ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ο.Π. ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 02/06/2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ. 186

Α2. Σχολικό σελ. 76

Α3. Σχολικό σελ. 161

Α4.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με f(x) = $x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3, \alpha \in \mathbb{R}$

Β1. Η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_o = 1$, άρα f'(1) = 0
Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική
Άρα $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$

f'(1) = 0 $\Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 12 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{12}{2} \Leftrightarrow \alpha = 6$

'Άρα $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Β2. f'(x) = $3x^2 - 12x + 9$

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

Δ = $\beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$ $\begin{array}{l} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = 1 \end{array}$

• f'' (x) = 6x – 12

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot (x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
f''(x)	-		-	0	+		+
f'(x)	+	0	-		-	0	+
f(x)	↗		↘		↘		↗
		ΤοΜο		6οΚ || f(2)=-1			

(Π.1)

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
f(x)	+	0	-	0	+

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x<1$ ή $x>3$

Με βάση τον παραπάνω πίνακα (Π.1) έχουμε:

$\left.\begin{array}{l} f \nearrow \text{ στο } (-\infty, 1] \\ f \searrow \text{ στο } [1,3] \end{array}\right| \Rightarrow$ η f στη θέση 1 παρουσιάζει ΤοΜο ίσο με f(1) = 1, άρα f(x) ≤ 1 κοντά στο 1.

$\left.\begin{array}{l} f \searrow \text{ στο } [1,3] \\ f \nearrow \text{ στο } [3, +\infty) \end{array}\right| \Rightarrow$ η f στη θέση 3 παρουσιάζει Τοεο ίσο με $\varphi(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = 27 - 54 + 27 - 3 = -3$

Άρα f(x) ≥ -3 κοντά στο 3

$$* \left.\begin{array}{c} \Delta_1 = (-\infty, 1] \\ f \nearrow \sigma\tau o\ \Delta_1 \end{array}\right| \Rightarrow f(\Delta_1) = (\lim_{x \to -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \to -\infty} (x^3) = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{c} o \in f(\Delta_1) \\ f \uparrow \sigma\tau o\ \Delta_1 \end{array}\right| \Rightarrow H\ f\ \sigma\tau o\ (-\infty, 1)\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{\eta}\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha,$$

έστω ρ_1 με $\rho_1 < 1$

Η f συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική

$$\left.\begin{array}{c} f(0) = -3 \\ f(1) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -3 \cdot 1 = -3 < 0 \Bigg| \xrightarrow{\Theta.Bolzano} \left.\begin{array}{c} \exists \rho_1 \in (0,1): f(\rho_1) = 0 \\ f \nearrow \sigma\tau o\ (0,1] \end{array}\right| \Rightarrow H\ \rho_1\ \mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{\eta}\ \kappa\alpha\iota\ \theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta}$$

$$* \left.\begin{array}{c} \Delta_2 = [1,3] \\ f \searrow \sigma\tau o \Delta_2 \end{array}\right| \Rightarrow f(\Delta_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1] \left.\begin{array}{c} o \in f(\Delta_2) \\ f \searrow \sigma\tau o \Delta_2 \end{array}\right| \Rightarrow \eta\ f\ \sigma\tau o\ (-3,1) \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{\eta}\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha,$$

έστω ρ_2 με <u>$1<\rho_2<3$</u>

$*\left.\begin{matrix} \Delta_3 = [3,+\infty] \\ f \uparrow \sigma\tau o\ \Delta_3 \end{matrix}\right| \Rightarrow f(\Delta_3) = \left[f(3), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [-3,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x\to+\infty}(x^3) = (+\infty)^3 = +\infty$$

$\left.\begin{matrix} o \in f(\Delta_3) \\ f \downarrow \sigma\tau o \Delta_3 \end{matrix}\right| \Rightarrow \eta\ f\ έχεο\ \sigma\tau o\ (3,+\infty), μοναδική\ ρίζα, έστω\ \rho_3\ με\ \rho_3 > 3$

B3. Η f είναι κοίλη (⌒) στο (-∞,2]

Η f είναι κυρτή (↺) στο [2,+∞)

Άρα η f στη θέση 2 κάμπτεται και το σημείο καμπής είναι (2, f(2)) = (2,-1)

B4. g(x) = x + f(x)

Αφού οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο g τέμνονται πάνω στον ψ'ψ, τότε πρέπει να ισχύει : f(0) = g(0)

Πράγματι: f(0) = -3

g(0) =0 + f(0) = -3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\left.\begin{matrix} \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0}(e^x \cdot \eta\mu x) = e^0 \cdot \eta\mu x = 0 \\ \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0}\sqrt{x^2+x} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lim_{x\to0} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to0} f(x) = f(0)$

Άρα f συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{e^x\cdot\eta\mu x - 0}{x} = \lim_{x\to0}\left[e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x}\right] = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to0^+}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$

Είναι $\lim_{x\to0^-} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o=0.

