



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ & Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

A3. α. Ψ

β. Αντιπαράδειγμα : Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

A4. α. Λάθος,

β. Σωστό,

γ. Σωστό,

δ. Σωστό,

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x > 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x > e^0\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x > 0\} = (0, +\infty)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

Επομένως $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, x > 0$



$$\begin{aligned} \text{B2. } (f \circ g)'(x) &= \left(\frac{e^x + 2}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x + 2)' \cdot (e^x - 1) - (e^x - 1)' \cdot (e^x + 2)}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^x \cdot (e^x - 1) - e^x \cdot (e^x + 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - 2e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Είναι $(f \circ g)'(x) < 0$, για κάθε $x > 0$,

άρα η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

άρα η $f \circ g$ είναι 1-1, δηλαδή η $f \circ g$ είναι αντιστρέψιμη.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(e^x + 2) \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty,$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2) = 3 > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0 \text{ και } e^x - 1 > 0, \text{ για } x > 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x} \right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1,$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{Επομένως } (f \circ g)((0, +\infty)) = D_{(f \circ g)^{-1}} = (1, +\infty)$$

$$\text{Για } x > 0 \text{ και } y > 1 : y = (f \circ g)(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow$$

$$ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow ye^x - e^x = y + 2 \Leftrightarrow (y - 1)e^x = y + 2 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{y + 2}{y - 1} \Leftrightarrow x = \ln \left(\frac{y + 2}{y - 1} \right)$$

$$\text{Επομένως } \boxed{(f \circ g)(x) = \ln \left(\frac{x + 2}{x - 1} \right), x > 1}$$



$$\begin{aligned}
 \text{B3. } \varphi'(x) &= \left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \right]' = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' \\
 &= \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)' \cdot (x-1) - (x-1)' \cdot (x+2)}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x-1 - (x+2)}{(x-1)} = \frac{x-1-x-2}{(x+2) \cdot (x-1)} \\
 &= \frac{-3}{(x+2) \cdot (x-1)} < 0, \text{ για } x > 1
 \end{aligned}$$

άρα **η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$**

$$\text{B4. } \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x+2) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = +\infty,$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) = 3 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$,

αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ και $x-1 > 0$, για $x > 1$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \frac{x+2}{x-1} \quad \begin{array}{l} \text{Θέτω } \frac{x+2}{x-1} = u \\ \text{όταν } x \rightarrow 1^+ \\ \text{τότε } u \rightarrow +\infty \end{array} \\
 &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = \boxed{+\infty}.
 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+2}{x-1} \quad \begin{array}{l} \text{Θέτω } \frac{x+2}{x-1} = u \\ \text{όταν } x \rightarrow +\infty \\ \text{τότε } u \rightarrow 1 \end{array} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \boxed{0}.
 \end{aligned}$$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να είναι f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = 1 - \ln \lambda \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \cdot \sigma \upsilon \nu x) = \lambda \\ \bullet f(0) &= \frac{1}{1-0} - \ln \lambda = 1 - \ln \lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda = 1 - \ln \lambda \Leftrightarrow \lambda - 1 + \ln \lambda = 0$$

Θεωρούμε συνάρτηση g , με $g(\lambda) = \lambda - 1 + \ln \lambda$, $\lambda > 0$

Είναι $g'(\lambda) = (\lambda - 1 + \ln \lambda)' = 1 + \frac{1}{\lambda} > 0$, για $\lambda > 0$,

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα η g είναι 1-1

$$\lambda - 1 + \ln \lambda = 0 \Leftrightarrow g(\lambda) = g(1) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{\lambda = 1}$$

Γ2. Για $\lambda = 1$ είναι : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = 1 + 0 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με $f'(0) = 1 = \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4}$

επομένως η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, 1)$

σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$.



Γ3. • Για $x < 0$ είναι $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$

άρα η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(-\infty, 0)$.

• $f'(0) = 1 < 0$, άρα το $x_0 = 0$ ΔΕΝ είναι κρίσιμο σημείο της f

• Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ είναι $f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \quad \begin{matrix} \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$$

$$\epsilon\phi x = 1 \quad \begin{matrix} x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε είναι και $\eta\mu x = 0$
ΑΤΟΠΟ, διότι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$
Επομένως $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{5\pi}{4}$.

