



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$.

- Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , θα είναι $f'(\xi) = 0$,

$$\text{άρα } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

- Αν $x_1 > x_2$ τότε όμοια εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. στο $[x_2, x_1]$ αποδεικνύουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση $f(x_1) = f(x_2)$.

A2. Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, b) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

A3. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) και
- $f(a) = f(b)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε : $f'(\xi) = 0$

A4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Λάθος



ΘΕΜΑ Β

$$\begin{aligned} \text{B1. } f'(x) &= \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} \right)' = - \frac{1}{(1 - \sqrt{x})^2} \cdot (1 - \sqrt{x})' = - \frac{1}{(1 - \sqrt{x})^2} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1 - \sqrt{x})^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty) \end{aligned}$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$,

άρα η f είναι 1-1,

άρα **η f είναι αντιστρέψιμη**.

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - \sqrt{x}} = -\infty,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \sqrt{x}) = 0$ και $1 - \sqrt{x} < 0$, για $x > 1$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \sqrt{x}} = 0, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f

$$D_{f^{-1}} = f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0)$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} = \frac{y-1}{y} \Rightarrow x = \left(\frac{y-1}{y} \right)^2 \Rightarrow f^{-1}(y) = \left(\frac{y-1}{y} \right)^2$$

Επομένως **$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2, x < 0$**



B2. $D_g = [0, +\infty)$

$$D_{g \circ f^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} \text{ και } f^{-1}(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 0) \text{ και } f^{-1}(x) \in [0, +\infty)\}$$

$$= \{x \in (-\infty, 0) \text{ και } \underbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}_{\text{ισχύει}} \geq 0\} = (-\infty, 0)$$

$$h(x) = (g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = \left|\frac{x-1}{x}\right| \stackrel{x < 0}{=} \frac{x-1}{x}$$

Επομένως $(g \circ f^{-1})(x) = h(x) = \frac{x-1}{x}, x < 0.$

B3. $D_h = (-\infty, 0)$

- κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[(x-1) \cdot \frac{1}{x} \right] = +\infty,$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1 < 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$

άρα ηC_h έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ ($y'y$).

- οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

άρα ηC_h έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = 1$.

B4. Είναι $-1 \leq \eta \mu \frac{1}{x} \leq 1 \stackrel{e^{-h(x)} > 0}{\Rightarrow} -e^{-h(x)} \leq e^{-h(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \leq e^{-h(x)}$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-h(x)} &= \lim_{\substack{u = h(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = +\infty}} e^{-u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^u} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} [-e^{-h(x)}] &= \lim_{\substack{u = h(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = +\infty}} (-e^{-u}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^u} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο} \\ \Rightarrow \\ \text{παρεμβολής} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-h(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$$



Γ2. $t'(\theta) = \left(\frac{1}{4}\theta + \sin \frac{\theta}{2} \right)' = \frac{1}{4} - \eta\mu \frac{\theta}{2} \cdot \left(\frac{\theta}{2} \right)' = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \eta\mu \frac{\theta}{2}, \theta \in [0, \pi]$

$$t'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \eta\mu \frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \cdot \eta\mu \frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \eta\mu \frac{\theta}{2} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu \frac{\theta}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{6}$$

και επειδή $0 \leq \theta \leq \pi$, θα είναι $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, άρα

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$t'(\theta)$	+	○	-
$t(\theta)$			

Η t παρουσιάζει τοπικό (ολικό) μέγιστο για $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Γ3. Από θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής με την t στο διάστημα $[0, \pi]$ προκύπτει ότι η συνάρτηση t παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το οποίο είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα της.

➤ τοπικό ελάχιστο για $\theta = 0$ την τιμή $t(0) = 1$

➤ τοπικό ελάχιστο για $\theta = \pi$ την τιμή $t(\pi) = \frac{\pi}{4} < 1$

άρα η t παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $\theta = \pi$.

Επομένως με την επιλογή (III) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός.



ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{-g(x)} + \alpha x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - \alpha x} + \alpha x) \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - \alpha x} + \alpha x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{\alpha}{x} \right)} + \alpha x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{\alpha}{x}} + \alpha x \right) \\ &\stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \sqrt{1 - \frac{\alpha}{x}} + \alpha x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha}{x}} + \alpha \right) \right] \end{aligned}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha}{x}} + \alpha \right) = 1 + \alpha$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{x} = 0$.

