



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α**A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 135**A2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 73**A3.** α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Λάθος, ε. Σωστό.**ΘΕΜΑ Β****B1.** Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 0$, θα πρέπει

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x + \beta) &= \beta \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 5) &= 5 \\ f(0) &= \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = 5$$

B2. Για $\beta = 5$ είναι : $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 5, & x \leq 0 \\ x + 5, & x > 0 \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 5 - 5}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x + 1)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 5 - 5}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με $f'(0) = 1$ **B3.** Για $x < 0$ είναι $f'(x) = (x^2 + x + 5)' = 2x + 1$

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 5 = 5 \text{ και } f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$$

$$(\epsilon) : y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1) \Leftrightarrow (\epsilon) : y - 5 = -1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow$$

$$(\epsilon) : y - 5 = -1x - 1 \Leftrightarrow (\epsilon) : y = -x + 4$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $D_f = [1, +\infty)$ και $D_g = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} \\ &= \left\{x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \text{ και } \frac{3-5x}{x-2} \geq 1\right\} \\ &= \left\{x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \text{ και } \frac{3-5x}{x-2} - 1 \geq 0\right\} \\ &= \left\{x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \text{ και } \frac{3-5x}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} \geq 0\right\} \\ &= \left\{x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \text{ και } \frac{5-6x}{x-2} \geq 0\right\} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{5}{6}$	2	$+\infty$
5 - 6x	+	○	-	-
x - 2	-	-	○	+
πηλίκο	-	○	+	-

$$D_{f \circ g} = \left\{x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \text{ και } x \in \left[\frac{5}{6}, 2\right)\right\}$$

$$D_{f \circ g} = \left[\frac{5}{6}, 2\right)$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1} = \sqrt{\frac{3-5x}{x-2} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{3-5x}{x-2} - \frac{x-2}{x-2}} = \sqrt{\frac{3-5x-x+2}{x-2}} = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}} \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } (f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}, x \in \left[\frac{5}{6}, 2\right)$$



Γ2. Η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{5}{6}, 2\right)$ ως σύνθεση συνεχών.

$$\text{Για } x \in \left(\frac{5}{6}, 2\right) : \varphi'(x) = \left(\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}\right)' = \frac{7}{2(x-2)^2 \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}} > 0$$

άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{6}, 2\right)$.

Η φ παρουσιάζει τοπ.ελάχιστο για $x = \frac{5}{6}$, την τιμή $\varphi\left(\frac{5}{6}\right) = 0$

Γ3. Η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η φ είναι 1-1,
άρα η φ αντιστρέφεται.

$$\varphi\left(\frac{5}{6}\right) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{\frac{6x-5}{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{6x-5}}{\sqrt{2-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\sqrt{6x-5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x}} \right) = +\infty, \text{ διότι} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{6x-5} &= \sqrt{7} > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\varphi\left(\left[\frac{5}{6}, 2\right)\right) = D_{\varphi^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$y = \sqrt{\frac{5-6x}{x-2}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{5-6x}{x-2} \Leftrightarrow xy^2 - 2y^2 = 5 - 6x \Leftrightarrow$$

$$xy^2 + 6x = 5 + 2y^2 \Leftrightarrow x(y^2 + 6) = 2y^2 + 5 \Leftrightarrow x = \frac{2y^2 + 5}{y^2 + 6}$$

$$\text{άρα } \varphi^{-1}(x) = \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 6}, \quad x \in [0, +\infty).$$

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. ▷ Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0)$ ως σύνθεση συνεχών.

▷ Η f είναι συνεχής στο $(0, \pi]$ ως τριγωνομετρική.

$$\left. \begin{aligned} \text{▷ Στο } x_0 = 0 : \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0 \\ f(0) &= \eta\mu 0 = 0 \end{aligned} \right\} f \text{ συνεχής στο } x_0 = 0$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$.

