



ΕΚΠΑ
ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ 20/5/2015

ΘΕΜΑ Α

- A.1 Σελ. 31 Σχολικού Βιβλίου
A.2 Σελ. 22 Σχολικού Βιβλίου
A.3 Σελ. 87 Σχολικού Βιβλίου
A.4 α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$B1. (3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{4} \text{ και } x = \frac{1}{2}$$

Ισχύει $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, άρα $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$.

$$\text{Επομένως } P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{1}{2},$$

$$9x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ή } x = -\frac{1}{3} \text{ απορρίπτεται. Άρα } P(\Gamma) = \frac{2}{3}$$

$$B2. P(A' - B') = P(A') - P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(A \cup B)' = 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) \\ = P(A \cup B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$P(\Delta) = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$B3. P(E) = P(A - B \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = \\ = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} - \frac{6}{12} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{διότι } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}.$$

$$B4. P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12} > 1, \text{ άρα } B \cap \Gamma \neq \emptyset \text{ επομένως τα } B, \Gamma \text{ δεν} \\ \text{είναι ασυμβίβαστα.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

[-)	κέντρο	f%	a_i	v_i
8-10	9	10	36°	v_1
10-12	11	10	36°	v_2
12-14	13	30	108°	v_3
14-16	15	20	72°	v_4
16-18	17	30	108°	v_5
Σύνολο	Σύνολο	100	360°	V

$$\alpha_3 = \frac{v_3}{v} \cdot 360^\circ \Leftrightarrow 108^\circ = \frac{f_3\%}{100} \cdot 360^\circ \Leftrightarrow f_3\% = 30$$

$$f_2\% + f_4\% = 100 - (10 + 30 + 30) \Leftrightarrow f_2\% + f_4\% = 30 \quad (1)$$

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i}{v} = 14 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i\%}{100} = 14 \Leftrightarrow 9 \cdot 10 + 11 \cdot f_2\% + 13 \cdot 30 + 15 \cdot f_4\% + 17 \cdot 30 = 1400 \Leftrightarrow$$

$$90 + 390 + 510 + 11f_2\% + 15f_4\% = 1400 \Leftrightarrow 11f_2\% + 15f_4\% = 410 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_2\% + f_4\% &= 30 \\ 11f_2\% + 15f_4\% &= 410 \Leftrightarrow -11f_2\% - 11f_4\% = -330 \quad \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ 4f_4\% &= 80 \Leftrightarrow f_4\% = 20\% \end{aligned}$$

$$\text{Από (1) είναι } f_2\% = 30\% - 20\% = 10\%$$

$$\Gamma 2. S^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 v_i \Leftrightarrow S^2 = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{f_i\%}{100} \Leftrightarrow$$

$$S^2 = \frac{(9-14)^2 \cdot 10 + (11-14)^2 \cdot 10 + (13-14)^2 \cdot 30 + (15-14)^2 \cdot 20 + (17-14)^2 \cdot 30}{100} \Leftrightarrow$$

$$S^2 = \frac{25 \cdot 10 + 9 \cdot 10 + 30 + 20 + 9 \cdot 30}{100} \Leftrightarrow S^2 = \frac{660}{100} \Leftrightarrow S^2 = 6,6 \Leftrightarrow S = \sqrt{6,6} \Leftrightarrow S \approx 2,57,$$

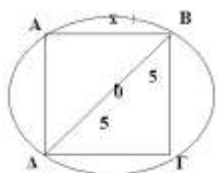
$$C_v = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2,6}{14} = 0,186 = 18,6\% > 10\%, \text{ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

$$\begin{aligned} \Gamma 3. \bar{x} = 14 &\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i}{v} = 14 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i + x_5 \cdot v_5}{100} = 14 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} + \frac{x_5 \cdot v_5}{v} = 14 \\ &\Leftrightarrow \frac{1780}{v} + x_5 \cdot f_5 = 14 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} + 17 \cdot 0,3 = 14 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} = 8,9 \Leftrightarrow v = \frac{1780}{8,9} \Leftrightarrow v = 200 \end{aligned}$$

$$\Gamma 4 \quad \text{Επειδή } \beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha} = \frac{\alpha_i}{S_\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha}$$

$$\text{ισχύει } \bar{\beta} = \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} = 0 \text{ και } S_\beta = \frac{1}{S_\alpha} \cdot S_\alpha = 1$$

