



**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ και ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑΣ Β')**

**ΣΑΒΒΑΤΟ 16 ΜΑΪΟΥ 2011**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 260-261**

**A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 280**

**A3. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος,  
δ. Λάθος, ε. Σωστό.**

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.  $|z - 3i| = 1$ , άρα ο γ.τ. των εικόνων του  $z$  είναι  
κύκλος με κέντρο  $K(0, 3)$  και ακτίνα  $\rho = 1$**

$$\text{B2. } |z - 3i| = 1 \Leftrightarrow |z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\bar{z} + 3i) = 1 \quad \begin{matrix} z - 3i \neq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$$

$$\text{B3. } w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z - 3i + \frac{\bar{z} + 3i}{(z - 3i)(\bar{z} + 3i)} = z - 3i + \frac{\bar{z} + 3i}{|z - 3i|^2}$$

$$= z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$$

**1<sup>ος</sup> τρόπος**

Από το γ.τ. των εικόνων του  $z$  προκύπτει

$$\text{ότι } -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-2 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$-2 \leq w \leq 2$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Από το γ.τ. των εικόνων του  $z$  έχουμε :

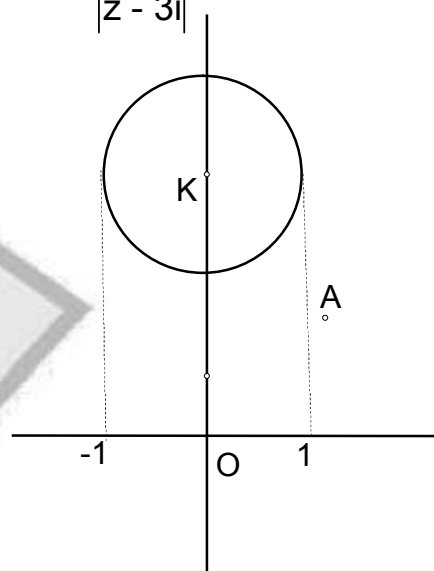
$$x^2 + (y - 3)^2 = 1$$

$$\text{άρα } x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$-2 \leq w \leq 2$$

$$\text{B4. } |z - w| \stackrel{\substack{z = x + yi \\ w = 2x}}{=} |x + yi - 2x| = |-x + yi| = |-(x - yi)| = |-\bar{z}| = |z|$$





## ΘΕΜΑ Γ

Γ1.  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$  και  $f'(x) = \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}, x \neq 0$

|       |           |   |   |           |
|-------|-----------|---|---|-----------|
| x     | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
| f'(x) | -         | - | ○ | +         |
| f(x)  |           |   |   |           |

Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, 1]$ , ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ .

Η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για  $x = 1$ , την τιμή  $f(1) = 3$

Γ2.  $f(2) = 5$  και  $f'(2) = \frac{7}{2}$ .

$$(\epsilon) : y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 5 = \frac{7}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{7}{2}x - 2$$

Γ3. •  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty,$

διότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$

άρα η  $C_f$  έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την  $x = 0$  ( $y'y$ )

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{2}{x^2}\right) = -\infty,$$

άρα η  $C_f$  δεν έχει ασύμπτωτη στο  $-\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2}{x^2}\right) = +\infty,$$

άρα η  $C_f$  δεν έχει ασύμπτωτη στο  $+\infty$



$$\begin{aligned} \Gamma 4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 3}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2} + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x^3 - 3x^2}{x^2(x^2 - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + 2x^3 - 3x^2}{x^4 - x^2} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 6x}{4x^3 - 2x} = 0 \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**  $g'(x) = [x \cdot f(x) + \sin x]' = f(x) + x f'(x) - \eta \mu x = 0$

άρα η  $g$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ2.** Για  $x = 0$ , είναι  $g(0) = 1$ , άρα  $g(x) = 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot f(x) + \sin x = 1 \Leftrightarrow x \cdot f(x) = 1 - \sin x$$

Για  $x \neq 0$  είναι  $f(x) = \frac{1 - \sin x}{x}$ .

**Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h$ , με  $h(x) = x \cdot \eta \mu x + \sin x - 1$

• Η  $h$  είναι συνεχής στο  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  ως πράξεις συνεχών

$$\bullet h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \eta \mu \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$$

$$h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \eta \mu \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} - 1 = -\frac{3\pi}{2} - 1 < 0$$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση  $h(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

**Δ4.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi$ , με  $\varphi(x) = x \cdot \eta \mu x + \sin x - 1 - \frac{2}{\pi^2} x^2$

• Η  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  ως πράξεις συνεχών

$$\bullet \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \eta \mu \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 3}{2} > 0$$

$$\varphi(\pi) = \pi \eta \mu \pi + \sin \pi - 1 - 2 = -4 < 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \subseteq (0, \pi)$ ,

τέτοιο ώστε  $\varphi(\xi) = 0$  ή  $\xi \cdot \eta \mu \xi + \sin \xi = 1 + \frac{2}{\pi^2} \xi^2$ .