\ln x) dx = -\ln x_0 - I$$

$$2I = -\ln x_0 \Rightarrow I = \frac{-\ln x_0}{2}$$

$$E(\Omega) = \frac{-\ln x_0}{2} + 1 - x_0 \quad (1)$$

Επειδή το x_0 είναι ρίζα της f έχουμε:

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0 + x_0}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 + x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0.$$

Άρα από τη σχέση (1) έχουμε:

$$E(\Omega) = -\frac{x_0^2}{2} + 1 - x_0 = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ4. Για κάθε $x > 1$ έχουμε $f'(x) < 0 \Rightarrow F''(x) < 0$. Η F' είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $x=1$ λόγω της αντίστοιχης συνέχειας της f . Άρα η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Ισχύει: $1 < x < x^2$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την F στα διαδοχικά διαστήματα $[1, x], [x, x^2]$ στα οποία ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις (Η F είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[1, +\infty)$, οπότε και στα $[1, x], [x, x^2]$).

Επομένως υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x^2)$ με:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x}$$

Έχουμε διαδοχικά :

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow F'(\xi_1) > F'(\xi_2) \Rightarrow \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} \Rightarrow \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x - 1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) - F(1) > \frac{F(x^2) - F(x)}{x} \Rightarrow xF(x) - xF(1) > F(x^2) - F(x) \Rightarrow xF(x) + F(x) > xF(1) + F(x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2)$$

Επιστημονική επιμέλεια: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών