ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΓΕΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α.1 Να αποδειχθεί *ότι* η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει: $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

Μονάδες 10

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση $f:A \to R$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$

Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο C των μιγαδικών.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$|(i + 2\sqrt{2})z| = 6$ και $|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$ τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x>0$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4°

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει $f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)\,dt - 45$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$

Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δυο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = f(x)+45$ και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

Μονάδες 3

Καλή Επιτυχία !!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$:

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 235

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 191

Β. **α.** (Σ) **β.** (Σ) **γ.** (Λ) **δ.** (Λ) **ε.** (Σ)

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$:

α. Ισχύει : $\left|(i+2\sqrt{2})z\right| = 6 \Leftrightarrow \left|i+2\sqrt{2}\right| \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow$

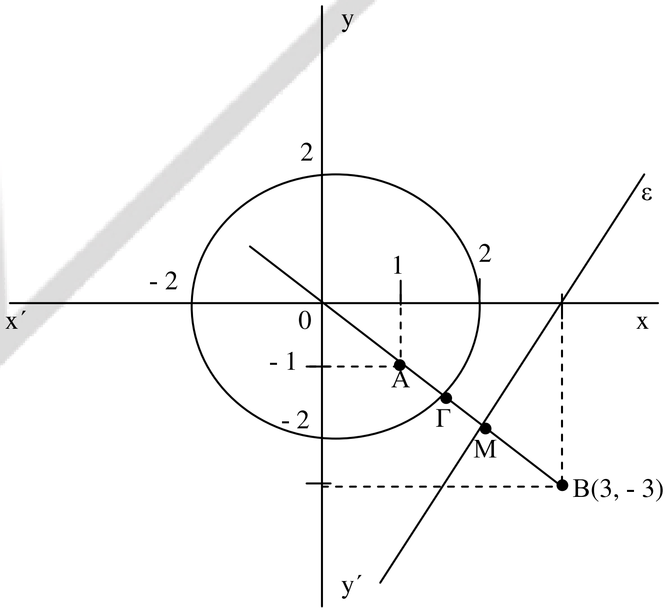
$\Leftrightarrow \sqrt{1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2} \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{9\cdot}\ |z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$ και εξίσωση $x^2+y^2=4$ (1)

Άρα ο Γ.Τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο 0(0,0) και ακτίνα $\rho = 2$

β. Ισχύει : $\left|w-(1-i)\right| = \left|w-(3-3i)\right|$.

Ο Γ.Τ. των εικόνων του w είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθ. τμήματος ΑΒ, όπου Α(1, -1) , Β(3, - 3)

γ.



Μ μέσο του ΑΒ, οπότε

$$M\left(\frac{1+3}{2}\ ,\ \frac{-1\ ,-3}{2}\right) = M(2\ ,-2)$$

Η ΑΒ περνά από το Ο(0,0) και είναι $AB \perp (\varepsilon)$

Άρα η ελάχιστη απόσυαση του Ο(0,0) από την (ε) είναι η

$(OM) = \sqrt{2^2+(-2)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (OM) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Άρα η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι η $2\sqrt{2}$

δ. Η εξίσωση του κύκλου είναι : $x^2+\psi^2=4$ (1) , όπου $z = x+\psi i$, $x, \psi \in R$

$\lambda_{AB} = \dfrac{\psi_B-\psi_A}{x_B-x_A} = \dfrac{-3+1}{3-1} = -1$, οπότε η εξίσωση της ΑΒ είναι $y = \lambda_{AB}\cdot x \Leftrightarrow y = -x$ (2)

Λύνουμε το σύστημα (1), (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2+\psi^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2+x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} x = +\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Οπότε $\Gamma\left(+\sqrt{2}\,,\,-\sqrt{2}\right)$

Ελάχιστη τιμή $|z-w| = (\Gamma M) = \sqrt{\left(+2-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2+\sqrt{2}\right)^2} =$

$$= \sqrt{(2-\sqrt{2})^2\cdot 2} = \sqrt{2}\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

<u>ΘΕΜΑ 3^Ο :</u>

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

α) Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = (DE\,L'Hospital)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Από υπόθεση $f(0) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Άρα η f συνεχής στο $x_0 = 0$

β) Αν x>0 τότε η f είναι παρ/μη ως γινόμενο παρ/μων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (x\cdot\ln x)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$

x	0	1/e	$+\infty$
f (x)	-		+
f ′(x)	↘		↗

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\cdot\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\cdot(-1) = \frac{-1}{e}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x\cdot\ln x) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Αν $x \in \left[0,\dfrac{1}{e}\right]$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα,

