



ΘΕΜΑ Α

A1. γ

A2. α

A3. γ

A4. δ

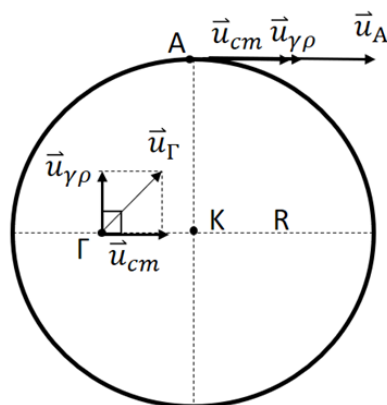
A5. α) Σωστό
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1.

α) Σωστή απάντηση είναι η (iii)

β)





Για το σημείο Α ισχύει της περιφέρειας του τροχού που εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύει ότι:

$$v_{cm} = v_{\gamma\rho A} = \omega R$$

$$\text{Οπότε } \vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho} \text{ ή } v_A = v_{cm} + v_{\gamma\rho} \text{ ή}$$

$$v_A = 2v_{cm} = 2\omega R$$

$$\text{Για το σημείο Γ ισχύει: } \vec{v}_\Gamma = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho} \text{ ή}$$

$$v_\Gamma = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + \omega^2 \left(\frac{R}{2}\right)^2} \text{ ή}$$

$$v_\Gamma = \sqrt{\frac{5}{4}\omega^2 R^2} \text{ ή } v_\Gamma = \frac{\sqrt{5}}{2}\omega R$$

$$\text{Οπότε ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων ισούται με: } \frac{v_\Gamma}{v_A} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\omega R}{2\omega R} \text{ ή } \frac{v_\Gamma}{v_A} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

B2. α) Σωστή απάντηση είναι η (ii)

β)



Η κρούση των σωμάτων είναι Κεντρική και ελαστική.

Από το σύστημα εξισώσεων της Αρχής Διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) και της Αρχής Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας (ΑΔΚΕ) προκύπτουν οι τύποι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ και } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$



Το ποσοστό της Κινητικής Ενέργειας της σφαίρας Σ_1 που μεταφέρθηκε στη σφαίρα Σ_2 ισούται με:

$$\Pi_1\% = \frac{K_{1\alpha\rho\chi} - K_{1\tau\epsilon\lambda}}{K_{1\alpha\rho\chi}} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi_1\% = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi_1\% = \frac{v_1^2 - v_1'^2}{v_1^2} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi_1\% = \frac{v_1^2 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2}{v_1^2} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi_1\% = \left(1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}\right) 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi_1\% = \frac{(m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi_1\% = \frac{m_1^2 + 2 m_1 m_2 + m_2^2 - m_1^2 + 2 m_1 m_2 - m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi_1\% = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} 100\% \quad (1)$$



Ομοίως:

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad \text{και} \quad v_1' = \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$\text{Το ποσοστό } \Pi_2\% = \frac{K_{2\alpha\rho\chi} - K_{2\tau\epsilon\lambda}}{K_{2\alpha\rho\chi}} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi_2\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi_2\% = \frac{v_2^2 - v_2'^2}{v_2^2} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi_2\% = \frac{v_2^2 - \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} v_2^2}{v_2^2} 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi_2\% = \frac{(m_1 + m_2)^2 - (m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} 100\% \quad \text{ή} \quad \Pi_2\% = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} 100\% \quad (2)$$

