ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76, Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 155, Ορισμός

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 216

Α4. α) Σ, β) Σ, γ)Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

g: $[1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{g(x)} = \sqrt{\mathrm{x}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}$

h: $[1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{h(x)} = \sqrt{\mathrm{x}} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}$

Β1. $f(x) = \frac{\mathrm{g(x)}}{\mathrm{h(x)}}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{\mathrm{x}}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}}{\sqrt{\mathrm{x}}-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Πρέπει $\sqrt{\mathrm{x}} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{x}} \neq \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}} \Leftrightarrow \mathrm{x} \neq 1$

Άρα $A_f = A_g \cap A_h - \{x\epsilon\, h: h(x) = 0\}$

Άρα $A_f = (1,+\infty)$

r(x)= $\mathrm{g(x)} \cdot \mathrm{h(x)}$

r(x)= $\left(\sqrt{\mathrm{x}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}\right) \cdot \left(\sqrt{\mathrm{x}} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}}}\right) \Leftrightarrow r(x) = \sqrt{x}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \Leftrightarrow r(x) = x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$$r(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

Άρα $A_r = A_g \cap A_h = [1,+\infty)$

Β2. Η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων με:

$$f'(x) = \frac{(x+1)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot(x+1)}{(x-1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Άρα $f'(x) < 0\ \forall\, x > 1, άρα\ f(x)\ στο\ (1,+\infty), άρα\ είναι$ 1-1, $άρα\ αντιστρέφεται$

$$f(x)=\psi \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}=\psi \Leftrightarrow x+1=\psi\cdot x-\psi \Leftrightarrow x-\psi\cdot x= -\psi-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\psi)\cdot x=-(\psi+1) \Leftrightarrow x=\frac{-(\psi+1)}{-(\psi-1)} \Leftrightarrow x=\frac{\psi+1}{\psi-1}$$

Άρα $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1} f^{-1}(x) = f(x)$

$A_{f^{-1}}=(1,+\infty)$

Πρέπει $\frac{\psi+1}{\psi-1}>1 \Leftrightarrow \psi+1>\psi-1 \Leftrightarrow 0\psi>-2\ \pi o \upsilon\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota$

Β3. $r(x)= \ x-\frac{1}{x} \quad [1,+\infty)$

<u>Πλάγιες ασύμπτωτες</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x}{1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\epsilon\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[r(x)-x]= \lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

Άρα στο $+\infty$ έχουμε πλάγια ασύμπτωτη την ψ= x.

Συνεπώς δεν έχουμε οριζόντια.

Επίσης, δεν έχουμε κατακόρυφη, διότι το $A_r=[1,+\infty)$

Β4. $(f^{-1}f(x))^2=1+4\,r(x), x>1$

$x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$x^2=1+4x-\frac{4}{x}$

$x^3-4x^2-x+4=0$

Προφανής ρίζα το χ=1 ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ

Κάνουμε Horner:

1	-4	-1	4	$1=X_1$
↓	1	-3	-4	
1	-3	-4	0	

π.χ. x^2-3x-4

$x^2-3x-4=0$

Δ= $\beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 9 + 16 = 25$

$$X_{2,3} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2}\begin{cases} X_2 = 4 \\ X_3 = -1 \text{ ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ}\end{cases}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή f συνεχής στο $X_0 = 2$ είναι $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ (1)

- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(-2x + 4 + e^{\lambda}\right) = -4 + 4 + e^{\lambda} = e^{\lambda}$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = -4 + 8 - 3 + \lambda = \lambda + 1$
- *f(2)= λ+1*

Η (1) γίνεται $e^{\lambda} = \lambda + 1 \Leftrightarrow e^{\lambda} - \lambda - 1 = 0$

Έστω g(x)= $e^x - x - 1, x\epsilon\mathbb{R}$

Προφανής ρίζα της g(x) είναι το x=0, διότι g(0)= $e^0 - 0 - 1 = 0$

Μονοτονία της g(x): g'(x)= $e^x - 1$

Πρόσημο της g'(x): g'(x)$\geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	-∞	0	+∞
g'(x)	-	0	+
g(x)	↘		↗
		0	

Επειδή το g(0)= 0 είναι ολικό ελάχιστο της g(x), το x=0 είναι μοναδική ρίζα της g(x).

