



Θέμα Α:

A₁. Σελίδα 111 σχολικού βιβλίου.

A₂. Σελίδα 104 σχολικού βιβλίου.

A₃. Σελίδα 128 σχολικού βιβλίου.

A₄. α) Λ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

Θέμα Β:

B₁. $A_f = A_{g \circ h} = \{x \in A_h : h(x) \in A_g\} = \{x \in (0, +\infty) : h(x) \in R\}$

Άρα $A_f = (0, +\infty)$

$$f(x) = g \circ h(x) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}$$

$$B_2. \text{ i. } f'(x) = \left(\frac{4-x^2}{x} \right)' = \frac{(4-x^2)'x - (4-x^2) \cdot x'}{x^2} = \frac{-2x \cdot x - (4-x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} = -\frac{x^2 + 4}{x^2}$$

Άρα $f'(x) < 0 \forall x \in (0, +\infty)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα $\forall x \in (0, +\infty)$

ii. ισχύει:

$$e < \pi \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{4 - e^2}{e} > \frac{4 - \pi^2}{\pi} \stackrel{\frac{\pi}{4-e^2} < 0}{\Leftrightarrow} \frac{\pi(4 - e^2)}{e(4 - e^2)} < \frac{\pi(4 - \pi^2)}{\pi(4 - e^2)} \Leftrightarrow \frac{\pi}{e} < \frac{4 - \pi^2}{4 - e^2}$$

B₃. Βρίσκουμε την ασύμπτωτη της f στο 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 - x^2}{x} = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Άρα η $f(x)$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη το άξονα $x'x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(\frac{4}{x^2} - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{4}{x^2} - 1) = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4 - x^2}{x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + x^2 + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

Άρα η $f(x)$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y = -x$

$$B_4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)x}{-x^2(-\frac{4}{x^2}+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1+x^2)}{-x(-\frac{4}{x^2}+1)} = 0 \cdot \text{φραγμένη} = 0$$



Θέμα Γ

$$\Gamma_1. \int_2^3 xf(x)dx = \int_2^3 x \left(\frac{1}{x} + a \right) dx = \int_2^3 (1 + ax) dx = \left[x + a \cdot \frac{x^2}{2} \right]_2^3 = 3 + \frac{9a}{2} - (2 + 2a) = 3 + \frac{9a}{2} - 2 - 2a = 1 - \frac{5a}{2}$$

$$\text{Από υπόθεση είναι } 1 - \frac{5a}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{5a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Για $a=0$ είναι:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Gamma_2. \text{ i. } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1$$

$$\text{Άρα είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$$

Επομένως $f'(1) = -1$ άρα ορίζεται εφαπτομένη (ε) της C_f στο $x_0=1$.

$$\text{ii. (ε): } y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

$$\text{Είναι } \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = \frac{3\pi}{4}$$

Γ_3 . Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με $f'(x) = 2x - 3 < 0$ άρα $f(x) \downarrow$ στο $(-\infty, 1)$ άρα για $\forall x_1 < x_2 \in (-\infty, 1]$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} < 0$ άρα $f(x) \downarrow$ στο $(1, +\infty)$

Άρα για $\forall x_1 < x_2 \in [1, +\infty)$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$

Επειδή $f'(x) < 0 \forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και f συνεχής στο $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ άρα η f είναι 1-1 στο A_f .

Επειδή η f συνεχής και γν. φθίνουσα στο $A_f = \mathbb{R}$ είναι $f(A) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

Γ_4 . Η (ε): $y = -x + 2$ τέμνει τον x' στ σημείο $B(2,0)$ επειδή η C_f με $x \geq 1$ είναι κυρτή η (ε) είναι κάτω από την C_f .