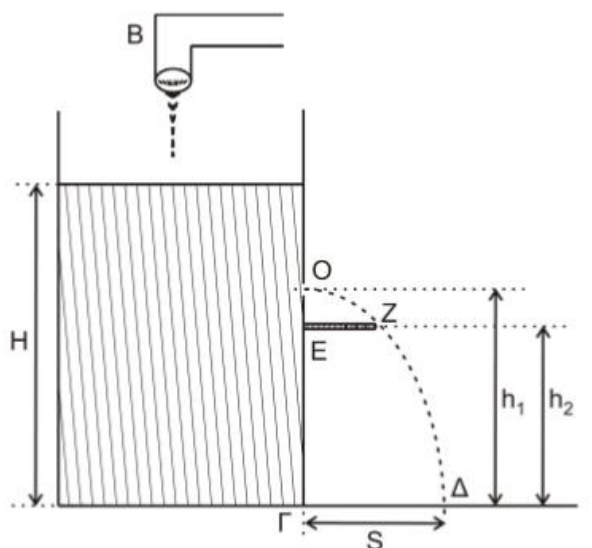
Δηλαδή $\Pi_1\% = \Pi_2\%$



B3.

α) Σωστή απάντηση η (i).

β)



Η στάθμη του ρευστού διατηρείται σταθερή οπότε η εισερχόμενη παροχή ρευστού είναι ίση με την εξερχόμενη.

Άρα η παροχή της βρύσης είναι ίση με την παροχή της οπής.

Το ρευστό εκτελεί οριζόντια βολή και διανύει στον οριζόντιο άξονα απόσταση s στο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να πέσει από το ύψος h_1 .

$$s = v \cdot t_1 \quad (1)$$

Το ρευστό διέρχεται οριακά δίπλα από το άκρο Z της ράβδου.

Άρα διανύει οριζόντια απόσταση ίση με $s/2$ σε χρόνο ίσο με τον χρόνο που χρειάζεται για να διανύσει κατακόρυφη απόσταση $y = h_1 - h_2$.

$$\frac{s}{2} = v \cdot t_2 \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει:

$$\frac{s}{\frac{s}{2}} = \frac{v \cdot t_1}{v \cdot t_2} \Leftrightarrow \frac{v \cdot t_1}{v \cdot t_2} = 2 \Leftrightarrow t_1 = 2t_2$$

Άρα λόγω οριζόντιας βολής :

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$h_1 - h_2 = \frac{1}{2} g t_2^2$$



Οπότε με διαίρεση κατά μέλη

$$\frac{h_1}{h_1 - h_2} = \frac{\frac{1}{2}gt_1^2}{\frac{1}{2}gt_2^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{(2t_2)^2}{t_2^2} = 4$$

Οπότε φέρνουμε το αποτέλεσμα σε γραμμική μορφή:

$$h_1 = 4(h_1 - h_2) \Leftrightarrow h_1 = 4h_1 - 4h_2 \Leftrightarrow 3h_1 = 4h_2$$

$$h_1 = \frac{4}{3}h_2$$

Επειδή $h_2 = \frac{21}{32}H$:

$$h_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{21}{32}H = \frac{7}{8}H$$

Επειδή η διατομή της οπής είναι κατά πολύ μικρότερη της διατομής του ανοικτού δοχείου η ταχύτητα με την οποία κατεβαίνει η στάθμη είναι αμελητέα.

Εφαρμόζουμε Bernoulli μεταξύ του ανώτερου σημείου του ρευστού και της οπής επιλέγοντας ως σημείο αναφοράς δυναμικής ενέργειας το έδαφος:

$$P_{atm} + \rho \cdot g \cdot H = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot \frac{7}{8}H + \frac{1}{2}\rho \cdot v^2$$

