

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

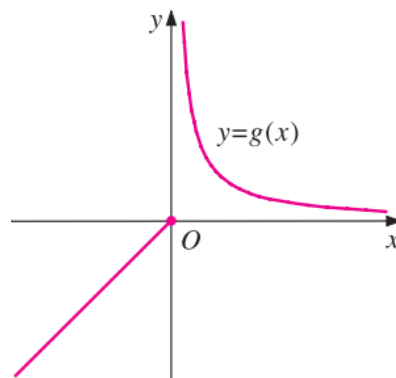
A2. Α Ψ

B. Σχολικό βιβλίο Σελ 35

Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{είναι '1-1' αλλά δεν είναι}$$

γνήσια μονότονη όπως φαίνεται και στο σχήμα.



A3. Σχολικό βιβλίο σελ 216

A4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $f(x) = x - \frac{4}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Η f συνεχής στο $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ως πράξεις συνεχών .

Η συνάρτηση f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2} \right)' = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Το πρόσημο της f' είναι με βάση το παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x^3 + 8$	-	 +	+	
x^3	-	-	 +	
$x^3 \cdot (x^3 + 8)$	+	-	+	

Άρα το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f'	+	-	+	
f				

T.M

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0)$

Στην θέση $x_0 = -2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2) = -3$

B2. Η $f'(x)$ παραγωγίσιμη ως ρητή με $f''(x) = \left(1 + \frac{8}{x^3}\right)' = \frac{-24}{x^4}$

Είναι για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $f''(x) < 0$

άρα η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

B3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη θα αναζητήσουμε στο $x = 0$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x^3 - 4) \cdot \frac{1}{x^2} \right] = (-4) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[(x^3 - 4) \cdot \frac{1}{x^2} \right] = (-4) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ (ο άξονας $y'y$) κατακόρυφη ασύμπτωτη της f .

Πλάγιες –Οριζόντιες θα αναζητήσουμε στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Για να είναι η $y = \lambda x + \beta$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αρκεί τα

όρια $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί (αντιστοίχως

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3 - 4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^2} = 0$$

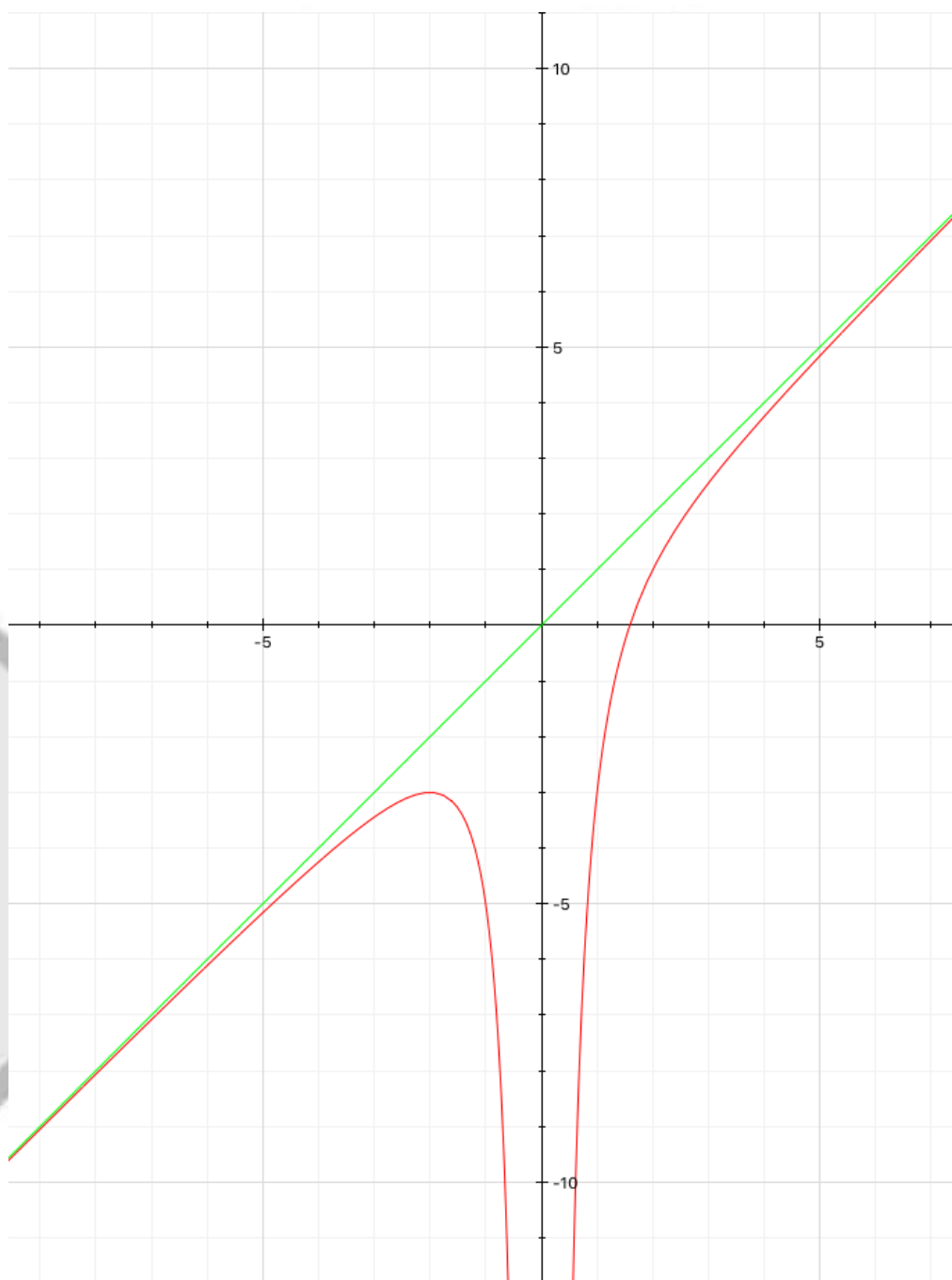
Άρα η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3 - 4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

