

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 74

Α4. α. Ψ

β. Αντιπαράδειγμα : Αν $f(x) = x$ και $x_0 = 0$, τότε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \text{ όμως } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ δεν υπάρχει.}$$

Α5. α. Σωστό,

β. Σωστό,

γ. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

$$\begin{aligned} \text{Β1. } f'(x) &= \left(\frac{3x+1}{x-3} \right)' = \frac{(3x+1)' \cdot (x-3) - (x-3)' \cdot (3x+1)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{3 \cdot (x-3) - (3x+1)}{(x-3)^2} = \frac{3x-9-3x-1}{(x-3)^2} = \frac{-10}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

Είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \neq 3$, άραη f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 3)$ και $(3, +\infty)$.▷ $\Delta_1 = (-\infty, 3)$: Η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο Δ_1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[(3x+1) \cdot \frac{1}{x-3} \right] = -\infty, \text{ διότι}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x+1) = 10 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty \end{cases}$$

Άρα $f(\Delta_1) = (-\infty, 3)$



~σελίδα 2 από 9 ~

▷ $\Delta_2 = (3, +\infty)$: Η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο Δ_2

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[(3x+1) \cdot \frac{1}{x-3} \right] = +\infty, \text{ διότι } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x+1) = 10 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\text{Άρα } f(\Delta_2) = (3, +\infty)$$

Είναι $f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) = \emptyset$, άρα η f είναι 1-1

επομένως η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

$$\mathbf{B2.} D_{f^{-1}} = f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\text{Για } x, y \in \mathbb{R} - \{3\} \text{ έχουμε : } y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{3x+1}{x-3} \Leftrightarrow$$

$$xy - 3y = 3x + 1 \Leftrightarrow xy - 3x = 3y + 1 \Leftrightarrow x(y - 3) = 3y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{y-3}$$

$$\text{επομένως } f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}, x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

$$D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\} \text{ και } f(x) = f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}, \text{ άρα } \boxed{f = f^{-1}}.$$

$$\mathbf{B3.} \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{3\} \text{ είναι : } (f \circ f)(x) = f(f(x)) \stackrel{f=f^{-1}}{=} f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\mathbf{B4.} \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |f(x)| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)| \Leftrightarrow$$

$$\left| f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| \leq f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \leq |f(x)|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} (-|f(x)|) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(- \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| = 0$$

κρίτήριο

 $\Rightarrow$ παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left[f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right] = 0$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη στο $+\infty$ την $y = 1$,
 άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

- Για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 1)x^3}{\lambda x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 1)x}{\lambda} = +\infty \text{ ή } -\infty$$

άτοπο διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

- Για $\lambda = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 - 1}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty, \text{ άτοπο διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

- Για $\lambda = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Επομένως $\boxed{\lambda = 1}$.

Γ2. Για $\lambda = 1$ είναι : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(x^2 - 1)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		○	
$f(x)$			

ολ. ελ.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$, την τιμή $f(0) = -1$

Γ3. Θεωρούμε συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) + \sqrt{x^3}$, $x \geq 0$

Η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών

$$\text{Για } x > 0 : g'(x) = f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot (x^3)' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} > 0$$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

▷ g συνεχής στο $[0, 1]$

▷ $g(0) = f(0) = -1 < 0$

$$g(1) = f(1) + 1 = 1 > 0$$

από **Θ. Bolzano** υπάρχει $x_0 \in (0, 1) : g(x_0) = 0$

και επειδή g γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.

$$\text{Γ4. } \lim_{x \rightarrow x_0^-} (f(x) + \sqrt{x^3}) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = g(x_0) = 0$$

$$\text{Για } x < x_0 \xRightarrow{g \uparrow} g(x) < g(x_0) \Leftrightarrow f(x) + \sqrt{x^3} < 0$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x) + \sqrt{x^3}} = -\infty$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:1^{ος} τρόπος

Αν ΑΚ είναι το ύψος του ΑΒΓ, τότε $\hat{BOK} = \theta$
και $K \equiv M$. Θεωρούμε $OK = x$, $BK = K\Gamma = y$.