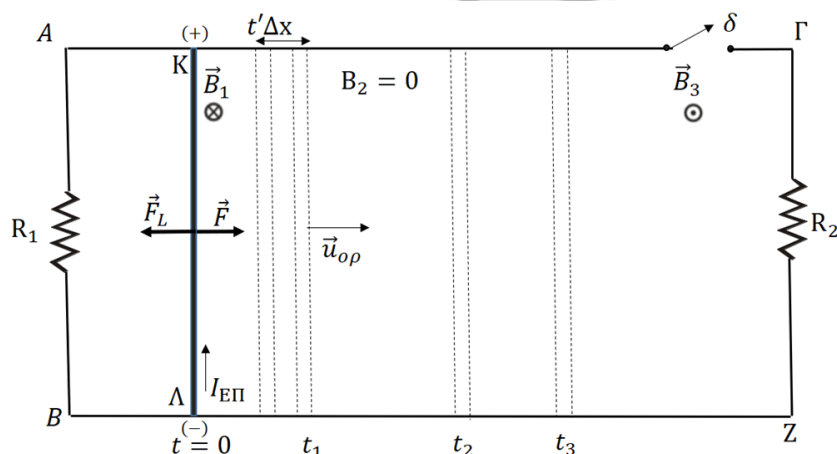
$$\frac{1}{2}\rho \cdot v^2 = \rho \cdot g \cdot \frac{H}{8} \Leftrightarrow v^2 = g \cdot \frac{H}{4} \Leftrightarrow v = \frac{\sqrt{g \cdot H}}{2}$$

Οπότε τελικά η παροχή της βρύσης είναι ίση με:

$$\Pi = A \cdot v = \frac{A}{2}\sqrt{g \cdot H}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.





Μετά την χρονική στιγμή $t=0$, εφόσον στον αγωγό ασκείται μια εξωτερική δύναμη $\vec{F}$, στον βρόγχο ΚΛΔΑΚ μεταβάλλεται η μαγνητική ροή. Επομένως, στα άκρα του αγωγού ΚΛ εμφανίζεται μία επαγωγική τάση. Λόγω του κανόνα του Lenz θα ασκηθεί δύναμη Laplace ($\vec{F}_L$) η οποία θα αντιστέκεται στο αίτιο δημιουργίας της. Επομένως θα είναι αντίρροπη της $\vec{F}$.

$$E_{επ} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} = \frac{B \cdot \Delta S}{\Delta t} = B \cdot \frac{L \cdot \Delta x}{\Delta t}$$

$$E_{επ} = BvL \quad (1)$$

Το κύκλωμα είναι κλειστό επομένως έχουμε τη δημιουργία επαγωγικού ρεύματος $I_{ΕΠ}$.

$$I_{ΕΠ} = \frac{E_{επ}}{R_{ΚΛ} + R_1} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$I_{ΕΠ} = \frac{BvL}{R_{ΚΛ} + R_1} \quad (2)$$

Η δύναμη Laplace θα έχει μέτρο $F_L = BI_{ΕΠ}L \stackrel{(2)}{\Rightarrow} F_L = \frac{B^2 L^2}{R_{ΚΛ} + R_1} v \quad (3)$

$$\Sigma F = ma \text{ ή } F - F_L = ma \text{ ή } F - \frac{B^2 L^2}{R_{ΚΛ} + R_1} v = ma \quad (4)$$

Όσο αυξάνεται η ταχύτητα μεγαλώνει το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_L$, επομένως το μέτρο της $\vec{\Sigma F}$ μειώνεται με συνέπεια να έχουμε μεταβαλλόμενη επιτάχυνση με μειούμενο μέτρο.

Άρα η κίνηση είναι μία ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση με συνεχώς μεταβαλλόμενο (μειούμενο) μέτρο επιτάχυνσης μέχρι να μηδενιστεί το μέτρο της.

Το μέτρο της ταχύτητας συνεχώς αυξάνεται, επομένως αυξάνεται η $E_{επ}$, έπειτα το μέτρο του επαγωγικού ρεύματος και κατά συνέπεια το μέτρο της $\vec{F}_L$.

Άρα, η $\vec{\Sigma F}$ συνεχώς έχει μειούμενο μέτρο μέχρι να μηδενιστεί.

