

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει  $|\bar{z}| = |-z|$   
(μονάδες 2)

**β)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με την ίδια τεταγμένη.

(μονάδες 2)

**γ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$

(μονάδες 2)

**δ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

(μονάδες 2)

**ε)** Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό  $z = \alpha + \beta i$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$z - \bar{z} = 2\beta$$

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  για τους οποίους η εξίσωση

$$2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2|z|, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα, την  $x = 1$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho_1 = 1$ , καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο  $K(4,3)$  και ακτίνα  $\rho_2 = 4$

**Μονάδες 8**

- B2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

**Μονάδες 7**

- B3.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  του ερωτήματος B1 να αποδείξετε ότι:

$$|z - w| \leq 10 \quad \text{και} \quad |z + w| \leq 10$$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \frac{1}{2}$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

- Γ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  του ερωτήματος Γ1.

**Μονάδες 5**

- Γ3.** Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2)$$

**Μονάδες 7**

- Γ4.** Να βρείτε την τιμή του  $\kappa \in \mathbb{R}$  ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{f'(x)} - \kappa) = 5$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύουν:

- $\sqrt{x^2 + 1} f'(x) + \frac{x f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = 0$
- $f(0) = 0$

- Δ1.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 6**

- Δ2.** Αν  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ , τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη.

**Μονάδες 6**

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x^4 + 1) = f(3x^3 + 2x^2 + 3x)$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$  και μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(1, 4)$

**Μονάδες 8**

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$4x^3 - 9x^2 = 4x + 3$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 4)$

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:00

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**