



ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 251

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 150

A3. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

$$B1. 2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0 \quad \begin{matrix} z = x + yi \\ \Leftrightarrow \\ x, y \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \quad \begin{matrix} :2 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} x^2 + y^2 + xi - 2 - i = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + xi - 2 - i = 0 \quad \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2) + (x - 1)i = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{άρα } \mathbf{z = 1 \pm i}$$

$$B2. w = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{39} = 3 \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \right)^{39} = 3 \left(\frac{2i}{2} \right)^{39}$$

$$= 3 \cdot i^{39} = 3 \cdot (i^4)^9 \cdot i^3 = 3 \cdot 1 \cdot (-i) = \mathbf{-3i}$$

$$B3. |u + w| = |4z_1 - z_2 - i| \quad \Leftrightarrow \quad |u - 3i| = |4(1+i) - (1-i) - i| \quad \Leftrightarrow$$

$$|u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| \quad \Leftrightarrow \quad |u - 3i| = |3 + 4i| \quad \Leftrightarrow$$

$$|u - 3i| = \sqrt{3^2 + 4^2} \quad \Leftrightarrow \quad |u - 3i| = 5$$

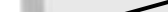
Επομένως ο ζητούμενος γ.τ. είναι

ο κύκλος C με κέντρο K (0, 3) και ακτίνα ρ = 5



ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned} \Gamma 1. f'(x) &= 2(x-3) \cdot (x-1) + (x-3)^2 = (x-3) \cdot [2(x-1) + x-3] \\ &= (x-3) \cdot (2x-2+x-3) = (x-3) \cdot (3x-5) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$5/3$	3	$+\infty$	
f'(x)	+	○	-	○	+
f(x)					

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ και $[3, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{5}{3}, 3\right]$.

Γ2. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$

$$(\varepsilon) // y = 4x + 3, \text{ άρα } \lambda_\varepsilon = f'(x_0) = 4 \Leftrightarrow$$

$$(x_0 - 3)(3x_0 - 5) = 4 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 14x_0 + 11 = 0$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = 196 - 132 = 64$$

$$x_0 = \frac{14 \pm 8}{6} = \begin{cases} \frac{22}{6} = \frac{11}{3} \notin \mathbb{Z} & \text{απορρίπτεται} \\ \frac{6}{6} = 1 \in \mathbb{Z} & \text{δεκτή} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon) : y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = 4 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y = 4x - 4$$

Γ3. $g(x) = (x-1) \cdot f(x) = (x-1)^2 \cdot (x-3)^2$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(x-1)(x-3)^2 + 2(x-1)^2(x-3) = 2(x-1)(x-3)(x-3+x-1) \\ &= 2(x-1) \cdot (x-3) \cdot (2x-4) = 4(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x-1$	-	○	+	+	+
$x-2$	-	-	○	+	+
$x-3$	-	-	-	○	+
$g'(x)$	-	○	+	○	+
$g(x)$	↘		↗		↗

τ.ελ.

τ.μεγ.

τ.ελ.

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Η $y = x - 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha x^2 - x + 2}{x+1}}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x^2 + x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Για $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 2 - x^2 - x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = -2 \end{aligned}$$

$$\Delta 2. \alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - x + 2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2 - x^2 - x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2 = \beta \end{aligned}$$

Άρα η $y = x - 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x + 2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{x+1} \cdot (x^2 - x + 2) \right] = +\infty,$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0 \text{ και } x+1 > 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - x + 2) = 4 > 0,$$

άρα η $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h



$$\Delta 3. h(x) + \frac{(x-3)^4}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{x+1} + \frac{(x-3)^4}{x} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x(x^2 - x + 2) + (x+1)(x-3)^4}{x(x+1)} = 0$$

Θεωρώ συνάρτηση K , με $K(x) = x(x^2 - x + 2) + (x+1)(x-3)^4$

➤ K συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πολυωνυμική

➤ $K(-1) = -4 < 0$ και

$$K(0) = (-3)^4 > 0$$

από Θ. Bolzano

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 0)$, τέτοιο ώστε

$$K(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{K(\xi)}{\xi(\xi+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi(\xi^2 - \xi + 2) + (\xi+1)(\xi-3)^4}{\xi(\xi+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\xi(\xi^2 - \xi + 2)}{\xi(\xi+1)} + \frac{(\xi+1)(\xi-3)^4}{\xi(\xi+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi^2 - \xi + 2}{\xi+1} + \frac{(\xi-3)^4}{\xi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$h(\xi) + \frac{(\xi-3)^4}{\xi} = 0$$

$$\text{επομένως η εξίσωση } h(x) + \frac{(x-3)^4}{x} = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$