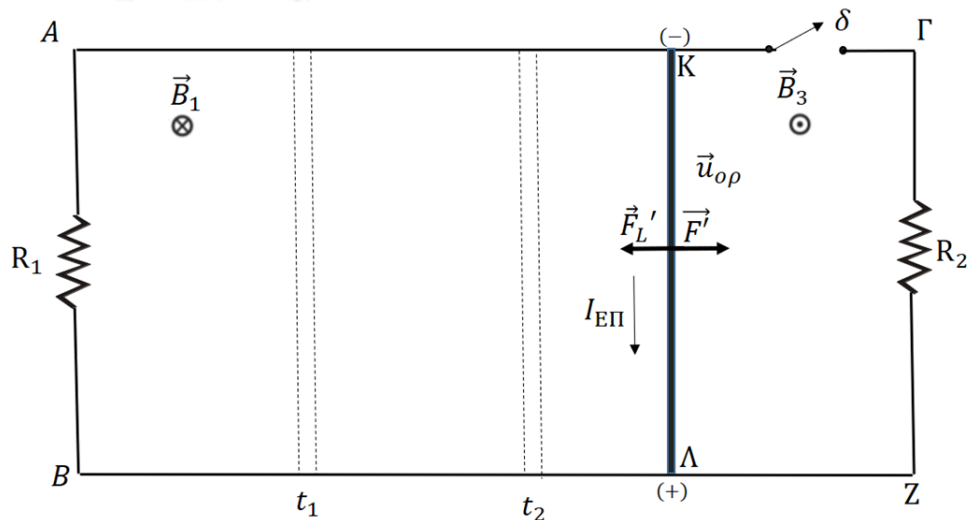
$$(4) \xrightarrow{\alpha=0, u=u_{op}} F - \frac{B^2 L^2}{R_{ΚΛ} + R_1} v_{op} \text{ ή } v_{op} = \frac{F(R_{ΚΛ} + R_1)}{B^2 L^2} = \frac{0,8(2+3)}{1 \cdot 1} \text{ ή } v_{op} = 4 \text{ m/s}$$

Γ2.

Την χρονική στιγμή t_1 παύει να ασκείται η δύναμη $\vec{F}$ και ταυτόχρονα η $\vec{F}_L$ διότι ο αγωγός κινείται σε χώρο όπου δεν υπάρχει Ο.Μ.Π.

Η ράβδος εκτελεί Ε.Ο.Κ με $\Sigma F = 0$.

Την χρονική στιγμή t_2 εισέρχεται σε Ο.Μ.Π με $v = v_{op} = 4 \text{ m/s}$



Στα άκρα του αγωγού αναπτύσσεται τάση από επαγωγή, η πολικότητα της οποίας φαίνεται στο σχήμα. Ο αγωγός διαρρέεται από I_{EP} οπότε ασκείται $\vec{F}_L$. Επομένως, για να έχουμε κίνηση με $v = v_{op}$ θα πρέπει:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } F' = F_L \text{ ή } F_L = \frac{B^2 L^2}{R_{KA} + R_1} u_{op} \text{ ή } F_L = \frac{1 \cdot 1 \cdot 5}{5} \text{ ή } F_L = 0,8 N$$

Γ3.

$$q_{EP} = \frac{\Delta \Phi}{R_{ολ}} \text{ (από νόμο Neumann)}$$

από όπου $\Delta \Phi = 0,2 \cdot 5 \text{ Wb}$ ή $\Delta \Phi = 1 \text{ Wb}$

$$\text{επίσης } \Delta \Phi = B_3 \cdot \Delta S \text{ ή } \Delta S = 1 \text{ m}^2$$

$$\text{Ακόμα, } \Delta S = L \cdot \Delta x \text{ ή } \Delta x = 1 \text{ m}$$

$$\text{Η θερμότητα } Q = |W_{FL}| = |F_L \cdot \Delta x| = |F' \cdot \Delta x| \text{ ή } Q = 0,8 \cdot 1 = 0,8 J$$

