



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 25/5/15

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σελ σχολικού βιβλίου 194
 A2. Σελ σχολικού βιβλίου 188
 A3. Σελ σχολικού βιβλίου 150
 A4. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. $z - 4 = 2z - 1 \Leftrightarrow z - 4^2 = 4z - 1^2 \Leftrightarrow$
 $(z - 4)(\bar{z} - 4) = 4(z - 1)(\bar{z} - 1) \Leftrightarrow z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4(z\bar{z} - z - \bar{z} + 1) \Leftrightarrow$
 $z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow z^2 = 4 \Leftrightarrow z = 2$
 Άρα ο γ.τ των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος κέντρου $0(0,0)$ και ακτίνας $\rho = 2$.

B2.

α) $z = 2 \Leftrightarrow z^2 = 4 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 4 \Leftrightarrow \begin{matrix} z = \frac{4}{\bar{z}} \\ \bar{z} = \frac{4}{z} \end{matrix}$

Για να είναι $w \in \mathbb{R}$ αρκεί να ισχύει $w = \bar{w}$

Πράγματι: $\bar{w} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{2 \cdot \frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{2 \cdot \frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w$

β) Αφού $w \in \mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι: $w \leq 4$

Πράγματι: $w \leq 2 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right) = 2 \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right) = 2 \cdot (1 + 1) = 4$

B3. $w = -4 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right) = -4 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow z_1 = -z_2$

$(A\Gamma) = z_3 - z_1 = 2iz_1 + z_1 = z_1(-1 + 2i) = z_1 \cdot -1 + 2i = 2\sqrt{5}$

$(B\Gamma) = z_3 - z_2 = 2iz_1 + z_1 = z_1(1 + 2i) = z_1 \cdot 1 + 2i = 2\sqrt{5}$

Άρα $(A\Gamma) = (B\Gamma)$, οπότε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $A_f = \mathbb{R}$

Γ1. $f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 + 1 - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

άρα $f'(x) \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{2x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x^2+1} \cdot e^x \right] = 0 \cdot 0 = 0$$

Άρα $f(A) = (0, +\infty)$.

$$\Gamma 2. f(e^{3-x} \cdot (x^2+1)) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f(e^{3-x} \cdot (x^2+1)) = f(2) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} e^{3-x} \cdot (x^2+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x} \cdot (x^2+1) = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{e^x} = \frac{2}{e^3} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$$

Επειδή $\frac{e^3}{2} \in f(A) = (0, +\infty)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in A_f = \mathbb{R}$

$$\text{ώστε } f(x_0) = \frac{e^3}{2}.$$

Επειδή $f \uparrow$ στο $A_f = \mathbb{R}$ το x_0 είναι μοναδικό.

Γ3. Έστω η συνάρτηση $H(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$ είναι $H'(x) = f(x)$

$\forall x > 0$ αρκεί ν.δ.ο $H(4x) - H(2x) < 2x \cdot f(4x)$

$$\text{από Θ.Μ.Τ για την } H(x) \exists \xi \in (2x, 4x) : H'(\xi) = \frac{H(4x) - H(2x)}{2x} \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) = \frac{H(4x) - H(2x)}{2x} \Leftrightarrow H(4x) - H(2x) = 2x \cdot f(\xi)$$

Οπότε αρκεί ν.δ.ο $2x \cdot f(\xi) < 2x \cdot f(4x) \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} f(\xi) < f(4x)$ το οποίο ισχύει διότι $\xi \in (2x, 4x)$ άρα $\xi < 4x$ και $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

Γ4. $g(x) = \frac{\int_0^{4x} f(t) dt}{x}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

$$\text{με } g'(x) = \frac{(\int_0^{4x} f(t) dt)' \cdot x - \int_0^{4x} f(t) dt}{x^2} = \frac{4f(4x) \cdot x - \int_0^{4x} f(t) dt}{x^2} =$$

$$\frac{2xf(4x) + 2x \cdot f(4x) - 2x \cdot f(2x) - \int_0^{4x} f(t) dt}{x^2} = \frac{2xf(4x) - \int_0^{4x} f(t) dt + 2x[f(4x) - f(2x)]}{x^2} > 0 \text{ διότι}$$

από Γ3 είναι $2xf(4x) > \int_0^{4x} f(t) dt$ και $2x < 4x \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(4x) > f(2x)$ και $x > 0$

Εξετάζουμε στην συνέχεια της f στο $x_0 = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{4x} f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\int_0^{4x} f(t) dt}{x} + \frac{\int_0^{2x} f(t) dt}{x} \right] \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{4x} f(t) dt}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^{4x} f(t) dt)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(4x)}{1} = 4f(0) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\text{Όμοια } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} f(t) dt}{x} = 2, \text{ άρα από (1) είναι } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 4 - 2 = 2 = g(0)$$