B4. Με βάση τα παραπάνω ερωτήματα η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω :



$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4} \text{ επομένως τέμνει τον άξονα } x'x \text{ στο σημείο } A(\sqrt[3]{4}, 0)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι x m, οπότε η πλευρά του θα είναι $\frac{x}{4}$.

Το x παριστάνει μήκος είναι $x > 0$ αλλά και $x < 8$ που είναι το συνολικά μήκος του σύρματος, άρα $0 < x < 8$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E(x) = \frac{x^2}{16}$. Με το υπόλοιπο του σύρματος το οποίο είναι $8 - x$ κατασκευάζουμε τον κύκλο που έχει μήκος:

$$L = 2\pi r \Leftrightarrow 8 - x = 2\pi r \Leftrightarrow r = \frac{8 - x}{2\pi} \text{ m}$$

Οπότε ο κύκλος έχει εμβαδόν:

$$E = \pi r^2 = \pi \left(\frac{8 - x}{2\pi} \right)^2 = \pi \frac{(8 - x)^2}{4\pi^2} = \frac{(8 - x)^2}{4\pi}$$

Το άθροισμα των εμβαδών είναι:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{x^2}{16} + \frac{(8 - x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(8 - x)^2}{16\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(64 - 16x + x^2)}{16\pi} \\ &= \frac{\pi x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{16\pi} = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, x \in (0, 8) \end{aligned}$$

Γ2. Η E είναι παραγωγίσιμη με $E'(x) = \frac{1}{16\pi} (2(\pi + 4)x - 64) = \frac{1}{8\pi} ((\pi + 4)x - 32)$ με $x \in (0, 8)$

Είναι $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{4 + \pi}$ και είναι, $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{32}{4 + \pi}$ ενώ,

$E'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{32}{4 + \pi}$

	0	$\frac{32}{\pi + 4}$	8
$E'(x)$	-	●	+
$E(x)$	↘		↗

Άρα, είναι Εγνησίωςφθινουσα $(0, x_0]$ και Εγνησιωσαυξουσα $[x_0, 8)$ και η E παρουσιάζει ελάχιστο

στο $x_0 = \frac{32}{\pi + 4}$ το $E\left(\frac{32}{\pi + 4}\right) = \frac{1}{16\pi} \left[(\pi + 4) \frac{32^2}{(\pi + 4)^2} - 64 \frac{32}{\pi + 4} + 8 \cdot 32 \right] = \frac{32}{16\pi} \left(\frac{32}{\pi} - \frac{64}{\pi} + 8 \right) = \frac{16}{\pi + 4}$

Η διάμετρος του κύκλου $\delta = 2R = \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8}{\pi+4}$ και η πλευρά του τετραγώνου είναι

$$\alpha = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4} = \delta$$

Γ3. Η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ άρα

$$E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x)\right] = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right]$$

$$\text{αφού } E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{256}{16\pi} = \frac{16}{\pi}$$

