



**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 253

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 191

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 258

A4. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. 1^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} |z - 3|^2 + |z + 3|^2 &= 36 \Leftrightarrow (z - 3)(\bar{z} - 3) + (z + 3)(\bar{z} + 3) = 36 \Leftrightarrow \\ z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9 + z\bar{z} + 3z + 3\bar{z} + 9 &= 36 \Leftrightarrow 2z\bar{z} = 18 \Leftrightarrow z\bar{z} = 9 \Leftrightarrow \\ |z|^2 &= 9 \Leftrightarrow |z| = 3 \end{aligned}$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 3$

2^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} |z - 3|^2 + |z + 3|^2 &= 36 \stackrel{z = x + yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - 3|^2 + |x + yi + 3|^2 = 36 \Leftrightarrow \\ \left(\sqrt{(x - 3)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x + 3)^2 + y^2}\right)^2 &= 36 \Leftrightarrow \\ (x - 3)^2 + y^2 + (x + 3)^2 + y^2 &= 36 \Leftrightarrow \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 + x^2 + 6x + 9 + y^2 &= 36 \Leftrightarrow \\ 2x^2 + 2y^2 &= 18 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 \end{aligned}$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 3$



B2. • $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$
 $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 18 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 = 18 \Leftrightarrow$
 $|z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + |z_2|^2 = 18 \Leftrightarrow -z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 = 0 \Leftrightarrow$
 $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0 \quad (1)$
 • $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2$
 $= |z_1|^2 + \color{red}{z_1\bar{z}_2} + \color{red}{\bar{z}_1z_2} + |z_2|^2 \stackrel{(1)}{=} 9 + 0 + 9 = 18$
 άρα $|z_1 + z_2| = 3\sqrt{2}$

B3. 1^{ος} τρόπος

$$|2w - 1| = |w - 2| \stackrel{w = x + yi}{\Leftrightarrow}_{x, y \in \mathbb{R}} |2x + 2yi - 1| = |x + yi - 2| \Leftrightarrow$$

$$|(2x - 1) + 2yi| = |(x - 2) + yi| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(2x - 1)^2 + (2y)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = (x - 2)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 3y^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι
κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

2^{ος} τρόπος

$$|2w - 1| = |w - 2| \Leftrightarrow |2w - 1|^2 = |w - 2|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2w - 1)(2\bar{w} - 1) = (w - 2)(\bar{w} - 2) \Leftrightarrow$$

$$4w\bar{w} - 2w - 2\bar{w} + 1 = w\bar{w} - 2w - 2\bar{w} + 4 \Leftrightarrow$$

$$3w\bar{w} = 3 \Leftrightarrow w\bar{w} = 1 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = 1$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w είναι
κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta \right)' = -\frac{2}{x^2} + 2\alpha x < 0$, αφού $\alpha < 0, x > 0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Γ2. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = (0, +\infty)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta \right) \stackrel{\alpha < 0}{=} -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\Delta) = \mathbb{R}$$

Είναι $0 \in f(\Delta)$,

άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $(0, +\infty)$

Γ3. i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta \right) = +\infty$,

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ για κάθε α, β

ii) • αν $\alpha > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta \right) \stackrel{\alpha > 0}{=} +\infty$

• αν $\alpha < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta \right) \stackrel{\alpha < 0}{=} -\infty$

• αν $\alpha = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \beta \right) = \beta \in \mathbb{R}$

άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = \beta$

μόνο αν $\alpha = 0$ και για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$

Γ4. Για να παρουσιάζει η f τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ την τιμή 7

πρέπει $f'(1) = 0$ και $f(1) = 7$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow -2 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$f(1) = 7 \Leftrightarrow 2 + \alpha + \beta \stackrel{\alpha=1}{=} 7 \Leftrightarrow \beta = 4$$



Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$ είναι :

$$f(x) = \frac{2}{x} + x^2 + 4$$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x} + x^2 + 4 \right)' = -\frac{2}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2}$$

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		○	+
f	↘		↗

ΤΟΠ. ΕΛΑΧΙΣΤΟ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = \frac{f(x) + \eta\mu x}{x^2 - x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 2$ και

$$f(x) + \eta\mu x = \varphi(x) \cdot (x^2 - x) \Leftrightarrow f(x) = -\eta\mu x + \varphi(x) \cdot (x^2 - x) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bullet f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} [-\eta\mu x + \varphi(x) \cdot (x^2 - x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-\eta\mu x) + \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0 \\ \bullet f(1) &= f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu x + \varphi(x) \cdot x \cdot (x - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varphi(x) \cdot \cancel{x} \cdot (x - 1)}{\cancel{x}} \right] \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1 + 2 \cdot (-1) = -3 \end{aligned}$$

Δ2. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$\text{με } g'(x) = f'(x) + 2\alpha \cdot (x + 1)$$

$$g(0) = f(0) + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$$

$$g(1) = f(1) + 4\alpha = 4\alpha - 3$$

Για να ικανοποιεί η g τις υποθέσεις του Θ. Rolle πρέπει

$$4\alpha - 3 = \alpha \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$$



Για $\alpha = 1$ είναι :

$$g(x) = f(x) + (x + 1)^2$$

$$g'(x) = f'(x) + 2(x + 1)$$

$$g''(x) = f''(x) + 2$$

Δ3. • Από το Θ. Rolle με τη συνάρτηση g , προκύπτει ότι

η $g'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

• $g''(x) = f''(x) + 2 > 0$, διότι $f''(x) > -2$,

άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα άρα η $g'(x) = 0$

έχει μια το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$

Επομένως υπάρχει ένα μοναδικό $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 2(\xi + 1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -2(\xi + 1)$$

Δ4. Το ξ είναι η μοναδική ρίζα της g'

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(0) \stackrel{g' \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$$

x	$-\infty$	ξ	$+\infty$
$g'(x)$		$\circ$	
g			

Η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \xi$.