2ος τρόπος

Επειδή το ρεύμα είναι σταθερό και ίσο με 0,8 A μπορούμε να υπολογίσουμε τη θερμότητα από την σχέση $Q = I_{EP}^2 \cdot R_{ολ} \cdot \Delta t$,

$$\text{όπου } \Delta t = \frac{\Delta x}{v_{op}}$$

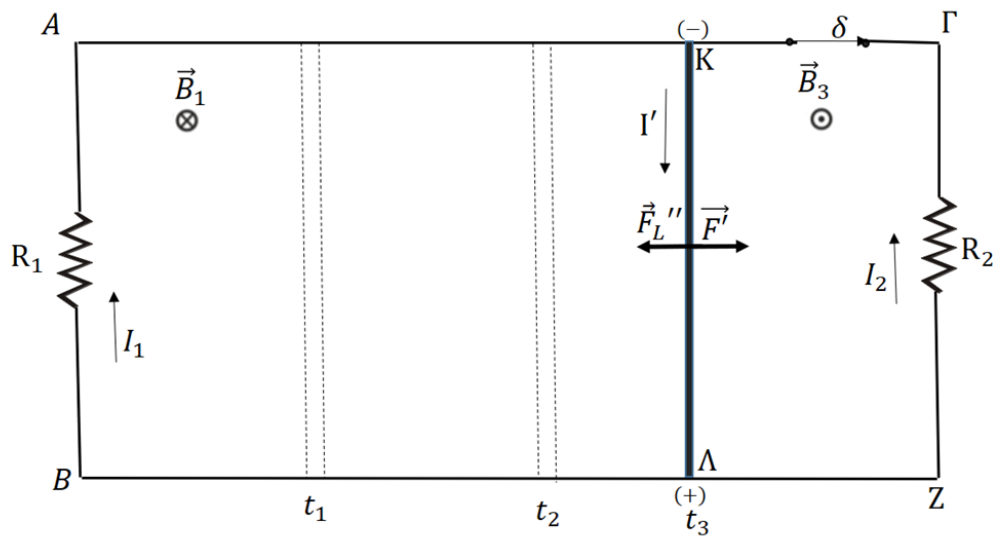
Γ4. Όταν κλείσει ο διακόπτης οι αντιστάσεις R_1 και R_2 συνδέονται παράλληλα άρα

$$R_{εξ} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 1 \Omega$$



Επειδή αποκτά οριακή ταχύτητα ισχύει ότι:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } F'_L = F' \text{ ή } F' = BI'L \text{ ή } I' = 0,8A$$



$$E'_{\varepsilon\pi} = I'(R_{\varepsilon\xi} + R_{K\Lambda}) = 0,8(1 + 3) = 3,2V$$

$$u'_{op} = \frac{E'_{\varepsilon\pi}}{BL} = \frac{3,2}{1} = 3,2m/s$$

$$V_{K\Lambda} = E'_{\varepsilon\pi} = I'R_{K\Lambda} = 3,2 - 0,8 \cdot 3 = 0,8V$$

με πολικότητα όπως φαίνεται στο σχήμα ($V_{K\Lambda} = V_K - V_{\Lambda} = -0,8V$).

