



ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

~σελίδα 1 από 7~

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ & ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 144

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 51

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161

A4. α. Ψ

β. Σχόλιο στο σχολικό βιβλίο σελίδα 156

A5. α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. $f'(x) = [(x + \alpha)^2 - 1]' = 2(x + \alpha), x \in [-1, +\infty)$

Η κλίση της C_f στο σημείο με τετμημένη 0 είναι 2, άρα

$$f'(0) = 2 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

B2. Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x, x \in [-1, +\infty)$

$$f'(x) = (x^2 + 2x)' = 2x + 2, x \in [-1, +\infty)$$

Είναι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \geq -1$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = -1$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι 1-1,

άρα **η f αντιστρέφεται**

$$f(A) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty) = D_{f^{-1}}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = (x + 1)^2 - 1 \Leftrightarrow y + 1 = (x + 1)^2 \begin{matrix} x \geq -1 \\ \Leftrightarrow \\ y \geq -1 \end{matrix}$$

$$\sqrt{y + 1} = x + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y + 1} - 1, y \geq -1, \text{ άρα}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 1, x \geq -1}$$



ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

~σελίδα 2 από 7~

B3. $D_{f^{-1} \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_{f^{-1}}\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 - 1 \geq -1\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}, \text{ διότι } x^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$
 $(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1} - 1 = \sqrt{x^2} - 1$
 άρα $\boxed{(f^{-1} \circ g)(x) = |x| - 1, x \in \mathbb{R}}.$

B4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x) + 1}{(f^{-1} \circ g)(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{|x| - 1} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{-(x+1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{-(\sqrt{x+1})^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{\sqrt{x+1}} = \boxed{-\infty}, \text{ διότι}$
 $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} = 0 \text{ και } \sqrt{x+1} \geq 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\triangle B\Gamma K$:

$$x^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - x^2} \quad (1)$$

Είναι :

- $x > 0$ και

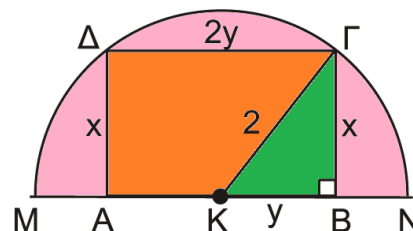
- στο ορθογώνιο $\triangle B\Gamma K$ είναι $B\Gamma < K\Gamma \Leftrightarrow x < 2$

άρα $x \in (0, 2)$

$$(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot B\Gamma = 2xy \stackrel{(1)}{\Rightarrow} E(x) = 2x \cdot \sqrt{4 - x^2}, x \in (0, 2) \Leftrightarrow$$

$$E(x) = 2\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{4 - x^2}, x \in (0, 2) \Leftrightarrow E(x) = 2\sqrt{x^2 \cdot (4 - x^2)}, x \in (0, 2) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}, x \in (0, 2)}$$



Γ2. $f'(x) = (2\sqrt{4x^2 - x^4})' = 2 \cdot \frac{(4x^2 - x^4)'}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = \frac{8x - 4x^3}{\sqrt{4x^2 - x^4}} = \frac{4x \cdot (2 - x^2)}{x \cdot \sqrt{4 - x^2}}$

$$= \frac{4(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4(\sqrt{2} + x)}{\sqrt{4 - x^2}} \cdot (\sqrt{2} - x), x \in (0, 2)$$

Είναι $f'(x) \geq 0 \stackrel{x \in (0, 2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{2} - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -\sqrt{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{2}$



ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

~σελίδα 3 από 7~

x	0	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

ολ.μεγ.

Για $x = \sqrt{2}$ είναι $y \stackrel{(1)}{=} \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, όταν $x = y = \sqrt{2}$ δηλαδή όταν το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλευρές $\sqrt{2}$ cm και $2\sqrt{2}$ cm.

$$\begin{aligned} \Gamma 3. E(x) = 2\sqrt{3} &\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2 - x^4} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - x^4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \\ 4x^2 - x^4 &= 3 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ x^2 - 1 &= 0 \text{ ή } x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ ή } x^2 = 3 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \end{aligned}$$

$x = 1$ ή $x = \sqrt{3}$ που είναι δεκτές διότι $0 < 1 < \sqrt{3} < 2$

$\Gamma 4. f(x) = [E(x) - 2\sqrt{3}] \cdot e^x, x \in (0, 2)$

$f'(x) = E'(x) \cdot e^x + [E(x) - 2\sqrt{3}] \cdot e^x, x \in (0, 2)$

• f' συνεχής στο $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ ως πράξεις συνεχών

• $f'(\sqrt{2}) = E'(\sqrt{2}) \cdot e^{\sqrt{2}} + [E(\sqrt{2}) - 2\sqrt{3}] \cdot e^{\sqrt{2}} = (4 - 2\sqrt{3}) \cdot e^{\sqrt{2}} > 0$

$f'(\sqrt{3}) = E'(\sqrt{3}) \cdot e^{\sqrt{3}} + [E(\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}] \cdot e^{\sqrt{3}} = -4 \cdot e^{\sqrt{3}} < 0$

