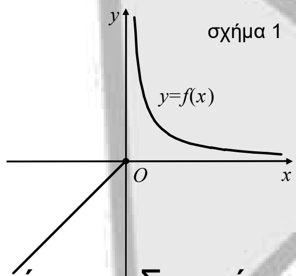
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

Α2. α. Ψ

β. Αντιπαράδειγμα στο διπλανό σχήμα



σχήμα 1

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 74

Α4. α. Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 3$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(2\alpha x + 6) = 6\alpha + 6\\
&\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left[-x^2 + (3-\alpha)x + 3\alpha\right] = 0\\
&f(3) = 2\alpha\cdot 3 + 6 = 6\alpha + 6
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 6\alpha + 6 = 0 \quad \boxed{\alpha = -1}$$

Β2. Για $\alpha = -1$ είναι $f(x) = \begin{cases} -2x + 6, & x \le 3 \\ -x^2 + 4x - 3, & x > 3 \end{cases}$

▷ $x < 3$: $f'(x) = (-2x + 6)' = -2$

▷ $x > 3$: $f'(x) = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4$

▷ $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x) - f\cancel{(3)}}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{-2x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{-2\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = -2\\
&\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x) - f\cancel{(3)}}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{-x^2+4x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = -2
\end{aligned}\right\} f'(3) = -2$$

Επομένως $f'(x) = \begin{cases} -2, & x < 3 \\ -2x + 4, & x \ge 3 \end{cases}$

Β3. Για $x \ge 3$ είναι $f'(x) = -2x + 4$.

$x \ge 3 \;\Leftrightarrow\; -2x \le -6 \;\Leftrightarrow\; -2x + 4 \le -6 + 4 \;\Leftrightarrow\; f'(x) \le -2 < 0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(x - \dfrac{4}{x^2}\right)' = 1 + \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{x^3+8}{x^3},\ x \neq 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3+8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x^3+8	$-$	0	$+$		$+$
x^3	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$
f	↗		↘	‖	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$.
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -2$, την τιμή

$f(-2) = -2 - \dfrac{4}{(-2)^2} = -2 - 1 = -3.$

Γ2.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - \dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4}{x^2} = +\infty$

  άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ ($y'y$)

- $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4}{x^2} = 0$, διότι $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$

  άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$

- $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x) - x] = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4}{x^2} = 0$, διότι $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$

  άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$

Γ3. $f(2) = 1$ και $f'(2) = 2$, άρα

$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - 1 = 2\cdot(x-2) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y - 1 = 2x - 4 \Leftrightarrow$ $\mathbf{(\varepsilon): y = 2x - 3}$

Γ4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{f(x)-1} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x-\frac{4}{x^2}-1} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\frac{x^3-4-x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2(x-2)}{x^3-x^2-4}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^3-x^2-4} \underset{DL'H}{=} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x}{3x^2-2x} = \dfrac{4}{8} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν x είναι το μήκος του σύρματος για να σχηματιστεί το τετράγωνο, τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\dfrac{x}{4}$ m.

$E_{\text{τετραγώνου}} = \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = \dfrac{x^2}{16}$ m^2, $0 < x < 8$

Το μήκος του σύρματος που χρησιμοποιήθηκε για τον σχηματισμό του κύκλου έχει μήκος $(8 - x)$ m.

μήκος κύκλου $L = 2\pi\rho \Leftrightarrow 8 - x = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \dfrac{8-x}{2\pi}$ m

$E_{\text{κύκλου}} = \pi\rho^2 = \pi\left(\dfrac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \cancel{\pi}\dfrac{(8-x)^2}{4\pi^{\cancel{2}}} = \dfrac{x^2-16x+64}{4\pi}$ m^2

$E(x) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x^2-16x+64}{4\pi} = \dfrac{\pi x^2}{16\pi} + \dfrac{4x^2-64x+256}{16\pi}$

$= \dfrac{\pi x^2+4x^2-64x+256}{16\pi} = \dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, $x \in (0\ ,\ 8)$

Δ2. $E'(x) = \left[\dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\right]' = \dfrac{2(\pi+4)x-64}{16\pi} = \dfrac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\pi+4)x-32}{8\pi} = 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{32}{\pi+4}$

x	$\dfrac{32}{\pi+4}$ 8
$E'(x)$	$-$ ○ $+$
$E(x)$	$\searrow$ $\nearrow$

Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν $x = \dfrac{32}{\pi+4}$ m.

Όταν $x = \dfrac{32}{\pi + 4}$, τότε : πλευρά τετραγώνου $= \dfrac{x}{4} = \dfrac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \dfrac{8}{\pi + 4}$ m

διάμετρος κύκλου $= 2\rho = \cancel{2}\dfrac{8 - x}{\cancel{2}\pi} = \dfrac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \dfrac{\frac{8\pi + 32 - 32}{\pi + 4}}{\pi}$

$$= \dfrac{\frac{8\pi}{\pi+4}}{\pi} = \dfrac{8\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}\cdot(\pi + 4)} = \dfrac{8}{\pi + 4} \text{ m}$$

Επομένως όταν το Ε γίνεται ελάχιστο, τότε
η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει ακριβώς μία ρίζα

- $\Delta_1 = \left(0\,,\ \dfrac{32}{\pi + 4}\right)$

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

$$\lim_{x\to0^+} E(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{256}{16\pi} = \frac{16}{\pi}$$

$$\lim_{x\to\frac{32}{\pi+4}^-} E(x) = \lim_{x\to\frac{32}{\pi+4}^-}\frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{16}{\pi + 4}$$

$\Rightarrow E(\Delta_1) = \left(\dfrac{16}{\pi+4}\,,\ \dfrac{16}{\pi}\right)$

Είναι $5 \in \left(\dfrac{16}{\pi+4}\,,\ \dfrac{16}{\pi}\right)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta_1$ ώστε $E(x_0) = 5$ m^2

- $\Delta_2 = \left(\dfrac{32}{\pi + 4}\,,\ 8\right)$

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$$

$$\lim_{x\to8^-} E(x) = \lim_{x\to8^-}\frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{64\pi}{16\pi} = 4$$

$\Rightarrow E(\Delta_2) = \left[\dfrac{16}{\pi+4}\,,\ 4\right)$

Είναι $5 \notin \left[\dfrac{16}{\pi+4}\,,\ 4\right)$, άρα η εξίσωση $E(x) = 5$ είναι αδύνατη στο Δ_2

Επομένως η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει ακριβώς μια ρίζα.