Άρα η εξίσωση $e^{\lambda} - \lambda - 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα το λ=0

Γ2. Για λ= 0 είναι $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$

Βρίσκουμε την $f'(x)$

α) Αν $x\epsilon\ [0,2), τότε\ η\ f(x) = -2x + 5$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2$

β) Αν $x > 2, τότε\ η\ f(x) = x^2 + 4x - 3$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x + 4$

γ) $X_o = 2$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{-2x + 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-(x^2 - 4x + 4)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{-(x - 2)^2}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\left[-(x - 2)\right] = 0$$

Άρα η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $X_o = 2$

Είναι $f'(x) = \begin{cases} -2, & 0 \le x < 2 \\ -2x+4, & x > 2 \end{cases}$

i. Αν $x \epsilon\ [0,2), τότε\ f'(x) = -2.$ $Άρα\ f(x) \downarrow στο\ [0,2)$

ii. Αν $x \epsilon\ (2,+\infty), τότε\ x > 2 \Leftrightarrow -2x < -4 \Leftrightarrow -2x+4 < 0. Άρα\ f'(x) < 0$

Επομένως $f \downarrow στο\ (2,+\infty)$

iii. Εξετάζουμε αν η $f(x)\ είναι \downarrow στο\ A_f = [0,2) \cup [2,+\infty) = [0,+\infty)$

Έστω $Δ_1$= $[0,2)$ και $Δ_2$= $[2,+\infty)$

Επειδή $f \downarrow στο\ Δ_1\ είναι\ f(Δ_1) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x), f(0)\right] = (1,5]$

Επειδή $f \downarrow στο\ Δ_2 = [2,+\infty)\ είναι\ f(Δ_2) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), f(2)] = (-\infty, 1]$

Είναι $f(Δ_1) \cap f(Δ_2) = \emptyset\ και\ η\ f(x)\ είναι\ συνεχής$

Η $f(x)\ έχει\ ακρότατο\ το\ f(0) = 5$

Άρα το $f \downarrow στο\ Δ_1 \cup Δ_2 = A_f$

Γ3. i. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο [0, 3]

Η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο (0, 3), διότι στο $X_o = 2\ δεν\ είναι\ παραγωγίσιμη$

Άρα η $f(x)$ δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0, 3]

ii. $λ_{ΔΕ} = \frac{y_E - y_Δ}{X_E - X_Δ} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{0-5}{3} = \frac{-5}{3}$

Εξετάζουμε αν υπάρχει ξϵ (0,3): $f'(ξ) = \frac{-5}{3}$

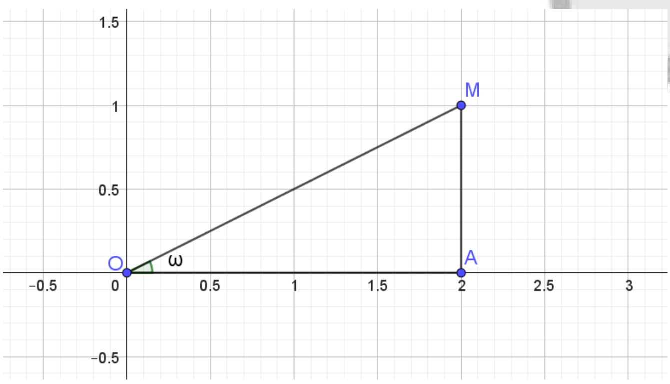
Προφανώς το ξ δεν ανήκει στο $[0,2)$ διότι τότε $f'(ξ) = -2 \neq \frac{-5}{3}$

Εξετάζουμε αν υπάρχει ξϵ (2,3): $f'(ξ) = \frac{-5}{3} \xRightarrow{f'(x) = -2x+4} -2ξ + 4 = \frac{-5}{3} \Leftrightarrow 2ξ = 4 + \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow 2ξ = \frac{17}{3} \Leftrightarrow ξ = \frac{17}{6}\ \epsilon\ (2,3)$

$Άρα\ ξ = \frac{17}{6}$

Γ4.



