

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ ①

A1 $\rightarrow$ σελ 334
 A2 $\rightarrow$ σελ 246
 A3 $\rightarrow$ σελ 222

A4 $\rightarrow$ α) $\rightarrow \Lambda$ β) $\rightarrow \Sigma$ γ) $\rightarrow \Sigma$ δ) $\rightarrow \Lambda$ ε) $\rightarrow \Sigma$

ΖΗΤΗΜΑ ②

B1 Από $(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| = 2 \Leftrightarrow$

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ δηλ. $|z-2| = 1$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος $\left\langle \begin{matrix} K(2,0) \\ \rho = 1 \end{matrix} \right.$

Είναι $|z| = |(z-2) + 2| \leq |z-2| + 2 = 3$, δηλ. $|z| \leq 3$ A

2ος Τρόπος και γεωμετρικά αφού το σημείο $A(3,0)$ του C απέχει $(OA)_{\max} = 3$

B2 Έστω $z_{1,2} = x \pm yi$ οι 2 συζυγείς ρίζες της $w^2 + \beta w + \gamma = 0$.

Ισχύουν $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \Leftrightarrow 2x = -\beta \text{ ①} \\ z_1 \cdot z_2 = P \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = \gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \gamma \text{ ②} \\ |Im(z_1) - Im(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |2y| = 2 \Leftrightarrow |y| = 1 \text{ ③} \end{cases}$

Από την εξίσωση του κύκλου $(x-2)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Έτσι $\begin{cases} \text{①} \rightarrow \beta = -4 \\ \text{②} \rightarrow \gamma = 5 \end{cases}$



B3

Από τη σχέση $v^3 + a_2 \cdot v^2 + a_1 \cdot v + a_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -a_2 \cdot v^2 - a_1 \cdot v - a_0$

$$\text{άρα και } |v^3| = |-a_2 \cdot v^2 - a_1 \cdot v - a_0| \leq |-a_2 \cdot v^2| + |-a_1 \cdot v| + |-a_0| \Leftrightarrow$$

$$|v|^3 \leq |a_2| \cdot |v|^2 + |a_1| \cdot |v| + |a_0|$$

και αφού οι μιγαδικοί a_2, a_1, a_0 ανήκουν στον παραπάνω Γ . Τόπο θα ισχύει

από την **A** ότι $|a_2| \leq 3, |a_1| \leq 3, |a_0| \leq 3$ και έτσι έχουμε:

$$|v|^3 \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow |v|^3 < 3|v|^2 + 3|v| + 4 \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 4 < 0$$

HORNER

$$\Leftrightarrow (|v| - 4)(|v|^2 + |v| + 1) < 0 \Leftrightarrow |v| < 4$$

με το 4

καθότι ο όρος $|v|^2 + |v| + 1 > 0$ αφού έχει $\Delta = 1 - 4 < 0$.

Ζήτημα ③

Γ1

Από υπόθεση $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \Leftrightarrow 2(f(x) + x)(f(x) + x)' = 2x \Leftrightarrow$

$$\left[(f(x) + x)^2 \right]' = (x^2)' \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + c \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε και για } x = 0:$$

$$(f(0) + 0)^2 = 0 + c \stackrel{f(0)=1}{\Leftrightarrow} c = 1, \text{ άρα } (f(x) + x)^2 = x^2 + 1 \neq 0.$$

Βλέπω ότι η συνεχής $f(x) + x \neq 0$ στο $\mathbb{R}$ οπότε θα διατηρεί **σταθερό πρόσημο** στο $\mathbb{R}$

$$\text{και έτσι οι πιθανοί τύποι είναι } \begin{cases} f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \\ f(x) + x = -\sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} - x \end{cases}$$

Ο τύπος $f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} - x$ δίνει $f(0) = -1$ και απορρίπτεται

Γ2

Από υπόθεση για την $g(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$ δίνεται η εξίσωση $f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow \mathbf{g(x) = 0}, \text{ της οποίας θέλω να βρω πλήθος ριζών.}$$

Όλα αυτά καθότι η $f(x)$ είναι συνάρτηση 1 - 1 αφού έχει:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0 \text{ καθότι } \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x.$$

Για τον ίδιο λόγο είναι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$. Έτσι η $f \searrow$, άρα και 1 - 1.

Χρειαζόμαστε το σύνολο τιμών της $g(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$.

Είναι $g'(x) = 3x^2 + 3x$ και από

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Το πρόσημο της $g'(x)$ φαίνεται δίπλα

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
g'	+	○	-	○	+
g		↗	↘	↗	
		max	min		

Είναι $g(-1) = -\frac{1}{2}$, $g(0) = -1$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \text{ οπότε:}$$

Στο $(-\infty, 0)$ το $g(-1) = -\frac{1}{2}$ είναι ολικό max, άρα η $g(x) < 0$ και η εξίσωση **αδύνατη**

και στο $[0, +\infty)$ που η $g(x) \hat{=}$ έχει Σ. Τιμών το $\left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = [-1, +\infty)$

που το $0 \in [-1, +\infty)$, άρα η $g(x)$ έχει **1 μόνο ρίζα $\rho > 0$** καθότι $g(x) \hat{=}$.

