

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)  
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 5(ΠΕΝΤΕ)**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

- A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

- A3.** Αν  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$  και  $w_1, w_2, \dots, w_n$  είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής  $X$ .

**Μονάδες 4**

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν για τη συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f'(x_0) = 0$  για  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f'(x) > 0$  στο  $(a, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, b)$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα  $(a, b)$  για  $x = x_0$ .
- β)** Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.
- γ)** Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

## ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- δ) Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων  $A$  και  $B$  ισχύει  $CV_B > CV_A$ , τότε λέμε ότι το δείγμα  $B$  εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα  $A$ .
- ε) Αν  $A, B$  είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του  $A$  συνεπάγεται την πραγματοποίηση του  $B$ » δηλώνει ότι  $A \subseteq B$ .

**Μονάδες 10**

### **ΘΕΜΑ Β**

Έστω  $A, B$  και  $\Gamma$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Οι πιθανότητες των ενδεχομένων  $A, A \cap B$  και  $A \cup B$  ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$(3x - 1) \cdot (8x^2 - 6x + 1) = 0.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου  $\Gamma$  ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$9x^2 - 3x - 2 = 0.$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$  και  $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Να υπολογίσετε την πιθανότητα  $P(A' - B')$ , καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου

$\Delta$ : «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$ ».

**Μονάδες 8**

**B3.** Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$E$ : «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$ ».

**Μονάδες 6**

**B4.** Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα  $B$  και  $\Gamma$  είναι ασυμβίβαστα.

**Μονάδες 6**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε ένα δείγμα  $n$  παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής  $X$ , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα Ι**, όπου  $f_i\%$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι :

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3<sup>η</sup> κλάση είναι  $108^\circ$ .
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι  $\bar{X} = 14$ .

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

| Κλάσεις   | $f_i\%$ |
|-----------|---------|
| [8 , 10)  |         |
| [10 , 12) |         |
| [12 , 14) |         |
| [14 , 16) |         |
| [16 , 18) |         |

**ΠΙΝΑΚΑΣ Ι**

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f_1\%=10, f_2\%=10, f_3\%=30, f_4\%=20, f_5\%=30$ . Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.

**Μονάδες 6**

- Γ2.** Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι  $\sqrt{6,6} \approx 2,57$ .

**Μονάδες 7**

- Γ3.** Έστω  $x_1, x_2, x_3$  και  $x_4$  τα κέντρα της 1<sup>ης</sup>, 2<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> κλάσης αντίστοιχα και  $v_1, v_2, v_3$  και  $v_4$  οι συχνότητες της 1<sup>ης</sup>, 2<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup> και 4<sup>ης</sup> κλάσης αντίστοιχα. Αν  $\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 1780$ , βρείτε το πλήθος  $n$  των παρατηρήσεων του δείγματος.

**Μονάδες 5**

- Γ4.** Έστω  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα  $n$  παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως  $\bar{\alpha}$  τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και  $S_\alpha$  την τυπική τους απόκλιση.

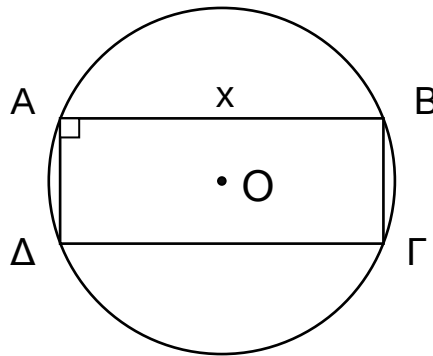
Εάν  $\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha}$ , για  $i=1, 2, 3, 4, 5$ , να δείξετε ότι η μέση τιμή  $\bar{\beta}$  του δείγματος

$\beta_i, i=1, 2, 3, 4, 5$  είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση  $S_\beta$  είναι ίση με 1.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$  με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho=5$  και ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά  $AB=x$ , όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι**.



**ΣΧΗΜΑ Ι**

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ , ως συνάρτηση του  $x$ , δίνεται από τον τύπο  $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$ ,  $0 < x < 10$ .

**Μονάδες 4**

- Δ2.** Να βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του  $x$ , δείξτε ότι το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο.

**Μονάδες 5**

- Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$ .

**Μονάδες 8**

- Δ4.** Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Αν  $P(A-B) > 0$ , να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right).$$

**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**