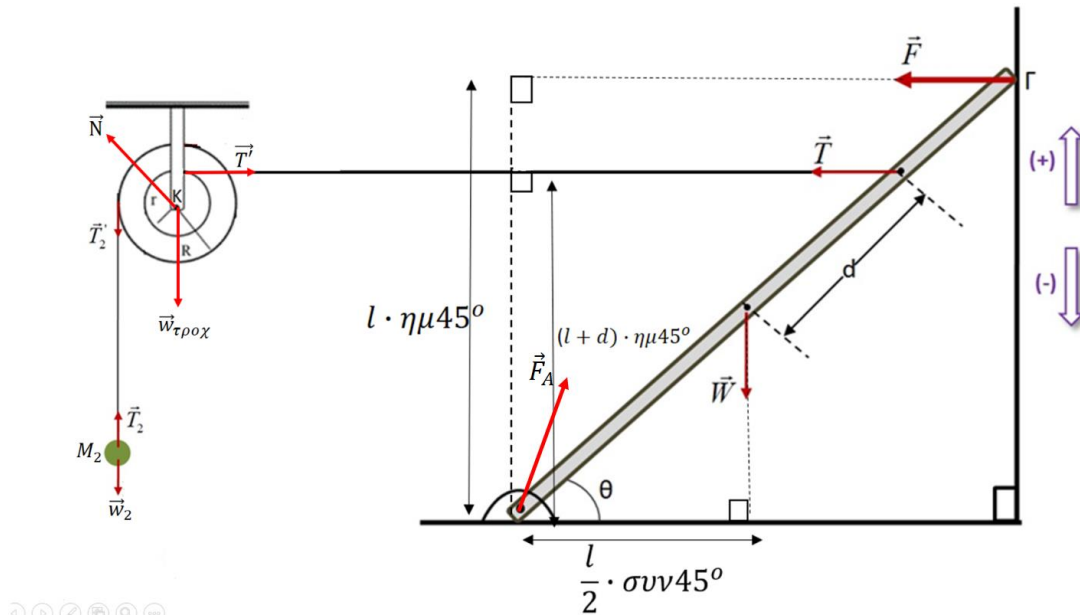
$$\text{Ισχύει: } V_1 = V_2 = 0,8V$$

$$\text{Άρα } I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{0,8}{2} = 0,4A$$

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = 0,4A$$



ΘΕΜΑ Δ



Δ1.

Το όλο σύστημα ισορροπεί άρα για το σώμα μάζας m_2 ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \quad \text{ή} \quad T_2 - w_2 = 0 \quad \text{ή} \quad T_2 = m_2 \cdot g \quad \text{ή} \quad T_2 = 30 \text{ N}$$

Από 3^ο Νόμο Νεύτωνα και νήμα αβαρές $|T_2| = |T'_2| = 30 \text{ N}$

Τροχαλία: $\Sigma \vec{\tau}_{(K)} = 0 \quad \text{ή} \quad T'_2 \cdot R - T' \cdot r = 0 \quad \text{ή} \quad T'_2 \cdot 2r = T' \cdot r \quad \text{ή} \quad T' = 2 T'_2 \quad \text{ή} \quad T' = 60 \text{ N}$

Από 3^ο Νόμο Νεύτωνα και νήμα αβαρές $|T'| = |T| = 60 \text{ N}$

Ράβδος: $\Sigma \vec{\tau}_{(A)} = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{\tau}_w + \vec{\tau}_T + \vec{\tau}_F = 0 \quad \text{ή}$

$$- w \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin 45^\circ + T \left(\frac{l}{2} + d \right) \eta \mu 45^\circ + F \cdot l \cdot \eta \mu 45^\circ = 0 \quad \text{ή}$$

$$- w \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + T \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{6} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} + F \cdot l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \text{ή}$$

