



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 144

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 185

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδες 128-129

A4. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

$$B1. D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 + 1 \geq 2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } |x| \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} - 2 = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$B2. \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(g \circ f)(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 = \lambda$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [(g \circ f)(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

$$\stackrel{x>0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1} \right) = 0 = \beta$$

άρα η ευθεία (ε): $y = x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.



$$\text{B3.} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x - 2} \right) = -\infty$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3} > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x - 2} \right) = +\infty$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3} > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$, άρα το $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ δεν υπάρχει.

B4. • ▷ Η t είναι συνεχής στα $[0, 1)$ και $(1, 2]$ ως πράξεις συνεχών

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 1^-} t(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} t(x) = t(1) = 0, \text{ άρα } t \text{ συνεχής στο } x_0 = 1$$

Επομένως η t είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

• ▷ Η t είναι παρ/μη στα $[0, 1)$ και $(1, 2]$ ως πράξεις παρ/μων

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{t(x) - t(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - x^2) \cdot \eta\mu\pi x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot \eta\mu\pi x}{x - 1} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{t(x) - t(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} \cdot \eta\mu\pi x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 1} \cdot \eta\mu\pi x}{(\sqrt{x - 1})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x + 1} \cdot \eta\mu\pi x}{\sqrt{x - 1}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} \cdot \frac{\eta\mu\pi x + \pi\sqrt{x + 1} \cdot \sigmaυν\pi x}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}} \cdot \eta\mu\pi x + 2\pi\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 1} \cdot \sigmaυν\pi x \right) = 0 \end{aligned}$$

άρα η t είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $t'(1) = 0$

Επομένως η t είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$.

$$\bullet t(0) = t(2) = 0$$

Επομένως για την t πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, 2]$

**ΘΕΜΑ Γ**

$$\Gamma 1. f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow [f^2(x)]' = (x)'$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $f^2(x) = x + c, x > 0$ (1)

$$M(1, 1) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 1$$

$$(1) \xRightarrow{x=1} f^2(1) = 1 + c \xRightarrow{f(1)=1} 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$(1) \xRightarrow{c=0} f^2(x) = x \Leftrightarrow f^2(x) = (\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{x}, x > 0 \quad (2)$$

Έστω $\rho > 0$ ρίζα της f , δηλαδή $f(\rho) = 0$

$$(2) \xRightarrow{x=\rho} |f(\rho)| = \sqrt{\rho} \xRightarrow{f(\rho)=0} 0 = \sqrt{\rho} \Leftrightarrow \rho = 0 \rightarrow \text{ΑΤΟΠΟ}$$

άρα η συνεχής f δεν έχει ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$

Από συνέπειες Θ. Bolzano η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$
και επειδή $f(1) = 1 > 0$, θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$.

$$(2) \xRightarrow{f(x)>0} f(x) = \sqrt{x}, x > 0$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$

$$\text{Επομένως } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty).$$

Γ2. Έστω $K(x, \sqrt{x})$ τυχαίο σημείο της C_f .

$$(AK) = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 3x + \frac{9}{4} + x} = \sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}} = d(x), x \geq 0$$

$$d'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}} \right)' = \frac{\left(x^2 - 2x + \frac{9}{4} \right)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}}, x \geq 0$$



x	0	1	$+\infty$
$d'(x)$		-	+
$d(x)$			

ολ.ελ.

Η απόσταση $d(x)$ γίνεται ελάχιστη όταν $x = 1$,
δηλαδή όταν το σημείο K ταυτίζεται με το σημείο $M(1, 1)$.

Γ3. Για $x > 0$ είναι $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ και $f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$

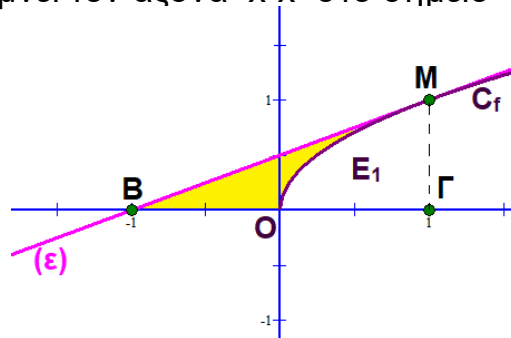
(ε) : εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, 1)$

$$(ε) : y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow (ε) : y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow (ε) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Είναι $f''(x) < 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$
και η C_f βρίσκεται κάτω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής M .

$$\text{Επίσης } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \stackrel{y=0}{\Rightarrow} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1,$$

άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-1, 0)$.



$$E = (MB\Gamma) - E_1 = \frac{1}{2} \cdot (B\Gamma) \cdot (M\Gamma) - \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$= 1 - \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 1 - \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$