Γ4. (ε) : εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \leq 0$

$$(\epsilon) : y - f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot (x - \alpha)$$

$$\text{Για } y = 0 \text{ έχουμε } -f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{1-\alpha} = \frac{x-\alpha}{(1-\alpha)^2} \Leftrightarrow -1 + \alpha = x - \alpha \Leftrightarrow x = 2\alpha - 1$$

δηλαδή η ευθεία (ε) τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $B(2\alpha - 1, 0)$

Αν $x(t)$ είναι η τετμημένη του B , τότε $x(t) = 2 \cdot \alpha(t) - 1$ και

$$x'(t) = 2 \cdot \alpha'(t) = 2 \cdot \frac{-\alpha(t)}{3} = -\frac{2}{3} \cdot \alpha(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\alpha(t_0) = -1$,

$$\text{άρα } x'(t_0) = -\frac{2}{3} \cdot \alpha(t_0) = -\frac{2}{3} \cdot (-1) = \frac{2}{3} \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$$



ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. f'(x) = (e^x + x^2 - ex - 1)' = e^x + 2x - e, x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = (e^x + 2x - e)' = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$$

Είναι $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

δηλαδή η $f'(x) = 0$ έχει μια το πολύ πραγματική ρίζα.

1^{ος} τρόπος

▷ η f' είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως παραγωγίσιμη

$$\triangleright f'(0) = e^0 + 0 - e = 1 - e < 0$$

$$f'(1) = e^1 + 2 - e = 2 > 0$$

Από **Θ. Bolzano** η $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

2^{ος} τρόπος

▷ η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως παραγωγίσιμη

▷ η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$

$$\triangleright f(0) = e^0 + 0 - 0 - 1 = 0 \text{ και } f(1) = e^1 + 1 - e - 1 = 0$$

Από **Θ. Rolle** η $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

Επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \quad (1)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \xrightarrow{f \uparrow} x > x_0$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = x_0$, την τιμή

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) = x_0^2 - (e + 2) \cdot x_0 + e - 1.$$



$$\Delta 2. \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= 0 \\ f(x) &\geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty \quad (2)$$

$$-1 \leq \eta \mu \frac{1}{x - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \leq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta \mu \frac{1}{x - x_0} \left\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right] \stackrel{(2)}{=} +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta \mu \frac{1}{x - x_0} \right] = +\infty$$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$
 $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$ στο $[x_0, 1]$, διότι $f'(x) \geq 0$, για $x \in [x_0, 1]$
 άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, 1]$
 και έχει μία το πολύ ρίζα (3).

- ▷ η g είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών
- ▷ $g(0) = f(x_0) < 0$, διότι $x_0 < 1 \Rightarrow f(x_0) < f(1) \Leftrightarrow f(x_0) < 0$
 $g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$

από **Θ. Bolzano** υπάρχει $\rho \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\rho) = 0$ (4)

Από (3) και (4) η $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $\rho \in (x_0, 1)$

$$\Delta 4. \boxed{g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho = x_0 \Leftrightarrow \rho - x_0 = -f(\rho) > 0 \quad (5)}$$

Είναι $x_0 < \rho < \kappa < 1$

- ▷ η f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$
- ▷ η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ)

$$\text{από } \textbf{Θ.Μ.Τ.} \text{ υπάρχει } \xi \in (x_0, \rho) : f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} \stackrel{(5)}{=} \frac{f(\rho) - f(x_0)}{-f(\rho)}$$

$$\text{Είναι } \xi < \kappa \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(\rho) - f(x_0)}{-f(\rho)} < f'(\kappa) \stackrel{-f(\rho) > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f(\rho) - f(x_0) < -f(\rho) \cdot f'(\kappa) \Leftrightarrow f(\rho) + f(\rho)f'(\kappa) < f(x_0) \Leftrightarrow f(\rho) \cdot [1 + f'(\kappa)] < f(x_0)$$