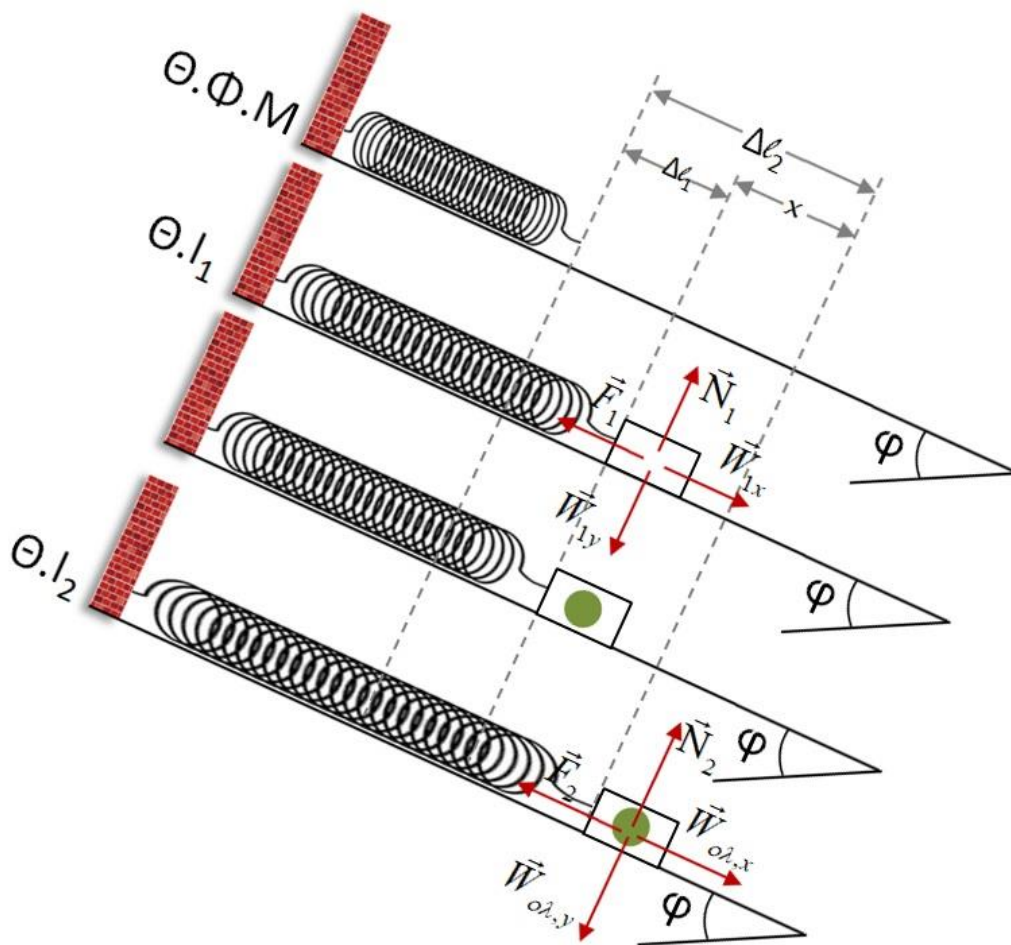
$$-50 + 60 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) + F = 0 \quad \text{ή}$$

$$F = 50 - 60 \left(\frac{3}{6} + \frac{1}{6} \right)$$

$$F = 50 - 40 \quad \text{ή} \quad F = 10 \text{ N}$$



Δ2.



$$\Theta.Ι.1: \Sigma F_x = 0 \text{ ή } F_1 = w_{1x} \text{ ή } k \cdot \Delta l_1 = m_1 \cdot g \cdot \eta\mu 30^\circ$$

$$\Delta l_1 = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{20} \text{ m}$$

$$\Theta.Ι.2: \Sigma F_x = 0 \text{ ή } F_2 = w_{0\lambda x} \text{ ή } k \cdot \Delta l_2 = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot \eta\mu 30^\circ$$

$$\Delta l_2 = \frac{40 \cdot \frac{1}{2}}{100} = \frac{4}{20} \text{ m}$$

$$x = \Delta l_2 - \Delta l_1 \text{ ή } x = \frac{4}{20} - \frac{1}{20} \text{ ή } x = \frac{3}{20} \text{ m}$$

$$E = K + U \text{ ή } \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) V^2}{k} + x^2}$$



$$A = 0,3 \text{ m}$$

Δ3.

$$x = A \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ή} \quad \omega = 5 \text{ rad/s}$$