Έστω Μ το σημείο που κινείται κατακόρυφα τότε y'(t)= $\frac{1}{2}\frac{\mu o \nu}{sec}$

εφω= $\frac{AM}{OA}$

Δηλαδή εφ(t)= $\frac{y(t)}{2}$

$$[\varepsilon\varphi\omega(t)]' = \left[\frac{y(t)}{2}\right]' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{y}'(\mathrm{t})$$

Για t= t_0 είναι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)} \cdot \omega'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{y}'(t_0) \quad (1)$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)} = 1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t_0) = 1 + \frac{y^2(t_0)}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Η (1) γίνεται $\frac{5}{4} \cdot \omega'_{(t_0)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \cdot \omega'_{(t_0)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'_{(t_0)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \omega'_{(t_0)} = \frac{1}{5}\ rad/sec$

ΘΕΜΑ Δ

$$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R} \ \ \mu\varepsilon\ f(x) = \frac{lnx + ax}{x}$$

Δ1. $f'(x) = \frac{(lnx+ax)' \cdot x - (lnx+ax) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{x}+a\right) \cdot x - (lnx+ax)}{x^2} = \frac{1+ax-lnx-ax}{x^2} = \frac{1-lnx}{x^2}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-lnx}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq lnx \Leftrightarrow lne \geq lnx \Leftrightarrow x \leq e \overset{x>0}{\Longrightarrow} f(e) = \frac{lne+ae}{e} = \frac{1+ae}{e}$

x	0		e		+∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		-∞ ↗		↘	a

$f(e)$

$o.\mu.$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx + ax}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{lnx}{x} + a\right) = (-\infty) + a = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{lnx + ax}{x} = \lim\left(\frac{lnx}{x} + a\right) = 0 + a = a, \delta\iota\acute{o}\tau\iota$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{(lnx)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Έστω Δ_1= (0, e] και Δ_2= [e, +∞)

Επειδή $f \uparrow \sigma\tau o\ \Delta_1\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ f(\Delta_1) = (\lim_{x\to +\infty} f(x), f(e)] = \left(-\infty, \frac{1+ae}{e}\right]$

Επειδή $f \downarrow \sigma\tau o\ \Delta_2\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ f(\Delta_2) = (\lim_{x\to +\infty} f(x), f(e)] = \left(0, \frac{1+ae}{e}\right]$

Άρα $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left(-\infty, \frac{1+ae}{e}\right] \cup \left(0, \frac{1+ae}{e}\right] = \left(-\infty, \frac{1+ae}{e}\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e} + a\right]$

Από υπόθεση είναι $f(A) = (-\infty, 1 + \frac{1}{e}]$. Άρα $\frac{1}{e} + a = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha = 1$

Δ2. Για α=1 είναι $f(x) = \frac{lnx+x}{x} = \frac{lnx}{x} + 1, x > 0$

- Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{-ln2}{\frac{1}{2}} + 1 = -2ln2 + 1 = \ -ln4 + 1 = -ln4 + lne < 0$
- $f(1) = \frac{ln1}{1} + 1 = 0 + 1 = 1 > 0$

Είναι $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$

Από Θεώρημα Bolzano $\exists\ X_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) : f(\ X_0) = 0, επειδή\ f \uparrow στο \left(\frac{1}{2}, 1\right)\ το\ \ X_0$