οπότε το σύνολο τιμών είναι της μορφής $\left[f\left(\dfrac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[-\dfrac{1}{e}, 0\right] = f(A_1)$

Αν $x \in \left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το σύνολο τιμών είναι της μορφής

$$\left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = f(A_2)$$

Άρα $f(A) = f(A_1)\cup f(A_2) = \left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$

γ) Επειδή $e^{\frac{\alpha}{x}} > 0$ τότε x>0 οπότε η εξίσωση $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ γράφεται

$$\ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x}\ln e \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$$

Σύμφωνα με το β) ερώτημα έχουμε:

- Αν $\alpha < \frac{-1}{e}$ τότε η εξίσωση f (x) =α είναι αδύνατη
- Αν $\alpha = \frac{-1}{e}$ τότε η εξίσωση f (x) = α έχει ρίζα το $x = \frac{1}{e}$
- Αν $\frac{-1}{e} < \alpha < 0$ τότε η εξίσωση f (x) = α έχει 2 θετικές ρίζες μια σε κάθε διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ και $\left(\frac{1}{e} + \infty\right)$
- Αν $\alpha \geq 0$ τότε η εξίσωση f (x) = α έχει μια θετική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e} + \infty\right)$

δ) Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x, x+1]$, με x>0

- Η f συνεχής στο $[x, x+1]$ από α) ερώτημα
- Η f παρ/μη στο $(x, x+1)$ από το β) ερώτημα

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x) \quad (1)$$

Για x>0 είναι $f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} > 0$

Άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Επειδή $\xi \in (x, x+1)$ θα είναι ξ<x+1

$$f'(\xi) < f'(x+1) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x+1) - f(x) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$$

<u>ΘΕΜΑ 4^Ο :</u>

α) Είναι $f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)\,dt - 45 \quad (1)$

Επειδή f συνεχής στο R ολοκληρώνουμε την (1) και έχουμε

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 [(10x^3 + 3x)\cdot\int_0^2 f(t)dt]\,dx - \int_0^2 45dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 f(t)dt \cdot \int_0^2 (10x^3 + 3x)\,dx - 45\cdot[x]_0^2 \qquad (2)$$

Θέτουμε $\int_0^2 f(x)dx = C$ και η (2) γίνεται

$$C = C\cdot\left[10\cdot\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - 45\cdot(2-0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = C\cdot\left[\frac{10\cdot 16}{4}+\frac{3\cdot 4}{2}-\left(\frac{10\cdot 0}{4}+\frac{3\cdot 0}{2}\right)\right]-90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = C\cdot(40+6)-90 \Leftrightarrow C = 46\cdot C - 90 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = 46\cdot C - C \Leftrightarrow 45C = 90 \Leftrightarrow C = 2$$

Άρα $\int_0^2 f(x)dx = 2$

Η (1) γίνεται $f(x) = (10x^3+3x)\cdot 2 - 45 \Leftrightarrow f(x) = 20x^3+6x-45$

β) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$

Θέτουμε $-h = u$ τότε
- $h = -u$
- Αν $h \to 0$ τότε $u \to 0$

Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{g'(x)-g'(x+u)}{-u} =$

$$= \lim_{u\to 0}\left[\frac{-[g'(x+u)-g'(x)]}{-u}\right] = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u)-g'(x)}{u} = g''(x)$$

γ.i) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)+g(x-h)]'}{[h^2]'} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)\cdot(x+h)'-0+g'(x-h)\cdot(x-h)'}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)-g'(x-h)+g'(x)}{2h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)}{2h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{2h}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot g''(x)+\frac{1}{2}\cdot g''(x) = g''(x)$$

Είναι $g''(x) = f(x)+45 \Leftrightarrow g''(x) = 20x^3+6x-45+45 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g''(x) = 20x^3+6x \quad \forall x\in R$

Άρα $g'(x) = 20\frac{x^4}{4}+6\frac{x^2}{2}+C_1 \Leftrightarrow g'(x) = 5x^4+3x^2+C_1 \qquad (4)$

Για $x = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} g'(0) \Rightarrow C_1 \Rightarrow 1 = C_1$

Για $C_1 = 1$ η (*) γίνεται $g'(x) = 5x^4+3x^2+1 \quad \forall x\in R$

Είναι $g(x) = 5\cdot\frac{x^5}{5}+3\cdot\frac{x^3}{3}+x+C_2 \qquad (**)$

Για $x = 0 \overset{(**)}{\Rightarrow} g(0) = C_2 \;\Rightarrow\; 1 = C_2$

Για C_2 η (**) γίνεται $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii) Είναι $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in R$.

Άρα $g(x) \uparrow$ στο R.

Επομένως η g είναι 1 – 1.