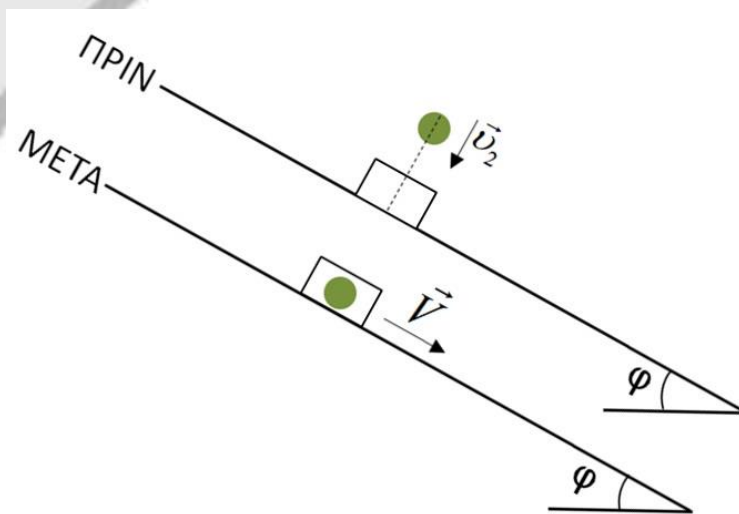
$$t = 0, x = -\frac{3}{20} \text{ m}, u > 0$$

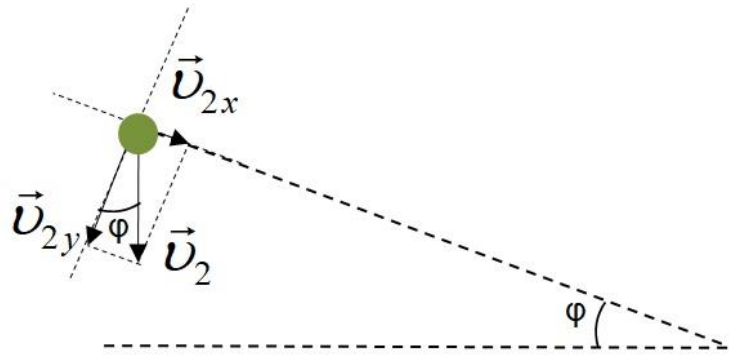
$$-\frac{3}{20} = 0,3 \cdot \eta\mu\varphi_0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = -\frac{3}{6} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

- $\varphi_0 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ Για $\kappa=1$ $\varphi_0 = 2\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $\varphi_0 = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$ (Δεκτή γιατί $u > 0$ άρα $\sin\varphi_0 > 0$)
- $\varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$

Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $x = 0,3 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{11\pi}{6}\right)$ (S.I.)

Δ4.





$$u_{2x} = u_2 \cdot \eta\mu\phi$$

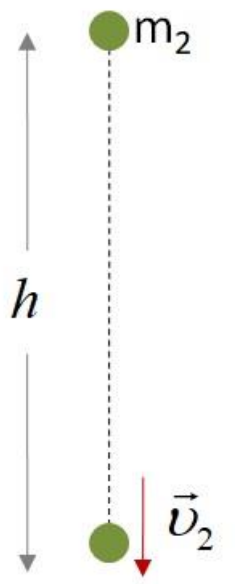
Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) στον x'x άξονα:

$$\vec{P}_{\chi\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\chi\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \text{ ή }$$

$$m_2 \cdot u_{2x} = (m_1 + m_2) V \text{ ή }$$

$$u_{2x} = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$u_{2x} = u_2 \cdot \eta\mu 30^\circ \text{ ή } u_2 = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$





Από τις εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης ισχύει ότι:

$$u_2 = g \cdot t \quad \text{ή} \quad t = \frac{2\sqrt{3}}{10} \text{ s}$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \text{ή} \quad h = 0,6 \text{ m}$$

2ος τρόπος

Η παραπάνω κίνηση μπορεί να μελετηθεί είτε με το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (ΘΜΚΕ) είτε με την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (ΑΔΜΕ)

Δ5.

Ο λόγος του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου προς το μέτρο της δύναμης επαναφοράς στη θέση της μέγιστης επιμήκυνσης του ελατηρίου ισούται με:

$$\frac{F_{ελ \max}}{F_{επ \max}} = \frac{k (\Delta l_2 + A)}{k \cdot A} = \frac{5}{3}$$