είναι μοναδικό

Δ3. i. $f(4) = \frac{ln4}{4} + 1 = \frac{ln2^2}{4} = \frac{2ln2}{4} + 1 = \frac{ln2}{2} + 1 = f(2)$

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = f(4) = \frac{ln2}{2} + 1\ (E)$

α) Αν $x \in$ (0, e], τότε η (Ε) γίνεται $f(x) = f(2) \xLeftrightarrow{f\uparrow,\ \ f\ 1-1} x = 2$

β) Αν $x \in$[e, +∞) τότε η (Ε) γίνεται $f(x) = f(4) \xLeftrightarrow{f\downarrow,\ \ f\ 1-1} x = 4$

ii. $2^x \leq x^2 \Leftrightarrow ln2^x \leq lnx^2 \Leftrightarrow x \cdot ln2 \leq 2lnx \overset{x>0}{\Leftrightarrow} ln2 \leq 2\frac{lnx}{x} \overset{:2}{\Leftrightarrow} \frac{ln2}{2} \leq \frac{lnx}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{ln2}{2} + 1 \leq \frac{lnx}{x} + 1 \Leftrightarrow f(2) \leq f(x)\ \ (*)$

α) Αν $x \in$ (0, e], είναι $f \uparrow$ και η $(*)$ γίνεται $2 \leq x, δηλαδή\ x \in [2, e]$

β) Αν $x \in$[e, +∞) είναι $f \downarrow$ και η $(*)$ γίνεται $f(4) \leq f(x) \Leftrightarrow 4 \geq x\ δηλαδή\ e \leq x \leq 4$

Δηλαδή $x \in [e, 4]$

Από α, β η $(*)$ αληθεύει, όταν $x \in [2, e] \cup [e, 4] = [2,4]$

Δ4. Ε= $\int_{-ln2}^{0} |g(x)| dx = \int_{-ln2}^{0} \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx$

Θέτουμε $e^x = u > 0.\ \ Τότε$: x= lnu

dx= $\frac{1}{u} du$

Για x= -ln2 είναι u= $e^{-ln2} = e^{ln2^{-1}} = \frac{1}{2}$

Για x= 0 είναι u= $e^0 = 1$

Άρα Ε= $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \cdot \frac{1-lnu}{u} \right| \cdot \frac{1}{u} du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \cdot \frac{1-lnu}{u} \cdot \frac{1}{u} \right| du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \cdot \frac{1-lnu}{u^2} \right| du =$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u) \cdot f'(u)| du\ (**)$

$\forall u \in \left[\frac{1}{2},\ X_0\ \right]\ είναι\ f(u) \leq 0\ και\ f'(u) > 0$

$και\ \forall u \in [X_0, 1]\ είναι\ f(u) \geq 0\ και\ f'(u) > 0$

Από $(**)είναι\ E = \int_{\frac{1}{2}}^{X_0} |f(u) \cdot f'(u)| du + \int_{X_0}^{1} |f(u) \cdot f'(u)| du =$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{X_0} -f(u) \cdot f'(u) du + \int_{X_0}^{1} f(u) \cdot f'(u) du =$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{X_0} f(u) \cdot f'(u) du + \int_{X_0}^{1} f(u) \cdot f'(u) du =$$

$$= -\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{X_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{X_0}^{1} = -\frac{1}{2}[f^2(u)]_{\frac{1}{2}}^{X_0} + \frac{1}{2}[f^2(u)]_{X_0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[f^2(X_0) - f^2\left(-\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}[f^2(1) - f^2(X_0)] \quad \underline{\underline{f(X_0) = 0}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[0 - f^2\left(-\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}[f^2(1) - 0] \quad \underline{\underline{f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2ln2 + 1}}$$

$$f(1) = 1$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot [-(-2ln2 + 1)^2] + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}(4ln^2 2 - 4ln2 + 1) + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(4ln^2 2 - 4ln2 + 2) = 2ln^2 2 - 2ln2 + 1 > 0$$