Η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ άρα

$$E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 8^-} E(x)\right] = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$$

$$\text{αφού } E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$$

Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{(\pi+4) \cdot 8^2 - 64 \cdot 8 + 256}{16\pi} = 4$$

$5 \in E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]\right)$ και E γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$

ώστε $E(x_0) = 5$

Το $5 \notin E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right)$ άρα δεν υπάρχει $x_1 \in \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ ώστε $E(x_1) = 5$

Αρά υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_0) = 5$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (2e^{x-a} - x^2)' = 2e^{x-a} - 2x, x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = (2e^{x-a} - 2x)' = 2e^{x-a} - 2 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} - 2 = 0 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$$

Από πίνακα καμπυλότητας έχουμε :

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	Κοίλη	σ.κ.	Κυρτή

Η f κοίλη στο $(-\infty, a]$ και κυρτή στο $[a, +\infty)$

Για $x = a \Rightarrow f(a) = 2 - a^2$ με σημείο καμπής $A(2, 2 - a^2)$

Δ2

Η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = a$

Υπολογίζουμε τα :

$$f'((-\infty, a]) \stackrel{\text{if } \gamma\text{ν.φθίνουσα}}{=} [2 - 2a, +\infty)$$

$$f'([a, +\infty)) \stackrel{\text{if } \gamma\text{νησίως αύξουσα}}{=} [2 - 2a, +\infty)$$

$$\text{Καθώς } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{x-a} - 2x) = +\infty$$

Επειδή η $f'(x)$ γνησίως αύξουσα $[a, +\infty)$ θα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in [a, +\infty) : f'(x_2) = 0$

Έχουμε $x_1 < a < x_2$

$$\text{Για } x < x_1 < a \stackrel{\text{if } \gamma\text{νφθίνουσα}}{=} f'(x) > f'(x_1) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \gamma\text{νησίως αύξουσα } (-\infty, x_1]$$

$$x_1 < x < a \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \gamma\text{νησίως φθίνουσα } [x_1, a]$$

$$a < x < x_2 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \text{ δηλαδή } f \text{ γνησίως φθίνουσα } [a, x_2]$$

$$f \text{ γνησίως φθίνουσα } [x_1, x_2]$$

$$a < x_2 < x \Leftrightarrow f'(x_2) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \text{ άρα η } f \text{ γνησίως αύξουσα } [x_2, +\infty)$$

Άρα η f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό μέγιστο για $x = x_1$

f παρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο για $x = x_2$

Δ3. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_2]$ με $f(\alpha) = 2 - \alpha^2$ και $f(1) = 2e^{1-\alpha} - 1$

Αρκεί να δείξουμε ότι: $f(\alpha) < f(1) \Leftrightarrow 2 - \alpha^2 < 2e^{1-\alpha} - 1 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$

Θεωρούμε $K(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3, x > 1$

Η συνάρτηση $K(x)$ παραγωγίσιμη με $k'(x) = 2x - 2e^{1-x}$

Είναι: $x > 1 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow e^{1-x} < 1 \Leftrightarrow -e^{1-x} > -1$

Οπότε $K'(x) > 0$ για $x > 1$ άρα η K γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

$\alpha > 1 \Leftrightarrow K(\alpha) > K(1) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ αδύνατη στο (α, x_2)

Δ4. Αν $\alpha = 2$ Τότε έχουμε :

$$f(x) = 2e^{x-2} - x^2, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2e^{x-2} - 2x, x \in \mathbb{R}$$

Η f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $A(2, -2)$ στο οποίο η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -2x + 2$$

Η f κυρτή στο $[2, +\infty)$. Άρα $f(x) \geq y$ ή $f(x) \geq -2x + 2, x \geq 2$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$

Είναι $\sqrt{x-2} \geq 0$ για κάθε $x \geq 2$ οπότε : $f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}$

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} \, dx > \int_2^3 (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2} \, dx$$

$$I = \int_2^3 (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2} \, dx$$

Θέτουμε $y = \sqrt{x-2} \Rightarrow x = y^2 + 2 \Rightarrow dx = 2y \, dy$

Αν $x = 2$ τότε $y = 0$

Αν $x = 3$ τότε $y = 1$



$$I = \int_0^1 [-2(y^2 + 2) + 2] 2y^2 \, dy = \int_0^1 (-4y^4 - 4y^2) \, dy =$$

$$= \left[-\frac{4}{5}y^5 - \frac{4}{3}y^3 \right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{15}$$

$$\text{Άρα } \int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2} \, dx > -\frac{32}{15}$$