Στο ορθογώνιο $\triangle OKB$ είναι:

$$\eta\mu\theta = \frac{BK}{OB} = \frac{y}{1} = y \text{ και}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OK}{OB} = \frac{x}{1} = x$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot (1+x) = (1+x) \cdot y$$

$$\text{άρα } E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \eta\mu\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

2^{ος} τρόπος

Είναι $\hat{BO\Gamma} = 2\theta$ και

$$\hat{AOB} = \hat{AOG} = \pi - \theta.$$

$$(AOG) = (AOB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \eta\mu\hat{AOB}$$

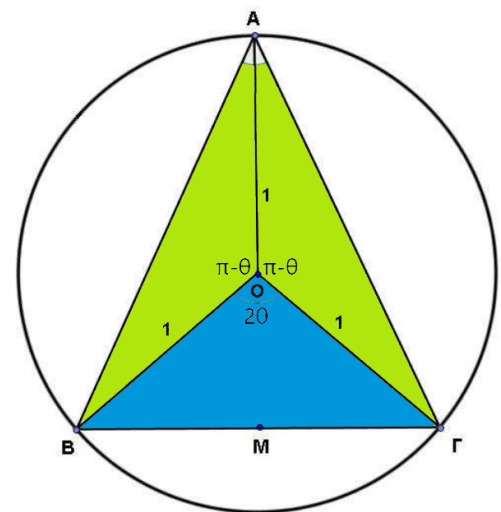
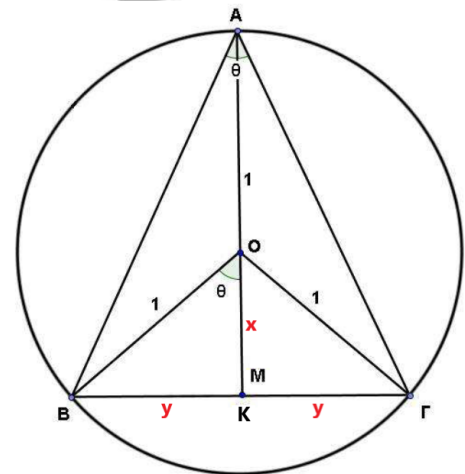
$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \eta\mu(\pi - \theta) = \frac{1}{2} \eta\mu\theta$$

$$(BO\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \eta\mu\hat{BO\Gamma}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \eta\mu 2\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\eta\mu\theta \sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\begin{aligned} (AB\Gamma) &= (AOB) + (AOG) + (BO\Gamma) = \frac{1}{2} \eta\mu\theta + \frac{1}{2} \eta\mu\theta + \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \\ &= \eta\mu\theta + \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \end{aligned}$$

$$\text{άρα } E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \eta\mu\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$





~σελίδα 6 από 9 ~

$$\text{Αν } \theta = \frac{\pi}{2} :$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot AO = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \text{ και}$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu\frac{\pi}{2} = (1 + 0) \cdot 1 = 1, \text{ άρα}$$

ισχύει ο τύπος $E(\theta) = (1 + \sin\theta) \cdot \eta\mu\theta$, για $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Αν } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right):$$

1^{ος} τρόποςΘεωρούμε $OK = x$, $BK = K\Gamma = y$.Στο ορθογώνιο $\triangle OKB$ είναι :

$$\eta\mu(\pi - \theta) = \frac{BK}{OB} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{y}{1} = y \text{ και}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \frac{OK}{OB} \Rightarrow -\sin\theta = \frac{x}{1} \Rightarrow \sin\theta = -x$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot (1 - x) = (1 - x) \cdot y$$

$$\text{άρα } E(\theta) = (1 + \sin\theta) \cdot \eta\mu\theta, \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

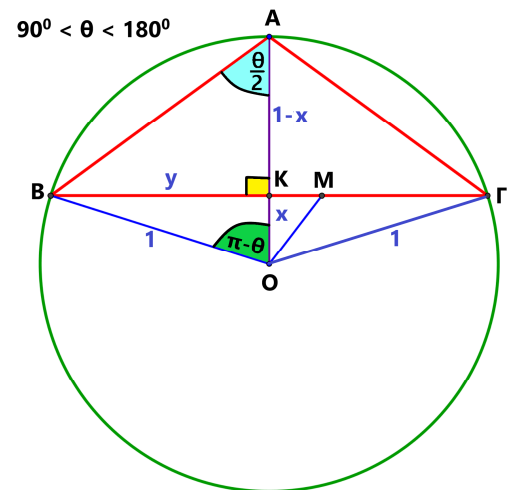
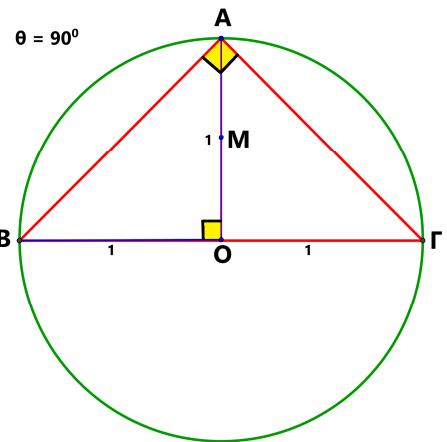
2^{ος} τρόποςΕίναι $\widehat{BO\Gamma} = 2\pi - 2\theta$ και $\widehat{AO\Gamma} = \widehat{AOB} = \pi - \theta$.

