ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 25/5/15

ΘΕΜΑ Α

Α1 Απόδειξη σελ. 194

Α2 Ορισμός – Θεωρία σελ. 188

Α3 Ορισμός - Θεωρία σελ. 150

Α4)

α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow$$
$$|z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow$$
$$(z-4)\cdot(\bar{z}-4) = 4\cdot(z-1)\cdot(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}+16=4z\bar{z}+4 \Leftrightarrow$$
$$3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z}=4 \Leftrightarrow$$
$$|z|^2=4 \Leftrightarrow$$
$$|z|=2$$

Άρα, ο γ.τ. των M(z) είναι κύκλος με κέντρο το O (0,0) και ρ=2.

$$C: x^2+y^2=4$$

Β2.

$$A(z_1), B(z_2) \in C \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|=2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha)\begin{cases} |z|^2=4 \Leftrightarrow z_1\bar{z_1}=4 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z_1}=\dfrac{4}{z_1} \\ z_1=\dfrac{4}{\bar{z_1}} \end{cases} \\ |z_2|^2=4 \Leftrightarrow z_2\bar{z_2}=4 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z_2}=\dfrac{4}{z_2} \\ z_2=\dfrac{4}{\bar{z_2}} \end{cases} \end{cases}$$

$$\bar{w}=\overline{\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}}=\frac{2\bar{z_1}}{\bar{z_2}}+\frac{2\bar{z_2}}{\bar{z_1}}=$$

$$\frac{2\cdot\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\frac{2\cdot\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=\frac{\frac{2}{z_1}}{\frac{1}{z_2}}+\frac{\frac{2}{z_2}}{\frac{1}{z_2}}=$$

$$\frac{2z_2}{z_1}+\frac{2z_1}{z_2}=w,\ w\in R$$

$$\beta)|w|=\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le\left|\frac{2z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{2z_2}{z_1}\right|=2\cdot\frac{|z_1|}{|z_2|}+2\cdot\frac{|z_2|}{|z_1|}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} |w|\le 4 \\ w\in R \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow -4\le w\le 4$$

Β3.

$$w=-4 \Leftrightarrow 2z_1^{\ 2}+2z_2^{\ 2}=-4z_1z_2 \Leftrightarrow$$
$$z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_1=-z_2$$

Τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\mathrm{AB}=|z_1-z_2|=|z_1+z_1|=2|z_1|=2\cdot 2=4$$
$$\mathrm{A\Gamma}=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1||1-2i|=2\sqrt{5}$$
$$\mathrm{B\Gamma}=|z_2-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|z_1||-1-2i|=2\sqrt{5}$$

Άρα ΑΓ=ΒΓ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)}=\frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$O\mu\omega\varsigma\ f'(x)=0 \Leftrightarrow -x=0 \Rightarrow x=0$$

$A\rho\alpha$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	ΟΜ	↘

$$E\sigma\tau\omega \quad \mathrm{A}_1=(-\infty,0\,]\ \kappa\alpha\iota\ \mathrm{A}_2=[0,+\infty)$$

$$f(\mathrm{A}_1)=f((-\infty,0\,])\overset{f\uparrow}{=}(\lim_{x\to-\infty}f(x),\,f(0)\,]=(0,1]$$

$$f(\mathrm{A}_2)=f([0,+\infty))\overset{f\downarrow}{=}(\lim_{x\to+\infty}f(x),\,f(0)\,]=(0,1]$$

$$f(0)=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$A\rho\alpha\quad f(A)=f(\mathrm{A}_1)\cup f(\mathrm{A}_2)=(0,1]$$

Γ2.

F(A)=(0,1]

$$0 < f(x) \le 1 \overset{f\ \sigma\tau o[0,1]\gamma\nu\eta\sigma.\varphi\theta\iota\nu.}{\Rightarrow}$$

$$f(f(x)) \ge f(1)$$

$$f(f(x)) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Γ3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{1+x-1} = f'(1) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

Γ4.