Γ3 Θέλω ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$ που να επαληθεύει την εξίσωση

$$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \epsilon\phi x$$

Έστω $h(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \epsilon\phi x$ συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$ σαν πράξεις συνεχών.

$\left(\text{η συνάρτηση } \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt \text{ είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής, αφού η } f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \right)$

Είναι $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 - f(0) \cdot \epsilon\phi \frac{\pi}{4} = -1 < 0$ και $h(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - 0 > 0$ αφού η $f(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$.

Έτσι $h\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot h(0) < 0$, άρα από Θ. Bolzano το ζητούμενο.

Ζήτημα ④

Δ1

Από υπόθεση η $f' \nearrow$ στο $(0, +\infty)$ και $f(1) = 1$.

$$\text{Επίσης } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(1+5h) - f(1)] - [f(1-h) - f(1)]}{h} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(5 \frac{f(1+5h) - f(1)}{1+5h-1} + \frac{f(1-h) - f(1)}{1-h-1} \right) = 0 \Leftrightarrow 5f'(1) + f'(1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f'(1) = 0}$$

$$\text{Το } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{1+5h-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1), \text{ θέτοντας } 1+5h = x, \text{ που}$$

$$\text{όταν } h \rightarrow 0 \text{ το } x \rightarrow 1. \text{ Ομοίως και το } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{1-h-1} = f'(1), \text{ θέτοντας } 1-h = x.$$

Αφού από υπόθεση η $f' \nearrow$ στο $(0, +\infty)$ $\begin{cases} \text{για } x > 1 \text{ είναι } f'(x) > f'(1) = 0 \text{ άρα } f \nearrow \\ \text{για } x < 1 \text{ είναι } f'(x) < f'(1) = 0 \text{ άρα } f \searrow \end{cases}$

Έτσι η $f(x)$ εμφανίζει **ελάχιστο** στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 1$ δηλ. $f(x) > 1$ με $x \in (0, +\infty)$, $x \neq 1$.

Δ2

Από υπόθεση $g(x) = \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt$ στο $(1, +\infty)$ με $a > 1$.

Αφού η συνάρτηση $\frac{f(t) - 1}{t - 1}$ συνεχής στο $(1, +\infty)$ η συνάρτηση $g(x)$ παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 1} > 0 \text{ για κάθε } x > 1. \left(\text{από προηγούμενο ερώτημα η } f(x) > 1 \text{ για } x > 1 \right)$$

Έτσι η συνάρτηση $g(x) \nearrow$ στο $(1, +\infty)$.

Θέλω να λύσω την ανίσωση $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du$ που είναι της μορφής

$h(8x^2+5) > h(2x^4+5)$ όπου $h(x) = \int_x^{x+1} g(u) du$ παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$h'(x) = \left(\int_x^5 g(u) du + \int_5^{x+1} g(u) du \right)' = g(x+1) - g(x) > 0 \text{ αφού } x+1 > x \text{ και } g \nearrow.$$

$$\text{Έτσι από } h(8x^2+5) > h(2x^4+5) \xrightarrow{h \nearrow} 8x^2 + 5 > 2x^4 + 5 \Leftrightarrow 2x^2(2-x)(2+x) > 0.$$

Με τις ρίζες $x = \pm 2$ και $x = 0$ (διπλή) εύκολα προκύπτει $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.



Δ3

Έχουμε βρει $g'(x) = \frac{f(x) - 1}{x - 1}$ παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)-1}{x-1}}{x-1} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{x-1} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-1}$$

έχοντας εφαρμόσει το Θ.Μ.Τ στην παραγωγίσιμη, άρα και συνεχή $f(x)$ στο $[1, x]$.

Ετσι με $\xi < x \xrightarrow{f'(x) \uparrow} f'(\xi) < f'(x)$ και με $x > 1$ η $g''(x) > 0$ άρα η **$g(x)$ κυρτή**

Θέλω επίσης να λύσω την εξίσωση $(a-1) \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(a)-1)(x-a)$.

Αυτή η εξίσωση έχει **προφανή λύση την $x = a$** και για $x \neq a$ έχουμε:

$$\frac{g(x)}{x-a} = \frac{f(a)-1}{a-1} \xrightarrow[a>1]{g(a)=0} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) \xrightarrow{\Theta.M.T} g'(\xi) = g'(a) \xrightarrow[g'=1]{g'=1-1} \xi = a.$$

Το τελευταίο όμως είναι άτοπο αφού η εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. έγινε στο διάστημα $[a, x]$, οπότε $\xi < x$ ή στο διάστημα $[x, a]$, οπότε $\xi > x$.

Άρα η εξίσωση έχει **μία μόνο λύση την $x = a$**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