$$\text{Είναι } E = E_1 + E_2(1)$$



$$E_1 = \int_1^2 [f(x) - y_e] dx$$

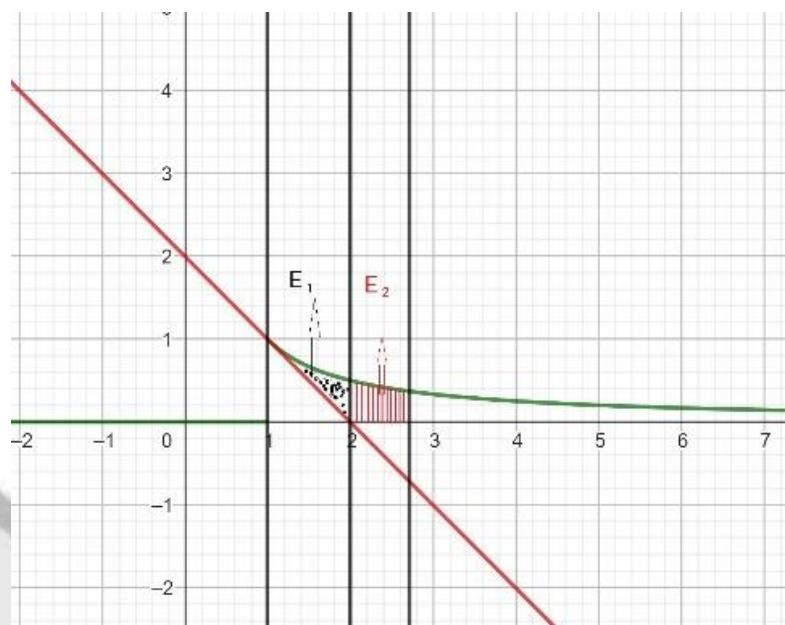
$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - (-x + 2) \right] dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) dx = \left[\ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2$$
$$= \ln 2 - \ln 1 + 2 - \frac{1}{2} - 4 + 2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τμ}$$

$$E_2 = \int_2^e \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_2^e = \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2 \text{ τμ}$$

$$\text{Άρα } E = \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = 1/2 \text{ τμ}$$



Γ4



Η (ε): $y = -x + 2$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο Β (2,0)

Επειδή η Cf με $x \geq 1$ είναι κυρτή η (ε) βρίσκεται κάτω από την Cf

Είναι $E = E_1 + E_2$ ①

$$E_1 = \int_1^2 [f(x) - y_\varepsilon] dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - (-x + 2) \right] dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) dx = [\ln |x| + \frac{x^2}{2} - 2x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 + 2 - \frac{1}{2} - 4 + 2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \text{τετρ. μον.}$$

$$E_2 = \int_2^e \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_2^e = \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2$$

Από ① είναι $E = \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2}$ τετρ. μον.

Θέμα Δ

Δ1) Έστω $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1}$ τότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = l \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 2x = g(x) \cdot (x-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \cdot (x-1)] = l \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} [\ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa - 2x] = 0 \Leftrightarrow \ln 1 - 1 + \kappa - 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$$

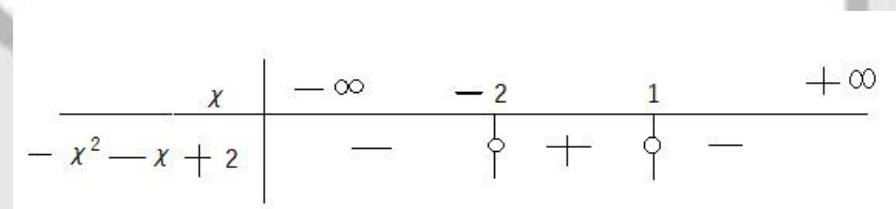
Για $\kappa = 3$ είναι $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, \quad x \in (0,2)$

Δ2)