$\acute{E}\sigma\tau\omega\ \ \varepsilon_1 : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ *όλες οι εφαπτόμενες της συνάρτησης* f
όπου $M(x_0, f(x_0))$ *το σημείο επαφής*

$$A(3,0) \in \varepsilon_1 \Rightarrow 0 - f(x_0) = f'(x_0)(3 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f(x_0) = f'(x_0)(3 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{x_o^2+1}} = -\frac{x_o}{(x_o^2+1)\sqrt{(x_o^2+1)}}(3 - x_o) \overset{\cdot\sqrt{x_o^2+1}}{\Leftrightarrow} 1 = \frac{x_o(3-x_o)}{x_o^2+1} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_o^2 + 1 = 3x_o - x_o^2$$

$$2x_o^2 - 3x_o + 1 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_o = 1 \\ \acute{\eta} \\ x_o = 1/2 \end{array} \right.$$

- $$\Gamma\iota\alpha\ x_o=1\ \acute{\varepsilon}\chi\omega$$
  $$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow \varepsilon: y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$$

- $$\Gamma\iota\alpha\ \ x_o=\frac{1}{2}\ \ \acute{\varepsilon}\chi\omega:$$
  $$\varepsilon: y-f(\frac{1}{2})=f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})\Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow \varepsilon: y-\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{4\sqrt{5}}{25}(x-\frac{1}{2})$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$xf(x)+\sigma\upsilon\nu x=1-x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\quad ,x\neq 0$$

$$xf(x)=1-\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}$$

Άρα

$$f(x)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-\frac{x^2\eta\mu(\frac{1}{x})}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu(\frac{1}{x})\qquad ,x\neq 0$$

Όμως πρέπει η f συνεχής στο x=0, άρα

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu(\frac{1}{x})\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)-\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu(\frac{1}{x})\right)\overset{(1),(2)}{=}0-0=0$$

$$\bullet\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=0$$

$$\bullet\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le 1\overset{\cdot|x|}{\Rightarrow}|x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|x|\Rightarrow\left|x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|x|\Rightarrow-|x|\le x\,\eta\mu\frac{1}{x}\le|x|$$

$\lim\limits_{x\to 0}|x| = \lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$ (2)

οπότε $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - x\eta\mu(\dfrac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Δ2.

$$f'(x) = \frac{\eta\mu x \cdot x - (1-\sigma\upsilon\nu x)}{x^2} - \eta\mu\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{x\eta\mu x - 1 + \sigma\upsilon\nu x}{x^2} - \eta\mu\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$$

Δ3.

Αρκεί ν.δ.ο $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -1$

Όμως

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right) - \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = 0 - 1 = -1$$

• $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \sigma\upsilon\nu x \leq 2 \overset{:x>0}{\Rightarrow}$

$0 \leq \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} \leq \dfrac{2}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{x} = 0$ *άρα από κριτήριο παρεμβολής* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

• $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\eta\mu t}{t} = 1$ *όπου* $\dfrac{1}{x} = t,\ x \to +\infty,\ t \to 0$

Δ4.

Από Δ3 έχουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1 < 0$ άρα σε μια περιοχή κοντά στο $+\infty$ υπάρχει α ώστε f(α)<0

και

$$f\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\pi}\right)}{\frac{1}{\pi}}-\frac{1}{\pi}\eta\mu\pi=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\pi}\right)}{\left(\frac{1}{\pi}\right)}>0$$

$$-1<-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}<1\Rightarrow 0<1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}<2$$

Άρα έχω:

$$\left.\begin{array}{l} \text{f } \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ [\frac{1}{\pi},a]\subseteq[\frac{1}{\pi},+\infty) \\ \omega\varsigma\ \pi\rho\acute{\alpha}\xi\varepsilon\iota\varsigma\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\omega}\nu\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu \\ f\left(\frac{1}{\pi}\right)\cdot f(\alpha)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\pi\acute{o}\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ Bolzano\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha$$

$$\tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu\ \exists x_o\in(\frac{1}{\pi},\alpha)\subseteq[\frac{1}{\pi},+\infty)\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(x_o)=0$$