- Αν $1 + \alpha < 0$, τότε $L = -\infty \rightarrow$ ΑΤΟΠΟ διότι $L \in \mathbb{R}$
- Αν $1 + \alpha > 0$, τότε $L = +\infty \rightarrow$ ΑΤΟΠΟ διότι $L \in \mathbb{R}$
- Άρα $1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

Επαλήθευση για $\alpha = -1$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\cancel{x} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \in \mathbb{R}, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

Επομένως $\boxed{\alpha = -1}$.



Δ2. $f'(x) = (e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}$.

ε : εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

$$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow \varepsilon : y - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon : y - e^{x_0} = x \cdot e^{x_0} - x_0 \cdot e^{x_0} \Leftrightarrow \varepsilon : y = x \cdot e^{x_0} - x_0 \cdot e^{x_0} + e^{x_0} \quad (1)$$

$$M(-1, 0) \in \varepsilon \Rightarrow 0 = \cancel{-e^{x_0}} - x_0 \cdot e^{x_0} + \cancel{e^{x_0}} \Leftrightarrow x_0 \cdot e^{x_0} = 0 \stackrel{e^{x_0} > 0}{\Leftrightarrow} x_0 = 0$$

$$(1) \stackrel{x_0 = 0}{\Rightarrow} \varepsilon : y = x \cdot e^0 - 0 \cdot e^0 + e^0 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon : y = x + 1}$$

$$g'(x) = (-x^2 - x)' = -2x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$g'(x) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow -2x - 1 = 1 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

$$g(-1) = -(-1)^2 - (-1) = -1 + 1 = 0 \text{ και } g'(-1) = 1$$

η : εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(-1, g(-1))$

$$\eta : y - g(-1) = g'(-1) \cdot (x + 1) \Leftrightarrow \eta : y - 0 = 1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow \eta : y = x + 1$$

άρα η εφαπτομένη της C_g στο B ταυτίζεται με την ε ,

δηλαδή **η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη C_g .**

Δ3. $f''(x) = (e^x)' = e^x > 0, x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

και η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής A

άρα $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$ **(2)**

$$g''(x) = (-2x - 1)' = -2 < 0, x \in \mathbb{R}, \text{ άρα η } g \text{ είναι κοίλη στο } \mathbb{R}$$

και η C_g βρίσκεται κάτω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής B

άρα $g(x) \leq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = -1$ **(3)**

Από (2) και (3) έχουμε $f(x) \geq x + 1 \geq g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και οι ισότητες ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ, άρα

$$\boxed{f(x) > g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$



Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση h , με

$$h(x) = (x - k - 1) \cdot [f(x - 1) - x] + (x - k) \cdot [f(x) - g(x)], \quad x \in [k, k + 1].$$

- Η h είναι συνεχής στο $[k, k + 1]$ ως πράξεις συνεχών
- $h(k + 1) = f(k + 1) - g(k + 1) > 0$, διότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $h(k) = -[f(k - 1) - k] = k - f(k - 1) < 0$, διότι $f(x) > x + 1$, για κάθε $x \neq 0$ (σχέση 2 στο Δ3), άρα για $x = k - 1$, με $k \neq 1$ είναι $f(k - 1) > k$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (k, k + 1)$, τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_0 - k - 1) \cdot [f(x_0 - 1) - x_0] + (x_0 - k) \cdot [f(x_0) - g(x_0)] = 0 \quad \begin{matrix} x_0 \neq k \\ \Leftrightarrow \\ x_0 \neq k+1 \end{matrix}$$

$$\frac{(x_0 - k - 1) \cdot [f(x_0 - 1) - x_0]}{(x_0 - k - 1) \cdot (x_0 - k)} + \frac{(x_0 - k) \cdot [f(x_0) - g(x_0)]}{(x_0 - k - 1) \cdot (x_0 - k)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_0 - 1) - x_0}{x_0 - k} + \frac{f(x_0) - g(x_0)}{x_0 - k - 1} = 0$$

$$\text{δηλαδή η εξίσωση } \frac{f(x - 1) - x}{x - k} + \frac{f(x) - g(x)}{x - k - 1} = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(k, k + 1)$, με $k \in \mathbb{R} - \{1\}$.