



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ
ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΛΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα σελ. 251 Σχολικού βιβλίου

A2. Ορισμός σελ. 273 Σχολικού βιβλίου

A3. Ορισμός σελ. 150 Σχολικού βιβλίου

A4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0 \quad \mathbb{M}: z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$$

$$2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0$$

$$2(x^2 + y^2) - 4 + 2(x - 1)i = 0$$

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2) - 4 = 0 \\ \text{και} \\ 2(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \stackrel{x=1}{\Leftrightarrow} y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1 \\ \text{και} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } z_1 = 1 + i \quad \text{και} \quad z_2 = 1 - i$$

B2.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1^2 - i^2} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{1^2 + 2i + i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i \quad (1)$$

$$i^{39} = i^{4 \cdot 9 + 3} = (i^4)^9 \cdot i^3 = i^3 = -i \quad (2)$$

$$\text{Άρα } w = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3(-i) = -3i$$

B3.

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i| \quad (3)$$

$$4z_1 - z_2 - i = 4(1+i) - (1-i) - i = 4 + 4i - 1 + i - i = 3 + 4i$$

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad (4)$$

$$\text{Από (3), (4): } |u + w| = 5 \Leftrightarrow |u - 3i| = 5 \Leftrightarrow |u - (0 + 3i)| = 5$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u είναι κύκλος κέντρου $K(0, 3)$ και ακτίνας $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1} (e^x + 1)' = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$h''(x) = \frac{-(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η $h(x)$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

Γ2.

$$\ln e^{h(2h'(x))} < \ln \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) \cdot \ln e < \ln \frac{e}{e+1} \stackrel{h(1)=\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e}{e+1}}{\Leftrightarrow} h(2h'(x)) < h(1)$$

$$\stackrel{h''(x) < 0}{\Leftrightarrow} h(x) \text{ γνησίως φθίνουσα} \quad 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \stackrel{h'(0)=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} h'(x) < h'(0) \stackrel{h''(x) < 0}{\Leftrightarrow} h'(x) \text{ γνησίως φθίνουσα} \quad x > 0$$



Γ3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(e^x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^x - \ln(e^x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) \right] = 0,$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{u + 1} = 1 \quad \text{αν } e^x = u \text{ και } x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) \right] = \lim_{t \rightarrow 1} \ln t = \ln 1 = 0 \quad \text{αν } \frac{e^x}{e^x + 1} = t \text{ και } x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow 1$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ δηλαδή ο x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right] = 1, \quad \text{διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = \lim_{u \rightarrow 0} (\ln(u + 1)) = \ln 1 = 0$$

για $e^x = u$ και $x \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \ln(e^x + 1) \right] = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - \ln(e^x + 1) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-\ln(e^x + 1)] = 0, \quad \text{άρα } \beta = 0$$

Επομένως η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ δηλαδή η $(\varepsilon): y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$

Γ4.

Βρίσκουμε τις ρίζες της $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow h(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = \ln 2^{-1} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{άρα } E = \int_0^1 |\varphi(x)| dx$$

Βρίσκουμε το πρόσημο της $\varphi(x)$ στο $[0, 1]$

Είναι $\blacksquare e^x > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

$\blacksquare h(x)$ γν. αύξουσα στο $[0, 1]$ άρα για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $0 \leq x \leq 1 \xrightarrow{h \text{ γν. αύξ.}}$

$$\Rightarrow h(0) \leq h(x) \leq h(1) \Rightarrow -\ln 2 \leq h(x) \xrightarrow{+\ln 2} 0 \leq h(x) + \ln 2 \quad \text{άρα } \varphi(x) \geq 0 \quad x \in [0, 1]$$

$$\text{Επομένως } E = \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \left[e^x \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) + \ln 2 \right] dx$$

$$= \int_0^1 e^x \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx + \int_0^1 e^x \ln 2 dx \quad (1)$$

$$\text{Είναι } I_1 = \int_0^1 e^x \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^1 (e^x)' \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx$$

$$= \left[e^x \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \left[\ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) \right]' dx = \left[e^x \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \frac{e^x + 1}{e^x} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right)' dx$$

$$= \left[e^x \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \frac{e^x + 1}{e^x} \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} dx =$$

$$= \left[e^x \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{e^x + 1} dx = \left[e^x \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad (2)$$

$$\text{Είναι } \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \text{ θέτουμε } e^x = u > 0 \text{ τότε: } x = \ln u, \quad dx = \frac{1}{u} du, \text{ για } x = 0 \text{ είναι}$$