Γ2. <u>Οριζόντιες – Πλάγιες</u>

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\cdot\eta\mu x}{x}$$

$\forall x < 0$ είναι $\left|\frac{e^x\cdot\eta\mu x}{x}\right| = \left|\frac{e^x}{x}\cdot\eta\mu x\right| = \left|\frac{e^x}{x}\right|\cdot|\eta\mu x| \leq \left|\frac{e^x}{x}\right| = \frac{-e^x}{x}$

Δηλ. $\left|\frac{e^x\cdot\eta\mu x}{x}\right| \leq \frac{-e^x}{x} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \leq \frac{e^x\cdot\eta\mu x}{x} \leq \frac{-e^x}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot e^x\right) = 0\cdot0 = 0$$

Από κριτήριο Παρεμβολής είναι $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\cdot\eta\mu x}{x} = 0$, άρα λ = 0

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο -∞ την y=β με β = $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x\cdot\eta\mu x) = 0, διότι$

$\forall x < 0$ είναι $|e^x \cdot \eta\mu x| = |e^x| \cdot |\eta\mu x| \le |e^x| = e^x$

$$|e^x \cdot \eta\mu x| \le e^x \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} -e^x \le e^x \cdot \eta\mu x \le e^x \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{array}\right\} \overset{Κ.Π.}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty}(e^x \cdot \eta\mu x) = 0$$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο -∞ την y=0 δηλ. του x'x

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1,\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \lambda = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - \lambda(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\cdot(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

Άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο +∞ την ε: $y = x + \frac{1}{2}$

Γ3. Αρκεί ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (-π, 0)

$f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x \cdot \eta\mu x - x - \frac{1}{2} = 0$

Έστω h(x) = $e^x \cdot \eta\mu x - x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

- Η h(x) ως πράξεις συνεχών είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο [-π, 0]
- $$\left.\begin{array}{r} h(-\pi) = e^{-\pi}\cdot \overset{0}{\eta\mu(-\pi)} + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0 \\ h(0) = e^0 \cdot \eta\mu 0 - 0 - \frac{1}{2} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(-\pi)\cdot h(0) < 0$$

Από θ. Bolzano $\exists\ \xi \in (-\pi, 0): h(\xi) = 0$

Γ4. Έστω Μ(x,y) τότε $y = \sqrt{x^2+x},\ x \ge 0$

Δηλ. y(t) = $\sqrt{x^2(t) + x(t)}\ \ \mu\varepsilon\ x(t) \ge 0$

Είναι y'(t) = x'(t) $\Leftrightarrow \left[\sqrt{x^2(t)+x(t)}\right]' = x'(t) \Leftrightarrow \frac{[x^2(t)+x(t)]'}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = x'(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(t)\cdot x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = x'(t) \overset{:[x'(t)>0]}{\Longleftrightarrow} \frac{2x(t)+1}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t)+x(t)} = 2x(t)+1 \Rightarrow 4[x^2(t)+x(t)] = 4x^2(t)+4x(t)+1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4x^2(t) + 4x(t) = 4x^2(t) + 4x(t) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ *Αδύνατη*

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_o κατά την οποία είναι y'(t) = x'(t)

ΘΕΜΑ Δ

xf(x) = 2F(x) · lnx ① x>0

Δ1. Είναι • $x^{lnx} e^{lnx^{lnx}} = e^{lnx \cdot lnx} = e^{(lnx)^2}, x > 0$

• g(x) = $\frac{F(x)}{x^{lnx}} = \frac{F(x)}{e^{(lnx)^2}}$, $x > 0$

• Η g(x) ως πράξεις παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη με g'(x) = $\frac{F'(x) \cdot e^{(lnx)^2} - F(x) \cdot [e^{(lnx)^2}]'}{[e^{(lnx)^2}]^2} =$

$\frac{f(x) e^{(lnx)^2} - F(x) \cdot e^{(lnx)^2} \cdot 2lnx \cdot \frac{1}{x}}{[e^{(lnx)^2}]^2} = \frac{e^{(lnx)^2}[f(x) - \frac{F(x) \cdot 2lnx}{x}}{[e^{(lnx)^2}]^2} = \frac{e^{(lnx)^2} \cdot \frac{x \cdot f(x) - 2F(x) \cdot lnx}{x}}{[e^{(lnx)^2}]^2} = \frac{e^{(lnx)^2} \cdot [x \cdot f(x) - 2F(x) \cdot lnx]}{x \cdot [e^{(lnx)^2}]^2} = \frac{0}{x[e^{(lnx)^2}]^2} 0$