- $x \in [-1, 0) : f'(x) = (\sqrt{-x})' = \frac{(-x)'}{2\sqrt{-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} < 0$
- $x \in (0, \pi] : f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
- $x_0 = 0 : \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x\sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\text{Επομένως } f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, & x \in [-1, 0) \\ \sigma\upsilon\nu x, & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Η f' δεν μηδενίζεται στο $[-1, 0)$

$$\text{Στο } (0, \pi] : f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \xRightarrow{x \in (0, \pi]} x = \frac{\pi}{2}$$

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{\pi}{2}$.



Δ2. Είναι $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-x}}, & x \in [-1, 0) \\ \sin x, & x \in (0, \pi] \end{cases}$

Στο $[-1, 0)$ είναι $f(x) < 0$

Στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x) = \sin x > 0$

Στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ είναι $f'(x) = \sin x < 0$

x	-1	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f'(x)	-	+	○	-
f(x)				

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 0]$ και $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,
ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Η f παρουσιάζει :

- ▷ τοπικό μέγιστο για $x = -1$, την τιμή $f(-1) = 1$
- ▷ τοπικό ελάχιστο για $x = 0$, την τιμή $f(0) = 0$
- ▷ τοπικό μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$, την τιμή $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- ▷ τοπικό ελάχιστο για $x = \pi$, την τιμή $f(\pi) = 0$



Δ3. $f(x) = \eta\mu x$ και $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in (0, \pi)$

ε : εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$

$$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon : y - \eta\mu x_0 = \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot (x - x_0)$$

$$M(0, 3) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$3 - \eta\mu x_0 = \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot (0 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 - \eta\mu x_0 + 3 = 0$$

1^η λύση

Θεωρώ τη συνάρτηση q , με $q(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 3$, $x \in [0, \pi]$

- q συνεχής στο $[0, \pi]$ ως πράξεις συνεχών

- $q(0) = 3 > 0$

$$q(\pi) = -\pi + 3 < 0$$

Θ. Bolzano

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$, τέτοιο ώστε $q(x_0) = 0$

άρα υπάρχει σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο A να διέρχεται από το $M(0, 3)$.

Παρατήρηση :

Είναι $q'(x) = (x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 3)' = -x \cdot \eta\mu x < 0$, για $x \in (0, \pi)$
άρα η συνεχής q είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$,
επομένως το σημείο A είναι το μοναδικό σημείο της C_f ,
που η εφαπτομένη της C_f στο A διέρχεται από το $M(0, 3)$.

**2^η λύση**

Θεωρώ τη συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = \frac{\eta\mu x - 3}{x}$, $x \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

- φ συνεχής στο $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ ως πράξεις συνεχών

- φ παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$\text{με } \varphi'(x) = \left(\frac{\eta\mu x - 3}{x}\right)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot x - (\eta\mu x - 3)}{x^2} = \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 3}{x^2}$$

$$\bullet \varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\eta\mu\frac{5\pi}{6} - 3}{\frac{5\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} - 3}{\frac{5\pi}{6}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5\pi}{6}} = -\frac{30}{10\pi} = -\frac{3}{\pi}$$

$$\varphi(\pi) = \frac{\eta\mu\pi - 3}{\pi} = \frac{0 - 3}{\pi} = -\frac{3}{\pi}$$

από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right) \subseteq (0, \pi)$,

$$\text{τέτοιο ώστε } \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 - \eta\mu x_0 + 3}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 - \eta\mu x_0 + 3 = 0$$

άρα υπάρχει σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο A να διέρχεται από το $M(0, 3)$.

Παρατήρηση:

Η συνάρτηση q , με $q(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 3$, $x \in [0, \pi]$

έχει $q'(x) = (x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 3)' = -x \cdot \eta\mu x < 0$, για $x \in (0, \pi)$

άρα η συνεχής q είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$,

επομένως το σημείο A είναι το μοναδικό σημείο της C_f ,

που η εφαπτομένη της C_f στο A διέρχεται από το $M(0, 3)$.