$$u = e^0 = 1, \text{ για } x = 1 \text{ είναι } u = e^1 = e$$



$$\text{Άρα } \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_1^e \frac{u}{u+1} \frac{1}{u} du = \int_1^e \frac{1}{u+1} du = [\ln|u+1|]_1^e = \ln(e+1) - \ln 2$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } I_1 &= e \ln \left(\frac{e}{e+1} \right) - \ln \frac{1}{2} - [\ln(e+1) - \ln 2] \\ &= e[1 - \ln(e+1)] + \ln 2 - \ln(e+1) + \ln 2 \\ &= e - e \ln(e+1) - \ln(e+1) + 2 \ln 2 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^1 e^x \ln 2 dx = \ln 2 \int_0^1 e^x dx = \ln 2 [e^x]_0^1 = \ln 2 [e - 1] = (e - 1) \ln 2$$

$$\begin{aligned} \text{Από (1) είναι } E &= e - (e+1) \ln(e+1) + 2 \ln 2 + (e-1) \ln 2 \\ &= e - (e+1) \ln(e+1) + (e+1) \ln 2 \quad \tau. \mu. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1 = f(0)$$

Άρα f συνεχής στο $x_0 = 0$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο της $x e^x - e^x + 1$ στο $\mathbb{R}^+$

Έστω $h(x) = x e^x - e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

Προφανής ρίζα της $h(x)$ είναι το $x_0 = 0$

$$h'(x) = e^x + x e^x - e^x = x e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		0	
$h(x)$			

Ο.Ε.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) \geq 0$, επομένως $\forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ είναι } h(x) > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ είναι } f'(x) = \frac{h(x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \eta f(x) \text{ είναι γν. αύξουσα στο } \mathbb{R}. \\ \text{Επειδή } f \text{ συνεχής στο } x_0 = 0 \end{array} \right.$$

Δ2.

$$\alpha) \text{ Έστω η συνάρτηση } h(x) = \int_1^x f(u) du, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επειδή $f(u)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f(x)$.

$$H \text{ εξίσωση γίνεται } h(2f'(x)) = 0 \Leftrightarrow h(2f'(x)) = h(1) \quad (1)$$

Εξετάζουμε την μονοτονία της $h(x)$ είναι $h'(x) = f(x)$

Βρίσκουμε το πρόσημο της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	0	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} (e^x - 1) \right] = 0(-1) = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x} \right] = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } f'(0) = \frac{1}{2}$$

Άρα $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ επομένως $h'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα $h(x)$ γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $1 - 1$

$$\text{Από (1) είναι } h(2f'(x)) = h(1) \Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow x = 0$$

Δ2. β)

Είναι $M(x(t), y(t))$ δηλαδή $M(x(t), f(x(t)))$

Έστω ότι στο σημείο $M_0(x(t_0), f(x(t_0)))$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $x(t)$ είναι ο διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $f(x(t))$ τότε:

$$x'(t) = 2[f(x(t))]' \Leftrightarrow x'(t) = 2f'(x(t))x'(t) \xrightarrow{x'(t) > 0} 1 = 2f'(x(t)) \Leftrightarrow f'(x(t)) = \frac{1}{2}$$

Από ερώτημα α) είναι $x(t_0) = 0$, άρα στο σημείο $M_0(0, 1)$.

Δ3.

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2(x - 2)^2 = (e^x - 1 + 1 - e)^2(x - 2)^2 = (e^x - e)^2(x - 2)^2, x \in (0, +\infty)$$

$$g'(x) = 2(e^x - e)(e^x - e)'(x - 2)^2 + 2(e^x - e)^2(x - 2)(x - 2)'$$

$$= 2(e^x - e)e^x(x - 2)^2 + 2(e^x - e)^2(x - 2) = 2(e^x - e)(x - 2)[e^x(x - 2) + e^x - e]$$

$$= 2(e^x - e)(x - 2)[e^x(x - 1) - e], x \in (0, +\infty)$$

$$\text{Είναι } e^x - e \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Βρίσκουμε το πρόσημο της $e^x(x - 1) - e$ στο $(0, +\infty)$.

$$\text{Έστω } \varphi(x) = (x - 1)e^x - e$$

$$\varphi'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty) \text{ άρα } \varphi(x) \text{ γν. αύξουσα στο } (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x - 1)e^x - e] = -1 - e = -(1 + e)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x - 1)e^x - e] = +\infty$$

x	-∞	0	+∞
$\varphi'(x)$			+
$\varphi(x)$		$-(1+e)$	$+\infty$

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της $\varphi(x)$ που είναι το $(-(1+e), +\infty)$

υπάρχει μοναδικό $\rho \in (0, +\infty) : \varphi(\rho) = 0$

Επειδή $\varphi(1) = -e$ και $\varphi(2) = e^2 - e > 0$ το ρ βρίσκεται ανάμεσα στους 1 και 2 δηλαδή $\rho \in (1, 2)$.

	-∞	0	1	ρ	2	+∞
$e^x - e$			-	+	+	+
$x - 2$			-	-	-	+
$e^x(x - 1) - e$			-	+	+	+
$g'(x)$			-	+	-	+
$g(x)$			τ.ε	τ.μ.	τ.ε	

Άρα η $g(x)$ έχει 2 θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μέγιστου.