Άρα g(x) = c $\quad \forall x > 0$

Δ2.i) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{lnx}$

$\forall x > 0$ είναι g(x) = c $\Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{lnx}} = c \Leftrightarrow F(x) = c \cdot x^{lnx} = c \cdot e^{(lnx)^2}$ ②

• $x \cdot f(x) = 2F(x) \cdot lnx \Rightarrow x \cdot f(x) = 2c \cdot e^{(lnx)^2} \cdot lnx \Leftrightarrow f(x) = \frac{2c \cdot e^{(lnx)^2} \cdot lnx}{x}$

• $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{lnx} = \lim_{x \to 1} \frac{2c \cdot e^{(lnx)^2} \cdot lnx}{x \cdot lnx} = \lim_{x \to 1} \frac{2c \cdot e^{(lnx)^2}}{x} = \frac{2c \cdot e^o}{1} = 2c$

ii) Από ① παραγωγίζοντας έχουμε [x·f(x)]' = 2 [F(x) · lnx]' ⇔ (x)' · f(x) + x· f'(x) = 2·[F'(x) · lnx+F(x) ·(lnx)'] $\forall x > 0$

f(x) + x· f'(x) = 2·[f(x)·lnx+F(x)· $\frac{1}{x}$]

Για x = 1 ⇒ f(1) + f(1) = 2 [f(1)ln(1)+F(1)]⇔ f(1) + 2 = 0 ③

Για x = 1 $\overset{①}{\Rightarrow}$ f(1)=2F(1)· ln1 ⇔ f(1)=0 ④

③,④ ⇒ 2F(1) = 2⇔ $\boxed{F(1) = 1}$

Για x=1 η F(x) = c · x^{lnx} γίνεται F(1) = c·1

1=c

Για c=1 ⇒ $\boxed{F(x) = x^{lnx}}$

Δ3. F'(x) = $(x^{lnx})'$ = $[e^{(lnx)^2}]'$ = $e^{(lnx)^2}$ · $[(lnx)^2]'$= $e^{(lnx)^2}$ ·2lnx· $\frac{1}{x}$

F'(x) ≥ 0 ⇔ lnx ≥ 0 ⇔ x≥1

x	0		1		+∞
F'(x)		-	0	+	
F(x)		↘	ο.ε.	↗	

$\boxed{F(1) = 1}$

$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ ⑤

Προφανής λύση το x = 1

$\forall x \in (0,1)$ είναι • $x^2 < x \overset{F\downarrow}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

• x < 1 ⇔ x-1<0 ⇒ $(x-1)^2 > 0$ (+)

$F(x^2) - F(x) + (x+1)^2 > 0$

$\forall x \in (1,+\infty)$ είναι • $x^2 > x \overset{F\uparrow}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

• x > 1 ⇔ x-1>0 ⇒ $(x-1)^2 > 0$ (+)

$F(x^2) - F(x) + (x+1)^2 > 0$

Άρα μοναδική ρίζα της ⑤ είναι το $\boxed{x = 1}$

Δ4. E = $\int_1^e |F(x)|dx \overset{F(x)>0}{=} \int_1^e F(x)dx = \int_1^e e^{(lnx)^2}dx$

Ως γνωστόν $e^x \geq x+1$

Θέτουμε όπου x το $(lnx)^2$ και έχουμε $e^{(lnx)^2} \geq (lnx)^2 + 1$

Άρα E > $\int_1^e[(lnx)^2+1]dx = \int_1^e(lnx)^2dx + \int_1^e 1dx = \int_1^e(x)'(lnx)^2\,dx + [x]_1^e = [x\cdot(lnx)^2]_1^e - \int_1^e x\cdot 2lnx\cdot\frac{1}{x}dx + e - 1 = e\cdot(lne)^2 - 1(ln1)^2 - 2\int_1^e lnxdx + e - 1 = e - 2\int_1^e(x)'lnxdx + e - 1 = e - 2\{[x\cdot lnx]_1^e - \int_1^e x\cdot(lnx)'dx\} + e - 1 = e - 2[x\cdot lnx]_1^e + 2\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx + e - 1 = e - 2[e-0] + 2[x]_1^e + e - 1 = e - 2e + 2e - 2 + e - 1 = 2e - 3$

Άρα $\boxed{E > 2e - 3}$