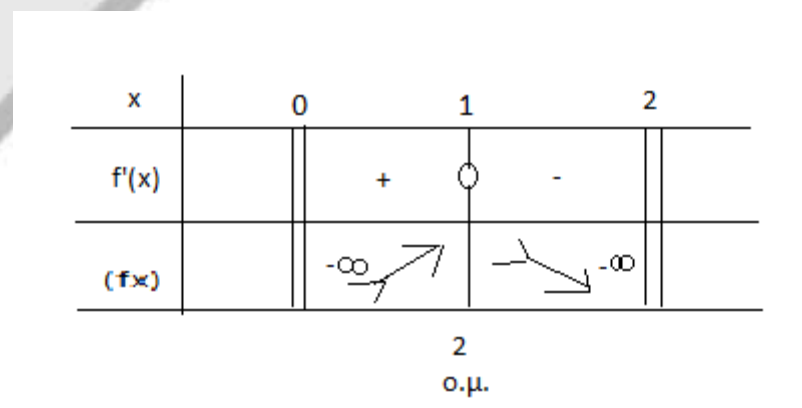
$$f'(x) = \frac{1}{2-x} \cdot (2-x)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2+2-x}{x^2(2-x)} = \frac{-x^2-x+2}{x^2(2-x)} \quad x \in (0,2)$$

$\forall x \in (0,2)$ είναι $x^2(2-x) > 0$ άρα το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2-x+2$ στο $(0,2)$

Το τριώνυμο $-x^2-x+2$ έχει ρίζες τους -2 και 1



Άρα $\forall x \in (0,1)$ είναι $f'(x) > 0$ και $\forall x \in (1,2)$ είναι $f'(x) < 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right] = \ln 2 - (+\infty) + 3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right] = (-\infty) - \frac{1}{2} + 3 = -\infty$$

Έστω $\Delta_1 = (0,1)$ και $\Delta_2 = [1,2)$

είναι $f(\Delta_1) = (-\infty, 2]$ και $f(\Delta_2) = (-\infty, 2]$



Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1) : f(x_1) = 0$

Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1,2) : f(x_2) = 0$

Επειδή $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - 3 + 3 = \ln \frac{5}{3} > 0$ είναι $x_1 < \frac{1}{3}$

Δ3)

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right] \subset (0,1)$

$$\text{άρα } \exists \xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) : f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - 0}{\frac{1 - 3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$

Δ4)

i. Επειδή F, G παράγοντες της f στο $(0,2)$ είναι

$$G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in (0,2)$$

$$\text{Είναι } G(x_1) = F(x_1) + C \Rightarrow G(x_1) = C$$

$$G(x_2) = F(x_2) + C \Rightarrow 0 = F(x_2) + C \Rightarrow F(x_2) = -C$$

$$\text{Άρα } F(x_2) + G(x_1) = -C + C = 0$$

ii. Έστω $\sigma(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2x$

Η $\sigma(x)$ ως πράξεις συνεχών είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$

$$\sigma(x_1) = x_1 \cdot F(x_1) + x_2 \cdot G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2 \cdot C + x_1 - x_2$$

$$\sigma(x_2) = x_1 \cdot F(x_2) + x_2 \cdot G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1 \cdot C - C + x_2 - x_1$$

Είναι $F'(x) = f(x) > 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$ άρα $F(x) \uparrow$ στο $[x_1, x_2]$

Επομένως $\forall x > x_1$ είναι $F(x) > F(x_1) \Leftrightarrow F(x) > 0$ άρα $F(x_2) > 0 \Leftrightarrow -C > 0 \Leftrightarrow C < 0$

Για $C < 0$ είναι $\sigma(x_1) < 0$ διότι $x_2 \cdot C < 0$ και $x_1 - x_2 < 0$



και $\sigma(x_2) > 0$ διότι $-c \cdot x_1 > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$

Άρα $\sigma(x_1) \cdot \sigma(x_2) < 0$ και από θ. Bolzano $\exists \rho \in (x_1, x_2) : \sigma(\rho) = 0$

Μοναδικότητα ρίζας

Η $\sigma(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2x$

είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με

$$\sigma'(x) = x_1 \cdot F'(x) + x_2 \cdot G'(x) + 2 =$$

$$= x_1 \cdot f(x) + x_2 \cdot f(x) + 2 = (x_1 + x_2) \cdot f(x) + 2 > 0 \quad x \in (x_1, x_2)$$

Άρα $\sigma(x) \uparrow$ στο (x_1, x_2)

Επομένως το ρ είναι μοναδική ρίζα της $\sigma(x)$ στο (x_1, x_2)