~σελίδα 5 από 7~

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση h , με $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - g(x)$, $x \geq 0$

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \quad (3)$$

$$0 \leq x_1 < x_2 \xRightarrow{g \downarrow} g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow -g(x_1) < -g(x_2) \quad (4)$$

$$(3), (4) \xRightarrow{(+)} \sqrt{x_1} - g(x_1) > \sqrt{x_2} - g(x_2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

και η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα (5)

- h συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών

- $h(0) = -g(0) < 0$, αφού $0 < g(0) < 1$

$h(1) = 1 - g(1) > 0$, αφού $0 < g(1) < 1$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$,

τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$ (6)

(5), (6) $\Rightarrow$ **η εξίσωση $h(x) = 0$ [και η ισοδύναμή της $f(x) = g(x)$]**

έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ Δ

$$\begin{aligned} \Delta 1. f'(x) &= \left(\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} \right)' = \frac{(x^3)' \cdot (3x^2 - 3x + 1) - x^3 \cdot (3x^2 - 3x + 1)'}{(3x^2 - 3x + 1)^2} \\ &= \frac{3x^2 \cdot (3x^2 - 3x + 1) - x^3 \cdot (6x - 3)}{(3x^2 - 3x + 1)^2} \\ &= \frac{9x^4 - 9x^3 + 3x^2 - 6x^4 + 3x^3}{(3x^2 - 3x + 1)^2} = \frac{3x^4 - 6x^3 + 3x^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2} \\ &= \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 2x + 1)}{(3x^2 - 3x + 1)^2} = \frac{3x^2 \cdot (x - 1)^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$ ή $x = 1$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



$$\begin{aligned}
 \Delta 2. f(x) + f(1-x) &= \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1} \\
 &= \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3(1 - 2x + x^2) - 3 + 3x + 1} \\
 &= \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3 - 6x + 3x^2 - 3 + 3x + 1} \\
 &= \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3x^2 - 3x + 1} \\
 &= \frac{x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3x^2 - 3x + 1} \\
 &= \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1
 \end{aligned}$$

Επομένως $f(x) + f(1-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(0) = 0$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

Αναζητώ το πρόσημο της f στο διάστημα $[0, 1]$

Είναι $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} \geq 0$, στο $[0, 1]$, άρα $E = \int_0^1 f(x) dx$

Είναι $f(x) + f(1-x) = 1$ άρα

$$\int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = \int_0^1 1 dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = [x]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$E + \int_1^0 f(u) (-du) = 1 \Leftrightarrow$$

$$E + \int_0^1 f(u) du = 1 \Leftrightarrow$$

$$E + E = 1 \Leftrightarrow$$

$$2E = 1 \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Θέτουμε $u = 1 - x$
 $du = -dx$ ή $dx = -du$
 για $x = 0 \Rightarrow u = 1$
 για $x = 1 \Rightarrow u = 0$



$$\Delta 3. 0 \leq x \leq 1 \xRightarrow{f \uparrow} f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$$

$$0 \leq f(x) \leq 1 \xRightarrow[\substack{\cdot f(x) \\ f(x) \geq 0}]{f(x)} f^2(x) \leq f(x) \Leftrightarrow 2f^2(x) \leq 2f(x)$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$ και $x = 1$

$$\text{Επομένως } \int_0^1 2f^2(x) dx < \int_0^1 2f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 2f^2(x) dx < 2 \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 2f^2(x) dx < 2E \Leftrightarrow \int_0^1 2f^2(x) dx < 2 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 2f^2(x) dx < 1$$

$$\Delta 4. \text{Για } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right):$$

$$f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\epsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}) \Leftrightarrow$$

$$f(\eta\mu^2 x) + f(1 - \eta\mu^2 x) = f\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{e^{\eta\mu x}}\right) \xLeftrightarrow{\Delta 2}$$

$$1 = f\left(\frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{e^{\eta\mu x}}\right) \Leftrightarrow f(1) = f\left(\frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{e^{\eta\mu x}}\right) \xLeftrightarrow[\substack{f \uparrow \\ f \text{ "1-1"}}]$$

$$1 = \frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{e^{\eta\mu x}} \Leftrightarrow \frac{e^{\eta\mu x}}{\eta\mu x} = \frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x} \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \in (0, 1)$

$$g'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x - 1)}{x^2} < 0$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$

$$(1) \Leftrightarrow g(\eta\mu x) = g(\sigma\upsilon\nu x), \text{ με } 0 < \eta\mu x < 1 \text{ και } 0 < \sigma\upsilon\nu x < 1,$$

αφού $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και g "1-1" ως γνησίως φθίνουσα,

$$\text{άρα } \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{4}$$

$$\text{και επειδή } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ θα είναι } x = \frac{\pi}{4}.$$