$$(AO\Gamma) = (AOB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \eta\mu\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \eta\mu(\pi - \theta) = \frac{1}{2} \eta\mu\theta$$

$$\begin{aligned} (BO\Gamma) &= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \eta\mu\widehat{BO\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \eta\mu(2\pi - 2\theta) = \frac{1}{2} \cdot \eta\mu(-2\theta) = -\frac{1}{2} \cdot \eta\mu 2\theta \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2\eta\mu\theta \sin\theta = -\eta\mu\theta \cdot \sin\theta \end{aligned}$$

$$(AB\Gamma) = (AOB) + (AO\Gamma) - (BO\Gamma) = \frac{1}{2} \eta\mu\theta - (-\eta\mu\theta \cdot \sin\theta) = \eta\mu\theta + \eta\mu\theta \cdot \sin\theta$$

$$\text{άρα } E(\theta) = (1 + \sin\theta) \cdot \eta\mu\theta, \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$



$$\begin{aligned}
 \Delta 2. E'(\theta) &= (1 + \sin\theta)' \cdot \eta\mu\theta + (1 + \sin\theta) \cdot (\eta\mu\theta)' \\
 &= -\eta\mu\theta \cdot \eta\mu\theta + (1 + \sin\theta) \cdot \cos\theta \\
 &= -\eta\mu^2\theta + \sin\theta + \sin^2\theta \\
 &= -(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta + \sin^2\theta \\
 &= -1 + \sin^2\theta + \sin\theta + \sin^2\theta \\
 &= 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1
 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $2\omega^2 + \omega - 1$ έχει $\Delta = 9$ και

ρίζες $\omega_1 = -1$ και $\omega_2 = \frac{1}{2}$, άρα

$$2\omega^2 + \omega - 1 = 2 \cdot (\omega + 1) \cdot \left(\omega - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \underbrace{2 \cdot (\sin\theta + 1)}_{\text{θετικός}} \cdot \left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{3} \quad \begin{matrix} 0 < \theta < \pi \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$E'(\theta) > 0 \Leftrightarrow \sin\theta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\theta > \sin\frac{\pi}{3} \quad \begin{matrix} \text{συνχ}\downarrow \\ \text{στο } (0, \pi) \end{matrix} \Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{3}$$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$E'(\theta)$		+	-
$E(\theta)$			

Το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$.



$$\Delta 3. \triangleright \Delta_1 = \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

Η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} [\eta\mu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)] = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} E(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} [\eta\mu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)] = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{άρα } E(\Delta_1) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$\frac{3}{4} \in E(\Delta_1)$ και E γνησίως αύξουσα στο Δ_1 , άρα

$$\text{υπάρχει μοναδικό } \theta_1 \in \Delta_1, \text{ τέτοιο ώστε } E(\theta_1) = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\triangleright \Delta_2 = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$$

Η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} E(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} [\eta\mu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)] = 0$$

$$\text{άρα } E(\Delta_2) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

$\frac{3}{4} \in E(\Delta_2)$ και E γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 , άρα

$$\text{υπάρχει μοναδικό } \theta_2 \in \Delta_2, \text{ τέτοιο ώστε } E(\theta_2) = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Από (1) και (2) υπάρχουν ακριβώς δύο γωνίες θ_1, θ_2 με

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{3} < \theta_2 < \pi, \text{ ώστε } E(\theta_1) = E(\theta_2) = \frac{3}{4}$$



Δ4. Η ζητούμενη σχέση ισχύει για $\xi_1 = \xi_2 = \frac{\pi}{3}$ (δεν ζητείται $\xi_1 \neq \xi_2$)

Για $\xi_1 \neq \xi_2$:

- Ε συνεχής στο $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$
- Ε παραγωγίσιμη στο $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$, τέτοιο ώστε

$$E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = \frac{3\sqrt{3} - 3}{4} \quad (3)$$

- Ε συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$
- Ε παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$, τέτοιο ώστε

$$E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3} - \theta_2} \Leftrightarrow E'(\xi_2) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_2)}{\frac{\pi}{3} - \theta_2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) \cdot E'(\xi_2) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_2) \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) \cdot E'(\xi_2) = \frac{3\sqrt{3} - 3}{4} \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε $\boxed{\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) \cdot E'(\xi_2)}$