



**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ και ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑΣ Β')**

ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2010

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 149

A3. α. Σ, β. Λ, γ. Σ, δ. Σ*, ε. Λ.

*** έπρεπε να δοθεί ότι η συνάρτηση δεν είναι σταθερή στο $[\alpha, \beta]$**

ΘΕΜΑ Β

B1. Αν $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε

$$2z - i\bar{z} = 3 \Leftrightarrow 2(x + yi) - i(x - yi) = 3 \Leftrightarrow 2x + 2yi - xi - y - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x - y - 3) + (2y - x)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4y - y = 3 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{z = 2 + i}$$

B2. $|w + z| = |z^2| \xrightarrow{z=2+i} |w + 2 + i| = |2 + i|^2 \Leftrightarrow$

$$|w + 2 + i| = \left(\sqrt{2^2 + 1^2}\right)^2 \Leftrightarrow |w + 2 + i| = 5$$

άρα ο ζητούμενος γ.τ. των εικόνων του w είναι

ο κύκλος με κέντρο $K(-2, -1)$ και ακτίνα $\rho = 5$

$$\begin{aligned} \mathbf{B3.} u &= \frac{\bar{z} + iz}{\bar{z} - 1} \xrightarrow{z=2+i} \frac{2 - i + i(2 + i)}{2 - i - 1} = \frac{2 - i + 2i - 1}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i} \\ &= \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2} = \frac{2i}{2} = i \end{aligned}$$

$$u^{2010} = i^{2010} = (i^4)^{502} \cdot i^2 = 1^{502} \cdot (-1) = -1$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = (x^3 + 3x + \sin x - 2)' = 3x^2 + 3 - \eta\mu x > 0$, διότι
 $3x^2 \geq 0$ και $3 - \eta\mu x > 0$ αφού $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. • η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, ως άθροισμα συνεχών

• $f(0) = \sin 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$

• $f(\pi) = \pi^3 + 3\pi + \sin \pi - 2 = \pi^3 + 3\pi - 3 = \pi^3 + 3(\pi - 1) > 0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \pi)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \pi)$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Γ3. $f(x^2 + 8) = f(6x) \xLeftrightarrow[f \uparrow]{f \text{ "1-1" }} x^2 + 8 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2 \text{ ή } x = 4$

Γ4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x + \sin x - 2 + 1}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 + 3 + \frac{\sin x - 1}{x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 3 - 0 = 3$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x} + 2x = x + \frac{3}{x} + 2x = 3x + \frac{3}{x}, x \in \mathbb{R}^*$

$f'(x) = \left(3x + \frac{3}{x} \right)' = 3 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^2 - 3}{x^2}, x \in \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	-	○	+
$f(x)$						

τ. μέγιστο

τ. ελάχιστο

τοπικό μέγιστο : $f(-1) = -3 - 3 = -6$

τοπικό ελάχιστο : $f(1) = 3 + 3 = 6$



Δ2. Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x + \frac{3}{x} \right) = +\infty$$

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ ($y'y$)

Πλάγιες ασύμπτωτες

▷ ΣΤΟ $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + \frac{3}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{3}{x^2} \right) = 3 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + \frac{3}{x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0 = \beta$$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = 3x$

▷ ΣΤΟ $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \frac{3}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{3}{x^2} \right) = 3 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x + \frac{3}{x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 = \beta$$

άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 3x$

Δ3. Είναι $f(1) = 6$ και $f'(1) = 0$, άρα

$$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 6.$$

$$\Delta 4. \lambda_{AB} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{10 - 6}{2} = 2$$

$$\text{Πρέπει } f'(\xi) = 2 \Leftrightarrow 3 - \frac{3}{\xi^2} = 2 \Leftrightarrow 1 = \frac{3}{\xi^2} \Leftrightarrow$$

$$\xi^2 = 3 \stackrel{\xi > 0}{\Leftrightarrow} \xi = \sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{άρα } M(\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$$