άρα g συνεχής στο $x_0 = 0$, επομένως $g \uparrow$ στο $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \forall \in \mathbb{R} \text{ είναι } e^{f(x)} \cdot f'(x) + e^{-f(x)} \cdot f'(x) = 2 \Leftrightarrow [e^{f(x)}]' + \left[\frac{e^{-f(x)}}{-1} \right]' = 2$$

$$\Leftrightarrow [e^{f(x)} - e^{-f(x)}]' = [2x]' \Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c \quad (1)$$

$$\text{Για } x = 0 \stackrel{(1)}{e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c} \stackrel{f(0)=0}{e^0 - e^0 = c} \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Για } c = 0 \stackrel{(1)}{e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x} \Leftrightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow [e^{f(x)}]^2 - 2x \cdot e^{f(x)} - 1 = 0$$

$$e^{f(x)} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 + 1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Επειδή, $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $\frac{x^2+1}{x^2+1} > \frac{x^2}{x^2+1} = x \geq x$ και του $-x$, και $e^{f(x)} > 0$

τελικά είναι $e^{f(x)} = x + \frac{x^2+1}{x^2+1} > 0$, άρα $f(x) = \ln(x + \frac{x^2+1}{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2.

$$\alpha) f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{άρα } f \uparrow \text{ στο } \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad ' = \frac{-\frac{x^2 + 1}{2}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	$\circ$	$+\infty$
f'(x)	+	$\circ$	-
f(x)	$\cup$	$\circ$	$\sim$

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

σ.κ

$$\beta) E = \int_0^1 f(x) - x \, dx$$

Η εφαπτόμενη (ε) της c_f στο $x_0 = 0$ είναι η $(\varepsilon): y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$,

είναι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, άρα $(\varepsilon): y = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$.

Επειδή στο $[0, +\infty)$ η f είναι κοίλη η c_f βρίσκεται κάτω από την (ε) , άρα $f(x) \leq x$ με τ_0 να ισχύει μόνο όταν $x = 0$

$$\begin{aligned} \text{άρα } E &= \int_0^1 [x - f(x)] dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 f(x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} - \left[x f(x) \right]_0^1 + \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} - f(1) + \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \\ &= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \int_0^1 \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' dx = \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 \text{ τ.μ} \end{aligned}$$

Δ3.

1^{ος} Τρόπος:

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x f^2(t) dt = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1) = \lim_{u \rightarrow 0} (e^u - 1) = e^0 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = -\infty$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} [(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1) \cdot \ln f(x)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot \frac{\int_0^x f^2(t) dt}{f(x)} \cdot (f(x) \cdot \ln f(x)) \right] (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{\int_0^x f^2(t) dt} = \frac{0}{0} \stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1)'}{\left(\int_0^x f^2(t) dt \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} f^2(x)}{f^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\int_0^x f^2(t) dt} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt}}{f(x)} = \frac{0}{0} \stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{\frac{1}{x^2 + 1}} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot \ln f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{f(x)}} \cdot \frac{f'(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-f(x)) = 0$$

Από (*) είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(e^{\int_0^x f^2 t \, dt}) \cdot \ln f(x)] = 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

2^{ος} Τρόπος:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [(e^{\int_0^x f^2 t \, dt} - 1) \cdot \ln f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\int_0^x f^2 t \, dt} - 1)}{\frac{1}{\ln f(x)}} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{D.L.H} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^x f^2 t \, dt} \cdot f^2(x)}{\frac{1}{f'(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\int_0^x f^2 t \, dt} \cdot f^2(x)}{\frac{f(x)}{f'(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} [e^{\int_0^x f^2 t \, dt} \cdot f(x) \cdot f'(x)] = e^0 \cdot 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Δ4.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = (x-2) \cdot [1 - 3 \int_0^{x-2} f^2 t \, dt] + (x-3) \cdot [8 - 3 \int_0^{x-3} f^2 t \, dt]$, $x \in \mathbb{R}$

- Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[2,3]$
- $\varphi(2) = -[8 - 3 \int_0^2 f^2 t \, dt]$
- $\varphi(3) = 1 - 3 \cdot \int_0^1 f^2 t \, dt$

Για το $\int_0^2 f^2 t \, dt$ έχουμε

- $t \in [0, 2]$
- $f(t) \leq t \Rightarrow \int_0^2 f^2(t) \, dt \leq \int_0^2 t^2 \, dt$

άρα $\int_0^2 f^2 t \, dt < \int_0^2 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$, άρα $\varphi(2) < 0$

Για το $\int_0^1 f^2 t \, dt$ έχουμε

- $t \in [0, 1]$
- $t^2 \in [0, 1]$
- $0 \leq f(t) \leq t \Rightarrow \int_0^1 f^2(t) \, dt \leq \int_0^1 t^2 \, dt$

Είναι $\int_0^1 f^2 t \, dt < \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$, άρα $\varphi(3) > 0$.

Απο Θ. Bozano $\exists \rho \in (2,3) : f(\rho) = 0$