



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 15

β. i. Σχολικό βιβλίο σελίδα 35

ii. Σχολικό βιβλίο σελίδα 35

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

A4. α. Λάθος, αντιπαράδειγμα $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

β. Λάθος, αντιπαράδειγμα $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-x_0)^2}, & x \neq x_0 \\ 1, & x = x_0 \end{cases}$

A5. γ.

ΘΕΜΑ Β

$$B1. f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_2}{x_2 - 1} \Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 = x_1x_2 - x_2 \Leftrightarrow$$

$$-x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

άρα η f είναι 1-1, δηλαδή αντιστρέφεται.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow xy - y = x \Leftrightarrow xy - x = y \Leftrightarrow$$

$$x(y-1) = y \stackrel{y \neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{y}{y-1}, \text{ άρα } f^{-1}(y) = \frac{y}{y-1}, y \neq 1 \text{ ή}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

*Παρατηρούμε ότι $f = f^{-1}$



$$\mathbf{B2.} \quad f'(x) = \left(\frac{x}{x-1} \right)' = \frac{(x)' \cdot (x-1) - x \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\text{Είναι } f(2) = \frac{2}{2-1} = 2 \text{ και } f'(2) = -\frac{1}{(2-1)^2} = -1, \text{ άρα}$$

η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι

$$(\varepsilon) : y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon) : y - 2 = -1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon) : y - 2 = -x + 2 \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon) : \mathbf{y = -x + 4}$$

$$\mathbf{B3.} \quad f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x \neq 1, \text{ άρα}$$

η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

$$\mathbf{\Gamma 1.} \text{ Είναι } D_f = \mathbb{R} \text{ και } D_g = [2, +\infty),$$

άρα

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 + 1 \geq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 \geq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } |x| \geq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1\} \\ &= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} - 2 = \sqrt{x^2 - 1}$$



$$\begin{aligned}\Gamma 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} \\ &\stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = 1 = \lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - x^2}{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0 = \beta\end{aligned}$$

άρα η ευθεία $y = x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\begin{aligned}\Gamma 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - \sqrt{3}}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3})(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - (\sqrt{3})^2}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{(x - 2)}(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ ως παραγωγίσιμη,

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} [-(x-1)^4 + \beta x] = \beta \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha \\ \bullet f(1) &= 1 + \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta - 1$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$,

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^4 + \beta x - (1+\alpha)}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-4(x-1)^3 + \beta}{1} = \beta \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - (1+\alpha)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\beta = 2 \quad \alpha = \beta - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 1 \text{ και } \beta = 2}$$

$$\mathbf{\Delta 2.} \quad f(x) = \begin{cases} -(x-1)^4 + 2x, & x < 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Για } x < 1 : f'(x) = [-(x-1)^4 + 2x]' = -4(x-1)^3 + 2 > 0, \text{ για } x < 1$$

$$\bullet \text{ Για } x > 1 : f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x > 0$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > 0$ στα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-(x-1)^4 + 2x] = -\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} [-(x-1)^4] = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{άρα } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$



Δ3. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα έχει μια το πολύ ρίζα.

1^{ος} τρόπος

- η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$
- $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = 2 > 0$

από θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$
και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι μοναδικό.

2^{ος} τρόπος

$$f((0, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-1, +\infty)$$

$0 \in f((0, +\infty))$, άρα υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$
και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι μοναδικό.

Δ4. $f^2(x) + x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot [f(x) + x_0] = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Για } x > x_0 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \\ \text{Επίσης } x_0 > 0 \Rightarrow f(x) + x_0 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \cdot [f(x) + x_0] > 0$$

Επομένως η εξίσωση $f(x) \cdot [f(x) + x_0] = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$