

Σχολικό έτος 2021 – 22

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΕΛΙΔΕΣ: ΕΞΙ (6)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α**A1.** Θεωρία**A2.** Θεωρία**A3.** Θεωρία**A4.** α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β**B1.** Έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη και η $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

B2. Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για τη συνάρτηση $k(x) = f(x) - g(x)$ στο διάστημα $[e, e^2]$.

- Η k είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $k(e) = \frac{1}{e-1} > 0$
- $k(e^2) = \frac{2-e^2}{e^2-1} < 0$

Συνεπώς, υπάρχει τουλάχιστον ένα τουλάχιστον $x_0 \in (e, e^2)$ τέτοιο, ώστε:

$$k(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = g(x_0).$$

B3. Έχουμε,

$$D_{g \circ f} = \left\{ x > 1 \text{ και } \frac{x}{x-1} > 0 \right\} = (1, +\infty), \quad g(f(x)) = \varphi(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

B4. Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ διότι $\frac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0$.

Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το $(1, +\infty)$. Επομένως, οι συναρτήσεις h , φ δεν είναι ίσες διότι δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

Σημείωση: Δεν ζητάει η άσκηση να βρούμε το ευρύτερο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\varphi(x) = h(x)$ για κάθε $x \in A$. Επομένως, η άσκηση ολοκληρώνεται στο παραπάνω σημείο και είναι περιττή η λύση ότι $\varphi(x) = h(x)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. Εύρεση του $f(0)$, δηλαδή αναζητούμε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ διότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ως παραγωγίσιμη.

Α' τρόπος	Β' τρόπος
Θέτουμε: $k(x) = \frac{f(x) - \eta\mu x}{x}$, $x \neq 0$ με $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0.$ Έχουμε, $k(x) = \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(x) = xk(x) + \eta\mu x$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xk(x) + \eta\mu x) \Rightarrow f(0) = 0.$	Έχουμε, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ $= \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - \eta\mu x + \eta\mu x)$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - \eta\mu x}{x} \cdot x + \eta\mu x \right).$ $= 0 \cdot 0 + 0$ $= 0$

Εύρεση του $f'(0)$ δηλαδή αναζητούμε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Α' τρόπος	Β' τρόπος
Είναι, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x + \eta\mu x}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \right)$ $= 0 + 1$ $= 1$ άρα $f'(0) = 1.$	Είναι, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xk(x) + \eta\mu x}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(k(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right)$ $= 0 + 1$ $= 1$ άρα $f'(0) = 1.$

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x.$$

Γ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)f''(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) = 2x \Leftrightarrow \left[(f'(x))^2 \right]' = (x^2)'$$

και επειδή οι συναρτήσεις $(f'(x))^2$ και x^2 είναι συνεχείς, από συνέπειες Θ.Μ.Τ. υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$(f'(x))^2 = x^2 + c.$$

Όμως για $x=0$ έχουμε:

$$(f'(0))^2 = c \Rightarrow c=1$$

άρα

$$(f'(x))^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow |f'(x)| = \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Όμως

$$|f'(x)| \neq 0 \Leftrightarrow f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και επειδή η f' είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) από τις συνέπειες του Θ. Bolzano έπεται ότι η f' διατηρεί πρόσημο και επειδή

$$f'(0) = 1 > 0 \text{ άρα } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Τελικά,

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)f''(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \cdot f''(x) = x \Leftrightarrow f''(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Επομένως,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
f			

δηλαδή η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$. Η C_f έχει σημείο καμπής το $A(0, f(0))$ ή $A(0, 0)$.

Γ4. Είναι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η f είναι συνεχής, από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1-1$, επομένως ορίζεται η f^{-1} .

Από το σημείο καμπής $A(0, 0)$ της C_f και την εφαπτομένη της $y = x$ στο σημείο $x_0 = 0$ που τη «διαπερνάει» έχουμε,

- $f(x) > x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- $f(x) < x$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, άρα $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1 & , -1 \leq x \leq 0 \\ e^{x \ln x} & 0 < x \leq \frac{2}{e} \end{cases}$$

άρα

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3 & , -1 < x < 0 \\ e^{x \ln x} (\ln x + 1) & , 0 < x < \frac{2}{e} \end{cases}$$

άρα η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$ και στο διάστημα $\left(0, \frac{2}{e}\right]$.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^3 + 3x + 1) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} e^u = 1$$

διότι

$$u = x \ln x \quad \text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 = u_0$$

άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ συνεπώς η f είναι συνεχής.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 3x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 3) = 3$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[e^{x \ln x} (\ln x + 1) \right] = -\infty$$

Επομένως, η f είναι μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Δ2. i. Ένα κρίσιμο σημείο της f είναι το $x_1 = 0$ στο οποίο η f δεν παραγωγίζεται. Για κάθε $x \in (-1, 0)$ έχουμε:

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3 \underbrace{(x-1)}_{-} \underbrace{(x+1)}_{+} > 0$$

άρα η f δεν παρουσιάζει κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του διαστήματος $[-1, 0]$.

Σημείωση: Ενώ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 + 3x + 1 - (-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 + 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 + 3}{1} = 0$$

άρα $f'(-1) = 0$ το $x_2 = -1$ ΔΕΝ είναι παρόλα αυτά κρίσιμο σημείο της f στο διάστημα $\Delta = [-1, 0]$ αφού τα κρίσιμα σημεία της τα εξετάζουμε στα εσωτερικά σημεία του διαστήματος $\Delta = [-1, 0]$.

Τέλος, για κάθε $x \in \left(0, \frac{2}{e}\right)$ έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^x (\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

που είναι δεκτή, άρα $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ οπότε το $x_3 = \frac{1}{e}$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

Συνολικά, τα σημεία 0 και $\frac{1}{e}$ είναι κρίσιμα της f .

ii. Πίνακας μεταβολών της f

x	-1	0	$\frac{1}{e}$
	$\frac{2}{e}$		
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Επομένως, η f είναι συνεχής και

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = [-1, 0]$ άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $f(A_1) = [f(-1), f(0)] = [-1, 1]$

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = \left[0, \frac{1}{e}\right]$ άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό

$$\text{είναι } f(A_2) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, 1\right] = \left[e^{-\frac{1}{e}}, 1\right]$$

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_3 = \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]$ άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό

$$\text{είναι } f(A_3) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f\left(\frac{2}{e}\right)\right] = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}\right].$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f\left(\left[-1, \frac{2}{e}\right]\right) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [-1, 1]$$

διότι $-1 < 0 < e^{-\frac{1}{e}}$ και $\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{e} < 1 \Leftrightarrow 2 < e$ που ισχύει.

Δ3. Για κάθε $\alpha, \beta \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ έχουμε:

$$-1 \leq f(\alpha) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2f(\alpha) \leq 2 \text{ και } -1 \leq f(\beta) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3f(\beta) \leq 3 .$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των προηγούμενων σχέσεων έχουμε:

$$-5 \leq 2f(\alpha) + 3f(\beta) \leq 5 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5} \leq 1$$

άρα ο αριθμός $\eta = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f και επειδή η f είναι συνεχής,

από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5} .$$

Δ4. Είναι,

$$x \cdot f(x) - f'(x) = x \cdot x^x - x^x (\ln x + 1) = x^x (x - \ln x - 1) \geq 0$$

διότι, $\ln x \leq x - 1, x > 0$ άρα

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} (xf(x) - f'(x)) dx > 0$$

γιατί υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 (πχ. $x_0 = e$) τέτοιο ώστε $e \cdot f(e) - f'(e) = e^e (e - 2) > 0$.