ΘΕΜΑ Δ



$$\Delta 1. \text{Ορθογ. } \triangle AB \overset{\pi/2}{\Rightarrow} (AD)^2 = (BD)^2 - (AB)^2 \Leftrightarrow$$

$$(AD)^2 = 10^2 - x^2 \Leftrightarrow (AD) = \sqrt{100 - x^2}. \text{ Το εμβαδόν του } AB\Gamma\Delta \text{ είναι } (AD) \cdot (AB), \text{ άρα}$$

$$f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2} \text{ με } 0 < x < 10 \text{ διότι } (AB) < (BD).$$

Δ2. Η f(x) ως γινόμενο παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη στο (0,10) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{(100 - x^2)'}{2 \sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{2 \sqrt{100 - x^2}} = \\ &= \frac{(\sqrt{100 - x^2})^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Πρόσημο } f' : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \leq 100 \Leftrightarrow x^2 \leq 50 \Leftrightarrow x^2 - 50 \leq 0.$$

$$\text{Ρίζες : } x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}.$$

$$x \quad -\infty \quad -5\sqrt{2} \quad 0 \quad 5\sqrt{2} \quad 10 \quad +\infty$$

f'(x)	-	+	+	-	
f(x)			↗	↘	

Για $x = 5\sqrt{2}$ η f(x) παρουσιάζει μέγιστο το $f(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 50$ και το ορθογώνιο έχει διαστάσεις $AB = x = 5\sqrt{2}$ και $AD = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ άρα είναι τετράγωνο.

$$\begin{aligned} \Delta 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \frac{99}{98x}}{\frac{99}{98x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \cdot \sqrt{100-2x-x^2} - \frac{99}{98x}}{\frac{99}{98x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \cdot \sqrt{99-2x-x^2} - \frac{99}{98x}}{\frac{99}{98x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \cdot \sqrt{99-2x-x^2} - \frac{99}{98x}}{\frac{99}{98x} \cdot \frac{1+x \cdot \sqrt{99-2x-x^2} + \frac{99}{98x}}{1+x \cdot \sqrt{99-2x-x^2} + \frac{99}{98x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \sqrt{99-2x-x^2} - \frac{99}{98x}}{1+x \cdot \sqrt{99-2x-x^2} + \frac{99}{98x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 \sqrt{99-2x-x^2} - 99}{98x \cdot [1+x \cdot \sqrt{99-2x-x^2} + \frac{99}{98x}]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{99 \cdot (1+x)^2 - x(1+x)^2 \cdot 2 + x \cdot 99}{98x \cdot [1+x \cdot \sqrt{99-2x-x^2} + \frac{99}{98x}]} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{99 \cdot [1+x]^2 - 1 - x(1+x)^2 \cdot (2+x)}{98 \cdot x \cdot [1+x \cdot \frac{99-2x-x^2}{99}]} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{99 \cdot x \cdot 2+x - x \cdot (1+x)^2 \cdot (2+x)}{98 \cdot x \cdot 1+x \cdot [\frac{99-2x-x^2}{99}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{99 \cdot 2+x - (1+x)^2 \cdot (2+x)}{98 \cdot [1+x \cdot \frac{99-2x-x^2}{99}]} = \frac{99 \cdot 2+0 - (1+0)^2 \cdot (2+0)}{98 \cdot [1+0 \cdot \frac{99-0-0}{99}]} = \frac{2 \cdot 99-2}{98 \cdot 2 \cdot \frac{99}{99}} = \\ &= \frac{2(99-1)}{98 \cdot 2 \cdot \frac{99}{99}} = \frac{2 \cdot 98}{2 \cdot 98 \cdot \frac{99}{99}} = \frac{1}{\frac{99}{99}} = \frac{99}{99} = \frac{9 \cdot 11}{99} = \frac{11}{33} \end{aligned}$$

Δ4. Οι αριθμοί $\frac{P(A-B)}{100-P^2(A)}$ και $\frac{P(A)}{100-P^2(A-B)}$ είναι θετικοί και μικρότεροι του 1

επειδή η f στο $(0,5 \cdot \sqrt{2})$ είναι γνησίως αύξουσα αρκεί να δείξουμε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{100-P^2(A)}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{100-P^2(A-B)}\right) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} \frac{P(A-B)}{100-P^2(A)} \leq \frac{P(A)}{100-P^2(A-B)} \Leftrightarrow$$

$P(A-B) \cdot \frac{100-P^2(A-B)}{100-P^2(A)} \leq P(A) \cdot \frac{100-P^2(A)}{100-P^2(A-B)} \Leftrightarrow f(A-B) \leq f(A) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} A-B \subseteq A$
το οποίο ισχύει.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΒΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