από **Θ. Bolzano**

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

δηλαδή **η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.**



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $x \cdot f(x) = \sin x - 1$, για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

• Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) = \frac{\sin x - 1}{x}$

• $f(0) \stackrel{\text{f συνεχής}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - 1}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Δ2. • Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι :

$$f(-x) = \frac{\sin(-x) - 1}{-x} = \frac{\sin x - 1}{-x} = -\frac{\sin x - 1}{x} = -f(x)$$

• $f(0) = 0$, άρα $f(-0) = -f(0)$

Επομένως $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (η f είναι περιττή)

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-u) (-du)$$

$$= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(u) du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(u) du = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(u) du = -I$$

$$I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$

Επομένως $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0$

Θέτω $x = -u$

$dx = -du$

• $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$

• $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = -\frac{\pi}{2}$



ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

~σελίδα 5 από 7~

Δ3. Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x - 1}{x}\right)' = \frac{1 - \sin x - x \cdot \eta\mu x}{x^2}$$

Θεωρώ συνάρτηση g , με $g(x) = 1 - \sin x - x \cdot \eta\mu x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$g'(x) = (1 - \sin x - x \cdot \eta\mu x)' = -x \cdot \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -x \cdot \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \sin x = 0 \quad \overset{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}{\Rightarrow} \quad x = 0 \text{ ή } x = \pm \frac{\pi}{2}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$-x$		+	-
$\sin x$	○	+	+
$g'(x)$	○	+	-
$g(x)$			

ολ.μεγ.

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 0$ την τιμή $g(0) = 0$

$$\bullet \quad -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \xrightarrow{g\uparrow} g\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq g(x) < g(0) \Rightarrow 1 - \sin x - x \cdot \eta\mu x < 0$$

$$\bullet \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \xrightarrow{g\downarrow} g\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq g(x) < g(0) \Rightarrow 1 - \sin x - x \cdot \eta\mu x < 0$$

Είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα η f είναι γνησίως

φθίνουσα στα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ και f συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επομένως **η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$**



Δ4. Εξίσωση $2020 \cdot \sin x - x = 2020$ **(2)**, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

▷ Προφανής ρίζα το 0.

▷ Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$(2) \Leftrightarrow 2020 \sin x - 2020 = x \Leftrightarrow 2020(\sin x - 1) = x \Leftrightarrow \frac{\sin x - 1}{x} = \frac{1}{2020} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2020} \quad x \neq 0$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα

$$f(\Delta) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi} \right]$$

$\frac{1}{2020} \in f(\Delta)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ ,

άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{1}{2020}$.

$$\text{Είναι } f(x_0) = \frac{1}{2020} > 0 = f(0) \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} x_0 < 0$$

Επομένως η εξίσωση $2020 \cdot \sin x - x = 2020$ στο διάστημα

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_0 και 0, με $x_0 < 0$.

**ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ**

~σελίδα 7 από 7 ~

Δ5. Η μεγαλύτερη ρίζα του Δ4 είναι το 0, άρα $\rho = 0$ και $F(0) = 0$.Θα αποδείξουμε ότι $\pi \cdot |F(x)| \leq 2 \cdot |x|$, για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ • Για $x = 0$ ισχύει το " $=$ ". **(3)**• Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[x, 0]$, με $F'(x) = f(x)$ από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x, 0)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_1) = \frac{F(0) - F(x)}{0 - x} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{-F(x)}{-x} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{F(x)}{x} \quad (4)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \xi_1 < 0 \xrightarrow{f \downarrow} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) > f(\xi_1) > f(0) \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} > f(\xi_1) > 0$$

$$\left|\frac{F(x)}{x}\right| \stackrel{(4)}{=} |f(\xi_1)| \xrightarrow{f(\xi_1) > 0} \frac{|F(x)|}{|x|} = f(\xi_1) \xrightarrow{f(\xi_1) < \frac{2}{\pi}} \frac{|F(x)|}{|x|} < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\pi \cdot |F(x)| < 2 \cdot |x| \quad (5)$$

• Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0, x]$, με $F'(x) = f(x)$ από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_2) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f(\xi_2) = \frac{F(x)}{x} \quad (6)$$

$$0 < \xi_2 < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{f \downarrow} f(0) > f(\xi_2) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 > f(\xi_2) > -\frac{2}{\pi} \text{ και } -f(\xi_2) < \frac{2}{\pi}$$

$$\left|\frac{F(x)}{x}\right| \stackrel{(6)}{=} |f(\xi_2)| \xrightarrow{f(\xi_2) < 0} \frac{|F(x)|}{|x|} = -f(\xi_2) \xrightarrow{-f(\xi_2) < \frac{2}{\pi}} \frac{|F(x)|}{|x|} < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\pi \cdot |F(x)| < 2 \cdot |x| \quad (7)$$

Από (3), (5) και (7) έχουμε

$$\pi \cdot |F(x)| \leq 2 \cdot |x|, \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$